

Obsah

Obsah	1
Motivace	3
1 Úvod	4
1.1. Fata morgána	4
1.2. O této práci	6
2 Kvantitativní popis chodu paprsků	7
2.1. Geometrická optika	7
2.2. Zrcadlení a jiné jevy v atmosféře	7
2.2.1. Spodní zrcadlení	8
2.2.2. Horní zrcadlení	9
2.2.3. Astronomická a terestrická refrakce	9
2.2.4. Zvednutí obzoru	10
2.3. Odvození rovnic	11
2.3.1. Prostředí se spojitě se měnícím indexem lomu	11
2.3.2. Diferenciace Snellova zákona	12
2.3.3. Integrální metoda – Variační počet	15
2.3.4. Množina všech řešení	17
2.3.5. Fyzikální rozbor matematických řešení	17
2.3.6. Lineární změna indexu lomu	20
2.3.7. Harmonický oscilátor	21
2.3.8. Homogenní pole	22
3 Experimentální část	23
3.1. Uspořádání experimentu	23
3.2. Vedení experimentu	27
3.3. Vyhodnocení získaných dat	29
3.3.1. Distorze	29
4 Matematická modelace	33

4.1.	Difúze.....	33
4.1.1.	Odvození difúzní rovnice.....	33
4.1.2.	Řešení difúzní rovnice.....	34
4.1.3.	Numerický model.....	37
4.1.4.	Křivost, poloměr křivosti.....	39
5	Závěr.....	40
	Seznam použité literatury.....	42
	Příloha – grafy funkcí.....	44

Motivace

„Povětrí bylo pošmurné a celé okolí Příkopic pokryto sněhem. Podle vyprávění Vojtěcha Sedláčka toho dne kolem třetí hodiny odpoledne vyšel z otcova domu rychtářův syn podívat se na oblohu, zda bude sněžit nebo pršet. Podíval se k jihu a ke svému velkému zděšení spatřil velké množství jízdního vojska, přijíždějícího od lesa panství Spálenopoříčského. Mimo potůčku dělicího panství poříčské od mirošovského nevedla tudy žádná silnice nebo cesta. Před lesem se rozprostírala dosti rozlehlá planina, pokrytá sněhem, třpytícím se jako stříbro. Bylo prý bezvětří a všude panoval klid. Zděšený rychtářův syn viděl, že se vojsko neustále přibližuje k Příkopicím, běžel ke svým rodičům a řekl jim, co se děje. Rychtář vyšel s ním ven a jeho syn prý pravil: "Hle, otče, kampak s tím vojskem v naší malé vesnici?" Rychtář se zarazil. Zatím jízdní vojsko cválalo směrem k vesnici a na poli "Spáleniště" se rozestavilo do jedné řady po třech jezdcích. "Zdálo se, jako by všichni koně byli vraní a jezdci v bílé pláště odění." Jejich palaše se blýskaly a bylo vidět, jak jimi vzdávají poctu. "...Na obou křídlech se chvěly krásné korouhve, a to na pravém červená a na levém bílá, vojsko zdobíce." Zatím vesnice byla vzhůru nohama, neboť kdekdo chtěl být svědkem příchodu neznámého vojska. Lidé se hrmuli ven; ze svých příbytků; všichni se divili, kterou cestou tam mohlo tolik jízdy přijet, mnozí se domnívali, že asi vojsko zabloudilo. Jinak se to nedalo vysvětlit. "Když jezdci tak čtvrt hodiny postáli, obrátili se pojednou na polopravou stranu (halbrechts), pochodovali přes ten potůček a jej překročivše, všichni mžikem zmizeli." Na to prý příkosický rychtář samou radostí prohlásil: "Ti již více sem neprijdou! Kdepak bych byl pro ně nabral bytů a chlívů?" Avšak tak nenadále zmizení, celého jízdního vojska v místech, kde nebyla veřejná silnice, bylo velmi podezřelé. Vesničany pojal strach a hrůza z toho, co viděli, a z toho, co mohlo ještě přijít. Nepochopitelné. Zakroutili nechápavě hlavou, a když se obrátili, spatřili v témže směru pěchotu, která táhla tou samou cestou, a rozestavila se na tomtéž místě jako jízda. Pěchoty bylo prý mnohem více než jezdců. Pěšáci byli oděni v šedé pláště a slunce se odráželo od ručnic, bodáků a šavlí. Opět došlo k podivným ceremoniím. Když se řady pěchoty rozestavily, jako prve jízda, vstoupili dva černě odění důstojníci, obrátili se k vojsku a něco zaveleli. Vesničané se prý domnívali, že toto vojsko určitě potáhne k vesnici. Avšak k velkému jejich překvapení asi po čtvrt hodině i pěchota zmizela tak nenadále, jako prve jezdci. Pak ještě bylo vidět mnohonásobné pohyby koňstva, vozů o dvou kolech, na nich sudy nebo děla vezli; dále bylo vidět řadu dalších vojenských vozů. Fronta vojska šla od jihu k severu obličejem obrácena k západu.

Tato nová podívaná ohromila vesničany. Tři osoby prý onemocněly; jedna z nich se vrátila domů a chtěla vyprávět, co právě viděla, hrůzou prý ani slovo nemohla ze sebe vydat. Teprve třetí den mohla promluvit o tomto prazvláštním úkazu. Na místo, kde se objevilo vojsko, se nikdo neopovážil jít, kromě jediného rychtářova syna, který spatřil jako první podivné scény. Avšak nenašel ani stopy po nějakém vojsku.“

prof. Vojtěch Sedláček, Podivné vidění,

1. ročník časopisu Společnosti vlasteneckého muzea v Čechách, 1827, převzato z [18]

1 Úvod

1.1. Fata morgána

Úvodní stranu své práce jsem vyhradil motivační zprávě z historie Příkosic u Rokycan. Autor podrobně popisuje zajímavý a nenadálý přírodní úkaz z roku 1825 . Tento druh úkazů je všeobecně znám pod názvem fata morgána. Tento ustálený výraz pro zvláštní přírodní úkazy má svůj původ v bretonské pověsti. Fata Morgana byla údajně kouzelnice, nevlastní dcera krále Artuše a zavržená milenkyně Lancelotova, která svou moc projevovala vzdušnými přeludy, které odtud mají svůj název. Dle pověsti Fata Morgana bydlí v mořských úžinách Messiny u Itálie v křišťálovém paláci a objevuje se se svými družkami při západu slunce ve skvostně zářivých podobách.

Vojáci tou dobou skutečně táhli, ale až ve vzdáleném Bavorsku. V historii lidstva najdeme celou řadu dalších popisů faty morgány. Podobné (historicky závažnější) zrcadlení bylo vidět v Belgii u města Verviers. Tou dobou probíhala o 100 km dále bitva u Waterloo.

Velice známé jsou popisy námořníků, kteří viděli zbloudilé lodi bez posádky, podivně se vznášející nad hladinou moře a někdy i převrácené podél vodorovné osy (vzhůru nohama). Tak zřejmě vznikly příběhy o Bludném Holanďanovi. Z prostředí moře jsou známá i zrcadlení vzdálených ostrovů a pevnin. Za jistých klimatických podmínek dochází totiž k takzvanému zvednutí horizontu a je možné například dohlédnout z Islandu až ke Grónsku [8]. Tímto způsobem možná Vikingové věděli o přítomnosti Grónska předtím, než vypluli na moře.

Dalším často citovaným případem fata morgány jsou „přeludy“ spásonosných oáz v poušti.

„Letní teplo slunečních paprsků rozpálilo písek, který začal pálit, jako by vytrvalý požár všechno rozpálil. Nadměrným žářem vyvolaná mlha potom pokryla pozemskou záři a půda se změnila v cosi jako nekonečnou bezednou vodní plochu.“

Q. Curtius Rufus, kniha VII
(o polním tažení Alexandra Velikého) [8]

Paganel měl také příležitost upozornit na zajímavé zrcadlení, zjev na těchto rovinatých pláních zcela běžný; estancie se z dálky podobaly velkým ostrovům, neboť se zdálo, že topoly a vrby kolem nich se zrcadlí v průzračné vodě, jež ustupuje před kročejemi cestovatelů. Přelud byl tak dokonalý, že si na něj oko nemohlo přivyknout.

Jules Verne, Děti kapitána Granta

Taková zrcadlení však nevznikají nutně jen na pouštích, můžeme se s nimi setkat všude tam, kde dochází k významnému zahřátí vzduchu v přízemních vrstvách. Je možné jej za pěkných letních dní při bezvětří spatřit například nad zahřátou silnicí, která se nám jeví jako mokrá.

Fata morgána, ostatně jako většina neprobádaných přírodních úkazů, provází lidstvo od pradávna. Vzbuzovala v lidech úžas, úctu a zároveň obavy. Podle [8] dokonce některé dávné civilizace vyznávaly kult faty morgány.

I v dnešní době, kdy již fata morgána nebudí v lidech hrůzu a úzkost a jevy zrcadlení jsou dobře kvalitativně vysvětleny, jistě není ztrátou času zabývat se problematikou šíření světla v prostředí se spojitě se měnícím indexem lomu. Právě spojitá změna indexu lomu světla v atmosféře je příčinou vzniku faty morgány. Kvantitativním popisem pohybu světla v takových podmínkách se budu zabývat ve své práci.

1.2. O této práci

V přírodě se vyskytuje celá řada dějů, při kterých se určitá fyzikální vlastnost prostředí nemění skokově, ale spojitě. Jako příklad mohu uvést hustotu vody u ústí řeky do moře, kdy dochází k promíchání sladké a slané vody a zcela jistě toto rozhraní nebude rovinné a ostré, ale spojitě se měnící (o tom by jistě dokázali dlouze hovořit námořníci z nákladních člunů, kteří při cestě do moře mohou přibírat náklad, ale musí nakládat s rozvahou při cestě z moře proti proudu řeky). V běžném každodenním životě můžeme pozorovat (jsme-li dostatečně vnímaví) zajímavé jevy při nalévání sirupu do sklenice s vodou. Asi nejpodrobněji jsou popsány jevy související se spojitě se měnící hustotou zemské atmosféry a následně jejím indexem lomu.

V této práci se v druhé kapitole budu zabývat právě těmito jevy, stručně popíši chod paprsků v atmosféře, spodní a vrchní zrcadlení (takzvanou fatu morgánu), jejichž některé projevy byly popsány v úvodní kapitole, a jen velice stručně zmíním některé zajímavé projevy astronomické a terestrické refrakce.

V třetí části přejdu k problematice chodu světla v takovém prostředí. Uvedu ukázky několika způsobů odvození rovnic popisujících trajektorii světla v prostředí se spojitě se měnícím indexem lomu a provedu diskusi těchto rovnic.

Ve čtvrté kapitole se budu věnovat experimentální části. Sledoval jsem průchod světla roztokem cukru, ve kterém díky spojitě změně indexu lomu dochází k ohybu světelného paprsku. V důsledku difúze se celá soustava časově vyvíjí a ohyb světelného paprsku je tedy funkcí času. V této části vysvětlím experimentální uspořádání, nastíním úskalí spojená s vyhodnocováním dat a provedu krátký rozbor chyb vzniklých při získávání dat.

Čtvrtá kapitola bude věnována konkrétním výpočtům, tvorbě matematického modelu pohybu světla ve vodném roztoku cukru a hledání parametrů této rovnice. Pokusím se najít co nejpřesněji trajektorii světla pro konkrétní experimentální uspořádání. Provedu porovnání matematicky vypočteného tvaru trajektorie s trajektorií získanou v experimentu.

2 Kvantitativní popis chodu paprsků

2.1. Geometrická optika

Geometrická nebo též paprsková optika je oblast optiky, ve které se pro šíření světla a tvorbu obrazů používá model světelných paprsků. [7]. Paprsková optika vychází ze třech základních tvrzení.

- a) Princip přímočarého šíření paprsku ve stejnorodém prostředí; toto tvrzení je zřejmě ekvivalentem definice paprsku pro homogenní prostředí: paprsek je orientovaná polopřímka vycházející ze zdroje. Z každého zdroje vycházejí paprsky všemi směry.
- b) Princip nezávislého chodu paprsků, který říká, že dva různé paprsky se v prostoru neovlivňují.
- c) Třetím důležitým tvrzením je zákon odrazu a lomu paprsku na rozhraní dvou prostředí

Tolik návrat do středoškolské fyziky. Ve většině učebnic se však nedovíme, kdy je možno k modelu světelných paprsků přistoupit a zanedbat tak vlnové nebo kvantové vlastnosti světla. Takový rozbor provádí ve svých přednáškách např. prof. R. Feynmann [4]. Z rozboru vyplývá, že vlnová délka používaného světla musí být dosti malá vzhledem k rozměrům sledovacího zařízení (aparatury), aby se neprojevovaly vlnové vlastnosti světla, a zároveň energie světelných kvant, fotonů, zanedbatelně malá vzhledem k rozlišovací schopnosti této aparatury, aby se ani kvantové procesy neprojevovaly. V takovém případě je možné použít nejjednodušší aproximaci, geometrickou optiku. Bez dalšího rozboru se spokojím s tvrzením, že tyto podmínky budou s dostatečnou přesností v případě našeho experimentu splněny.

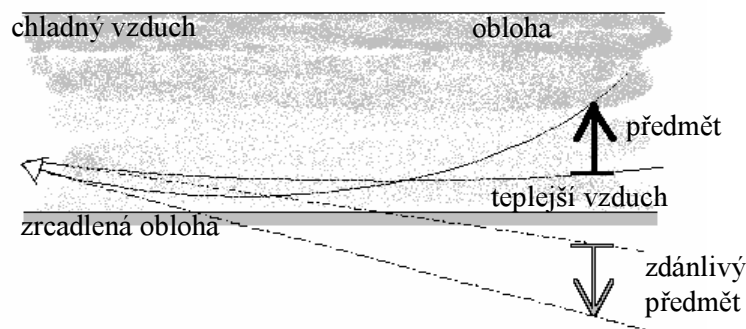
2.2. Zrcadlení a jiné jevy v atmosféře

Dříve než se pustím do samotného odvozování přesných matematických formulí pro dráhu paprsku, zmíním jen v krátkosti některé zajímavé jevy, které

vznikají v atmosféře díky změně hustoty vzduchu ať již způsobené různou teplotou vzdušné hmoty, nebo „jen“ gravitačním působením země. Jako základ pro vysvětlení těchto jevů my poslouží Fermatův princip nejkratšího času. Ten říká, že se světelný paprsek šířící se z bodu A do bodu B pohybuje po takové dráze, která zabere nejkratší možný čas. Tento princip a trocha geometrické představivosti nám dovolují vysvětlit celou řadu jevů vznikajících v atmosféře.

2.2.1. Spodní zrcadlení

Ke spodnímu zrcadlení dochází v případě, že spodní vrstvy vzduchu mají vyšší teplotu než horní vrstvy (a teplotní gradient je dosti strmý). K takové situaci dochází například na

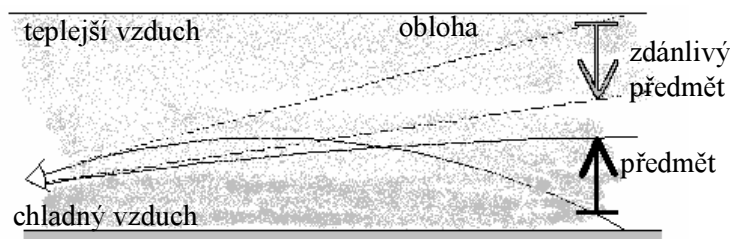


Obrázek 2.1
Znázornění zakřivení paprsků při dolním zrcadlení

pouštích, ale například i nad běžnou silnicí za jasného letního dne, kdy se povrch země vydatně zahřeje. Od něj se zahřeje i spodní vrstva atmosféry. V zahřáté vrstvě se pak světlo šíří rychleji (index lomu řidšího vzduchu je menší). Z Fermatova principu je tedy zřejmé, že světlo se při přechodu z místa A do místa B nebude šířit přímočaře, ale po dráze prohnuté směrem dolů (odtud název spodní zrcadlení). Pozorovatel pak za určitých podmínek pozoruje převrácený obraz mnohem vzdálenějšího předmětu (viz obrázek 2.1).

2.2.2. *Horní zrcadlení*

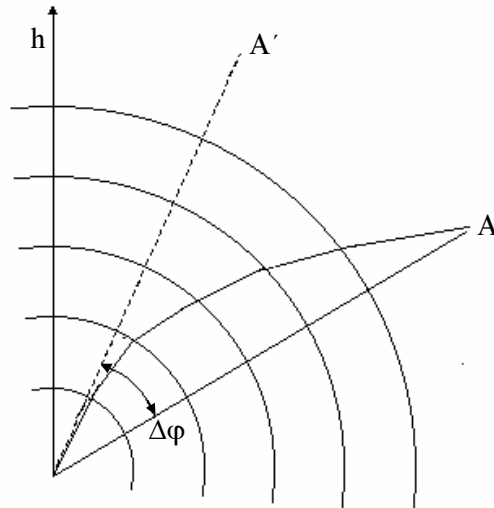
K tomuto druhu zrcadlení dochází v případě, že naopak horní vrstva atmosféry má vyšší teplotu než vrstvy pod ní. K takové situaci může dojít v případě teplotní inverze, tedy nasune-li se teplá fronta nad studenou frontu. V našich zeměpisných šířkách k tomuto jevu dochází většinou v zimě, kdy jsou lépe splněny podmínky pro teplotní inverzi. Vhodným místem pro výskyt takového zrcadlení jsou jistě polární oblasti, kdy za pěkného počasí dojde k zahřátí atmosféry, ale zasněžený povrch se tolik nezahřeje. A jistě tyto podmínky může splňovat rozlehlá vodní plocha oceánů, která se díky velké tepelné kapacitě vody jen zvolna zahřívá. V této situaci se paprsky z bodu A do bodu B šíří opět po zakřivené dráze a to směrem vzhůru (tedy název horní zrcadlení). Vše je opět patrné z obrázku 2.2.



Obrázek 2.2
Znázornění zakřivení paprsků při horním zrcadlení

2.2.3. *Astronomická a terestrická refrakce*

Pojmem refrakce rozumíme odchylku světelného paprsku od přímočarého pohybu, způsobenou souvislým lomem světla. [6] Astronomická refrakce pak značí, že pozorovaný objekt je za hranicí atmosféry, tedy ve vesmíru, a terestrická znamená, že se pozorovaný objekt nachází v atmosféře. Princip refrakce je v obou případech stejný. Světelný paprsek se šíří atmosférou tak, že se neustále zmenšuje úhel dopadu (měřeno od kolmice). Pozorovatel stojící na povrchu země pak předmět vidí místo v bodě A v bodě A'. Úhel $\Delta\varphi$ mezi směry k A a k A' se nazývá úhel astronomické/terestrické refrakce; vše důležité znázorňuje obrázek 2.3.



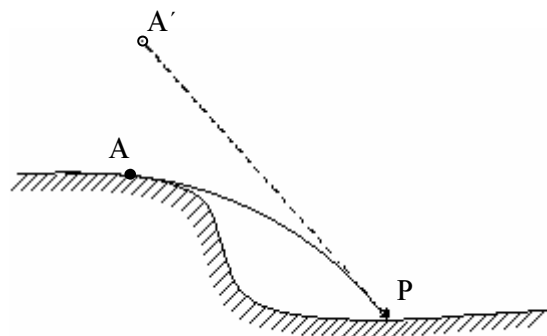
Obrázek 2.3

Znázornění atmosférické a terestrické refrakce, pozorovatel vidí předmět A v místě A'.

V důsledku astronomické refrakce vidíme vesmírná tělesa až o 35' výše nad obzorem, posouvají se nám východy a západy hvězd a vidíme slunce ještě 2 minuty po západu; tedy po okamžiku, kdy geometricky zmizí za obzorem.

2.2.4. Zvednutí obzoru

Jedním z důsledků terestrické refrakce je i zdánlivé zvednutí obzoru. Paprsek procházející šikmo atmosférou se za normálního rozložení hustoty vzduchu zakřivuje směrem k povrchu země (viz obrázek 2.4). Toto zakřivení je ještě patrnější, nastane-li přízemní teplotní inverze. Pomocí zdánlivého zvednutí obzoru se možná dají vysvětlit obrazy opravdu obřích oblud na moři, nebo i schopnost vikingských mořeplavců plavit se do Grónska [8].



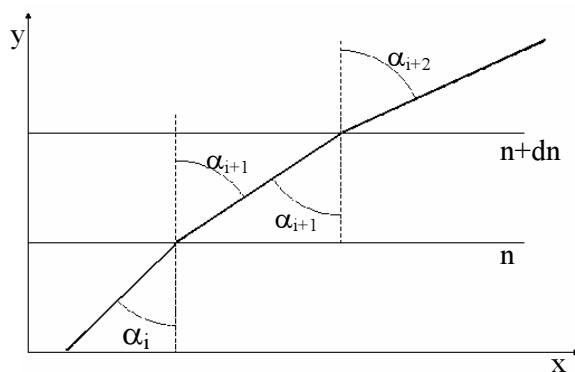
Obrázek 2.4

Zvednutí obzoru, pozorovatel opět vidí předmět v pozici A'.

2.3. Odvození rovnic

2.3.1. Prostředí se spojitě se měnícím indexem lomu

Pokusím se odvodit rovnice, které popisují chod paprsku v prostředí se spojitě se měnícím indexem lomu. Pro jednoduchost se v této části omezím na jednorozměrnou změnu indexu lomu. Jak se ukáže později, není toto omezení na úkor popisu fyzikální podstaty jevu a dostatečně dobře odpovídá experimentálnímu uspořádání. Z této úvahy již zřejmě vyplývá, že k popisu chodu takového paprsku bude stačit rovina, čili jinými slovy řečeno, budeme mít dvourozměrný problém. V návaznosti na experiment, a také z důvodu jednoduchosti, budu pracovat v pravoúhlém kartézském systému souřadnic. Nechť se index lomu mění s výškou tedy bude funkcí souřadnice y . Při odvozování budu vycházet z obrázku 2.5.



Obrázek 2.5
Dráha paprsku v prostředí se změnou indexu

První pohled na věc můžeme nazvat diferenciální. Rozdělíme prostředí na vrstvy, ve kterých se index lomu „téměř“ nemění. V takových vrstvách se paprsek pohybuje přímočaře a na rozhraní je jeho chování dobře popsáno známým Snellovým zákonem.

$$n_i \sin(\alpha_i) = n_{i+1} \sin(\alpha_{i+1}) \quad (2.1)$$

Je-li takových rozhraní více za sebou, pak opakovaným použitím Snellova zákona dostaneme:

$$n_i \sin(\alpha_i) = n_{i+1} \sin(\alpha_{i+1}) = \dots = N, \quad (2.2)$$

kde N je konstanta. Při důkladnější rozvaze je vidět smysl této konstanty. Představuje index lomu prostředí v místě, kde se, pokud k tomu dojde, paprsek pohybuje rovnoběžně s vodorovnou osou. Pokud k této situaci nedojde, pak má N význam počáteční podmínky. Z této úvahy je vidět, že v místě kde $\alpha_i = \frac{\pi}{2}$, platí pro paprsek:

$$N = n(y) \cdot \sin(\alpha). \quad (2.3)$$

V této rovnici jsem již přešel ke spojitě se měnícímu indexu lomu, tedy rovnice znázorňuje, že index lomu je funkcí souřadnice y .

V této chvíli jsou možné dva způsoby dalších úprav. První uvedený jsem převzal z přednášky „Světlo v prostředí se spojitě proměnným indexem lomu“ kterou přednesl Martin Plöschner v rámci předmětu „Zajímavá teoretická fyzika“, na Přírodovědecké fakultě Masarykovy univerzity v Brně [9].

2.3.2. Diferenciace Snellova zákona

Rovnici 2.3 můžeme nyní diferencovat. Tím dostaneme kvantitativní závislost změny úhlu chodu paprsku v závislosti na změně indexu lomu.

$$dn \sin(\alpha) + n \cos(\alpha) d\alpha = 0, \quad (2.4)$$

po úpravě pak:

$$\frac{dn}{n} = -\cotg(\alpha) d\alpha \quad (2.5)$$

Ze vztahu 2.5 je vidět, že pro rostoucí index lomu klesá úhel dopadu paprsku na rozhraní. Tuto skutečnost vyjadřuje v rovnici 2.5 záporné znaménko na pravé straně. Je vlastně důsledkem dohody měřit úhel dopadu od kolmice.

Z obrázku 2.5 je snadné získat vztah mezi dx , dy a α .

$$\cotg(\alpha) = \frac{dy}{dx}, \quad (2.6)$$

po diferenciaci této rovnice máme:

$$-\frac{1}{\sin^2(\alpha)} \frac{d\alpha}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2}. \quad (2.7)$$

Ještě jednou použijeme obrázek 2.5 pro vyjádření $\sin(\alpha)$:

$$\sin(\alpha) = \frac{dx}{\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}} = \left(1 + (y')^2\right)^{-\frac{1}{2}}. \quad (2.8)$$

Postupným dosazením vztahů 2.6, 2.7 a 2.8 do rovnice 2.5 a následnou úpravou lze dojít k rovnici:

$$\frac{dn}{n} = dy \frac{d^2y}{dx^2} \left(1 + (y')^2\right)^{-1}, \quad (2.9)$$

a odtud již rychle:

$$\frac{d^2y(x)}{dx^2} = \frac{1}{n(y)} \frac{dn(y)}{dy} \left(1 + \left(\frac{dy(x)}{dx}\right)^2\right). \quad (2.10)$$

S využitím označení $y_i = \frac{\partial y}{\partial t}$ je možné tuto rovnici přepsat na jednodušší tvar:

$$y_{xx} = \frac{1}{n} n_y (1 + (y_x)^2), \text{ případně } y'' = \frac{1}{n} n' (1 + (y')^2), \quad (2.11)$$

kde je ovšem třeba dát pozor na to, podle které proměnné derivujeme. Autor práce [9] v dodatku upozorňuje na některá úskalí úprav z tvaru 2.9 na 2.10 či 2.11. Já se k této problematice vrátím na závěr této kapitoly v diskuzi odvozených rovnic.

Výsledkem těchto úvah je nehomogenní kvadratická diferenciální rovnice druhého řádu s proměnnými koeficienty. Tuto rovnici budu nadále považovat za základní rovnici pohybu světelného paprsku v prostředí se spojitě se měnícím indexem lomu. Dosazením Snellova zákona (rovnice 2.3) do rovnice 2.10 či 2.11 je možné přejít k lineární diferenciální rovnici druhého řádu:

$$y'' = \frac{1}{n} n' \frac{n^2}{N^2} = \frac{1}{2N^2} \frac{d(n^2)}{dy}. \quad (2.12)$$

Hledáme-li nějakou rovnici a nalezneme-li ji, je vhodné na nějakém nejjednodušším příkladě ověřit, že popisuje opravdu zkoumaný děj. Takovým příkladem zkoušky je případ prostředí s konstantním indexem lomu. Dosazením do rovnice 2.11 a derivováním dostaneme triviální případ:

$$y'' = 0 \Rightarrow y = Ax + B.$$

Tak tento výsledek není nijak překvapivý, světlo se šíří v prostředí s konstantním indexem lomu po přímce. Závěr je zcela v souladu s geometrickou optikou.

Dříve než ukáži další případy rozložení indexu lomu, které umožňuje řešit rovnici 2.11 exaktně, dlužím slíbenou druhou metodu odvození této rovnice. Vycházet budu opět ze Snellova zákona, tedy rovnice 2.3. Do této rovnice je možno rovnou dosadit za $\sin(\alpha)$ výraz 2.8.

$$n(y) \cdot \left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}} = N, \text{ tedy } (1 + (y')^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{n}{N} \quad (2.13)$$

Umocněním a jednoduchou úpravou si rovnici připravíme pro další práci:

$$\frac{(1 + (y')^2)}{n^2} = \frac{1}{N^2}. \quad (2.14)$$

Velice rychle jsme tedy dostali rovnici, která též popisuje chod světla v našem prostředí. Na rozdíl od rovnice 2.11 je tato jen prvního řádu, to znamená, že její řešení má jeden stupeň volnosti a při řešení dostaneme pouze jednu integrační konstantu. V čem se dále liší tyto dvě rovnice? Nedává některá z nich i nějaké jiné „skryté“ řešení? Opovědět na tyto otázky je možné po jednoduché úpravě rovnice 2.14; derivujme ji podle proměnné x (zde se hodí připomenout, že $n=n(y(x))$):

$$\frac{2y'y''n^2 - (1 + (y')^2)2n'n'y'}{n^4} = 0, \quad (2.15)$$

kde jsem záměrně nekrátil y' . Jednoduchou úpravou dostaneme:

$$y' \left(y'' - \frac{n'}{n} (1 + (y')^2) \right) = 0. \quad (2.16)$$

Rovnici 2.16 můžeme chápat jako dvě rovnice:

$$\text{a) } y' = 0, \text{ b) } y'' - \frac{n'}{n} (1 + (y')^2) = 0 \quad (2.17)$$

přičemž první z nich představuje triviální řešení, kdy paprsek nasměřovaný vodorovně, tedy ve vrstvě s konstantním indexem lomu, se nebude vychylovat z přímého směru a bude se šířit tak jak by „někdo“ očekával po „slušném“ paprsku, tedy přímočaře. Druhá rovnice je totožná s rovnicí 2.11, kterou jsme získali přímou diferenciací Snellova zákona. V dodatku práce [9] autor upozorňuje na

neekvivalentní dělení výrazem dy , při kterém přijdeme právě o zmiňované triviální řešení.

Až potud to byla matematika a málo fyziky. K diskusi rovnic 2.17 je třeba se více věnovat fyzice. Ponechám zatím tuto otázku nedořešenou, ale zcela jistě se k ní v dalším textu ještě vrátím. Nyní bych rád zmínil ještě jeden, zcela odlišný způsob, jakým lze dojít k rovnici popisující chod paprsku.

2.3.3. Integrální metoda – Variační počet

Druhá metoda je integrální. Vychází z variačního principu. V tomto případě se variuje výsledný čas potřebný k překonání trasy z bodu A do bodu B, což odpovídá přímému výpočtu Fermatova principu.

$$t = \int_A^B \frac{dl}{v}, \quad (2.18)$$

kde dl je dráhový element a v je rychlost světla v daném místě. Pro další úpravy bude výhodnější přepsat vzorec 1 do tvaru s indexem lomu; stačí obě strany rovnice násobit konstantou c , tedy rychlostí světla:

$$ct = \int_A^B c \frac{dl}{v} \Rightarrow J = \int_A^B n dl. \quad (2.19)$$

Využijeme-li opět obrázku 2.5, snadno přepíšeme rovnici 2.19 na tvar:

$$J[y] = \int_A^B n(y) \left(1 + \left(\frac{dy(x)}{dx} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} dx,$$

zjednodušeně:

$$J = \int_A^B n \left(1 + (y')^2 \right)^{\frac{1}{2}} dx \quad (2.20)$$

Rovnice 2.20 představuje zápis Fermatova principu nejmenšího času. Nyní je třeba tuto rovnici variovat. Postup je možno najít v každé učebnici teoretické mechaniky, já osobně jsem čerpal z [1] Pro zjednodušení zápisu zavedu nejdříve substituci:

$$F(x, y, y') = n(y) \left(1 + (y'(x))^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.21)$$

Přírutek funkcionálu $\Delta J[y]$ se запиše:

$$\Delta J = J[y + \delta y] - J[y] = \int_A^B F(x, y + \delta y, y' + (\delta y)') dx - \int_A^B F(x, y, y') dx,$$

rozvedeme nyní první integrál v Taylorovu řadu a upravíme:

$$\begin{aligned} \Delta J &= \int_A^B \left\{ F(x, y, y') + \frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} (\delta y)' + \dots \right\} dx - \int_A^B F(x, y, y') dx = \\ &= \int_A^B \left\{ \frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} (\delta y)' \right\} dx. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Vzhledem k tomu, že variace a derivace (ostatně i integrace) podle nezávislé proměnné jsou záměnné operace je možno psát:

$$\begin{aligned} \delta J &= \delta \int_A^B F(x, y, y') dx = \int_A^B \delta F(x, y, y') dx = \int_A^B \left\{ \frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} (\delta y)' \right\} dx \\ \delta J &= \int_A^B \left\{ \frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} \frac{d}{dx} (\delta y) \right\} dx \end{aligned} \quad (2.23)$$

Integrál na pravé straně rovnice 2.23 můžeme rozdělit na dva a druhou část integrovat per partes:

$$\delta J = \int_A^B \frac{\partial F}{\partial y} \delta y dx + \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y \Big|_A^B - \int_A^B \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \delta y dx = \int_A^B \left\{ \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right\} \delta y dx. \quad (2.24)$$

Položíme-li nyní $\delta J = 0$, což je podmínka pro stacionární funkcionál, dostaneme hned nutnou a postačující podmínku pro stacionární hodnotu funkcionálu. Tato rovnice je známa pod názvem Eulerova-Lagrangeova. [1]

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0 \quad (2.25)$$

Nyní již dosadíme do této rovnice zpět substituci 2.21 a po několika úpravách snadno dostaneme:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = n'(1 + (y')^2)^{\frac{1}{2}}$$

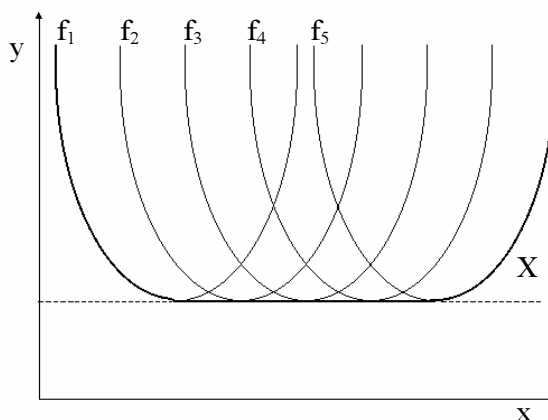
$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) = \frac{d}{dx} \left[ny'(1 + (y')^2)^{-\frac{1}{2}} \right] = \left\{ [n'(y')^2 + ny''] (1 + (y')^2)^{-\frac{1}{2}} - n(y')^2 y'' (1 + (y')^2)^{-\frac{3}{2}} \right\} (1 + (y')^2)^{-1}$$

$$n'(1+(y')^2) - ny'' = 0 \Leftrightarrow y'' = \frac{n}{n'}(1+(y')^2). \quad (2.26)$$

Tato poslední rovnice je již zřejmě stejná jako rovnice 2.11 a 2.17 získané dříve.

2.3.4. *Množina všech řešení*

Vrátím se nyní ještě k řešení rovnic 2.17 (jak jsem ostatně slíbil). Z matematického hlediska je situace zcela jasná. Je-li nějaká funkce řešením rovnice 17a nebo 17b, pak tato funkce posunutá o konstantu je také řešením těchto rovnic. Na obrázku 2.6 jsou funkce f_1, f_2, \dots, f_5 řešeními rovnic 2.17. Pak i obalová funkce X těchto řešení je řešením rovnic.



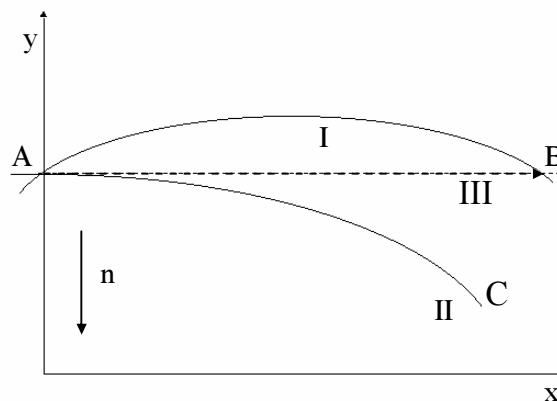
Obrázek 2.6
Ukázka matematicky možných řešení rovnice 17

Stojí za povšimnutí, že vycházíme-li přímo z Fermatova principu (variačního počtu) dostaneme pro paprsek pouze rovnici 2.11 nebo 2.17b. Vycházíme-li naproti tomu ze Snellova zákona, je přípustných řešení mnohem více. Tuto skutečnost je třeba rozebrat na základě fyzikálních úvah.

2.3.5. *Fyzikální rozbor matematických řešení*

Z matematických úvah v předchozí kapitole by se zdálo, že paprsek má na výběr nekonečně mnoho tras a všechny splňují rovnice jeho pohybu, tedy není důvod volit jednu z nich, ale mohl by se pohybovat po všech. Asi nikoho nepřekvapím, řeknu-li, že tak se však paprsek nechová. Vybere si vždy jen jednu trajektorii, odpovídající některé z funkcí f_i .

Na obrázku 2.7 jsem načrtl, jak bude vypadat pohyb paprsku v prostředí se spojitě proměnným indexem lomu, v případě, že index lomu roste s klesající souřadnicí, tedy $n' < 0$. Musím se přiznat, že jsem byl překvapen. Když se nad problémem opravdu zamyslíme, je to vlastně zřejmé, ale to je právě ono; pořádně se zamyslet. Bral jsem jako fakt, že paprsek se z bodu A do bodu B bude šířit po dráze s nejkratším časem. V naší situaci tedy po dráze I. Očekával jsem však, že namířím-li paprsek přímo z A do B, bude se pohybovat po dráze III.



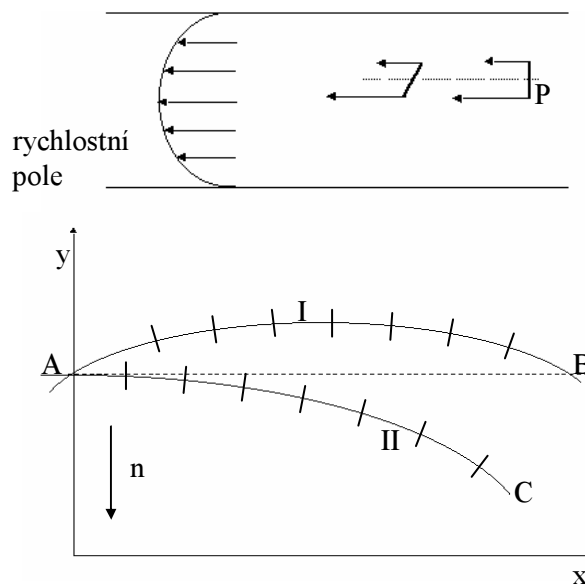
Obrázek 2.7

Obrázek k vysvětlení fyzikálních řešení rovnic pohybu světla

Zdálo by se, že nemá důvod se ohýbat, vždyť na jeho „předpokládané“ trase je index lomu konstantní. Navíc tato dráha vychází jako řešení rovnice 2.17a, vyhovuje tedy Snellovu zákonu. Jenže takhle se paprsek nechová, nejde přímo do bodu B, ale jeho trajektorie (II) bude zakřivená a dostane se do bodu C. A je tu hned několik otázek, které tato situace nutně vyvolá. Proč se dráha paprsku zakřivuje „dobrovolně“ do oblasti s vyšším indexem lomu a tudíž s nižší rychlostí? Proč se vlastně vůbec zakřivuje, je-li na počátku poslán vodorovně, tedy ve vrstvě s konstantním indexem lomu ($y'(0) = 0$)? A konečně, proč Snellův zákon a Fermatův princip dávají rozdílná řešení?

Pro přesné odpovědi na tyto otázky je nutné jít hluboko do kvantové fyziky nebo alespoň do vlnové optiky a opustit zvolenou geometrickou aproximaci světla. Já pomínu částicové vlastnosti světla a spokojím se pouze s tvrzením, že paprsek má více než jeden rozměr (kromě délky i průměr), a ten není zanedbatelný. S tímto dovětkem si již můžeme udělat představu, jak proces zakřivování probíhá. Můžeme

si představit paprsek jako předmět plující po hladině potoka (s ustáleným prouděním nejrychlejším uprostřed). Takový předmět se bude během unášení proudem neustále vlivem rozdílných rychlostí na obou koncích stáčet (viz obrázek 2.8). Tato paralela není zcela přesná neboť předmět na vodě se bude pouze otáčet a nebude se výrazně měnit směr jeho pohybu. U paprsku je tomu jinak. Ten se vlivem nezanedbatelných rozměrů bude nejen stáčet, ale bude se měnit i jeho směr, neboť se šíří vždy kolmo na vlnoplochu.



Obrázek 2.8

Předmět na hladině vody se vlivem rozdílných rychlostí neustále stáčí. Podobně se chová i světelný paprsek v prostředí s gradientem indexu lomu.

Nyní je jasné, proč se realizuje vždy pouze jedno řešení příslušející konkrétní počáteční podmínce. Z fyzikálního hlediska je zajímavé si uvědomit, že Snellův zákon je jen aproximace, která velice dobře funguje při řešení úloh na rovinném rozhraní dvou prostředí, ale máme-li problém se spojitě se měnícím indexem lomu, je třeba vycházet z obecnějšího tvrzení a tím je Fermatův princip nejkratšího času. Na závěr tedy můžeme říci, že rovnice 2.11, 2.14, 2.17b jsou ekvivalentní a vyloučením rovnice 2.17a přicházíme pouze o triviální řešení, které se v experimentu stejně nerealizuje.

2.3.6. Lineární změna indexu lomu

V kapitole 2.3.2 jsem diskutoval triviální řešení rovnice 2.11 (konstantní index lomu). To však není tak fyzikálně zajímavé. Zajímavější jsou další případy. Prvním z nich je situace, kdy se index lomu mění lineárně ($n = ay + b$). Pro tento případ je výhodnější dosazovat do rovnice 2.12 a upravit ji na tvar:

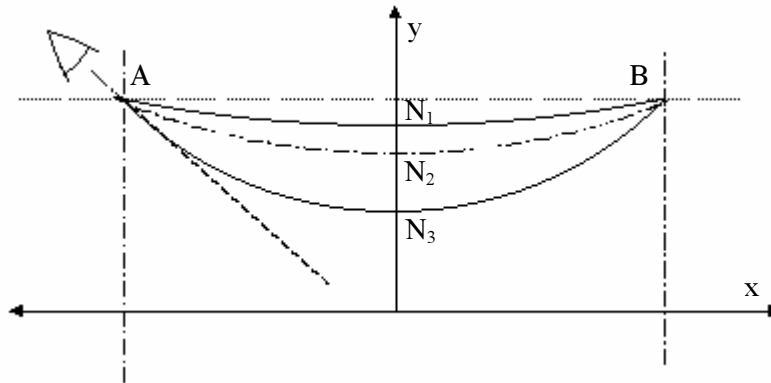
$$y'' = \frac{a^2}{N^2} y + \frac{ab}{N^2}. \quad (2.27)$$

Jedná se o nehomogenní rovnici a tak hledáme obecné a partikulární řešení. Při tomto postupu jsem již přímo ze Snellova zákona dostal jednu integrační konstantu $\frac{N}{a}$, a tak v řešení vystupuje jen jedna. Hledat řešení můžeme metodou parametru nebo odhadem řešení ve tvaru $y'(x) = \sinh(\varphi)$. Obě metody jsou dobře popsány např. v [1]. Řešení dostaneme ve tvaru:

$$y(x) = Ae^{\frac{ax}{N}} + Be^{-\frac{ax}{N}} - \frac{b}{a} = \frac{N}{a} \cosh\left(\frac{a}{N}(x+C)\right) - \frac{b}{a}, \quad (2.28)$$

kde konstanta C určuje x -ovou souřadnici bodu obratu paprsku (místo kde platí podmínka $y'=0$). Takovouto křivku nazýváme řetězovka (řetěz zavěšený na dvou koncích v homogenním gravitačním poli bude mít tvar této křivky).

Podle této rovnice již můžeme v prvním přiblížení počítat konkrétní příklady, například již zmiňovanou fatu morgánu nad silnicí. Předpokládejme, že se index lomu nad zahřátou silnicí mění lineárně (roste s rostoucí výškou). V takovém případě budou křivky možného pohybu paprsku dopadající do našeho oka (bod A) z bodu B vypadat jako na obrázku 2.9. Situace bude závislá na zahřátí silnice a tím na indexu lomu ve vrstvě, kde se paprsek pohybuje rovnoběžně s osou x (v našem případě na konstantě N).



Obrázek 2.9
Ohyb paprsků nad zahřátou silnicí či pouští

2.3.7. *Harmonický oscilátor*

Rád bych se ještě jednou vrátil k rovnici 2.17 a přeskupil ji tak, jak to udělal v práci [9] Martin Plöschner:

$$y'' - \frac{m'}{N^2} = 0 \Leftrightarrow N^2 \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d\left(\frac{n^2}{2}\right)}{dy} \quad (2.29)$$

Tuto rovnici můžeme porovnat s nám mnohem známějším tvarem:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{dV}{dx}. \quad (2.30)$$

Z mechanického porovnání tedy dostáváme analogii s pohybem hmotného bodu, jehož hmotnost je $m = N^2$, v potenciálním poli $V = -\frac{n^2}{2}$. Vzpomeneme-li si na nějaký jednoduchý potenciál, pro který rovnici 2.30 umíme řešit, pak snadno dostaneme index lomu, pro který rovnice 2.29 má exaktní řešení. Příkladem může být harmonický oscilátor. Potenciál má tvar: $V = \frac{1}{2}kx^2 - \frac{V_0}{2}$, kde $k > 0$ a konstanta V_0 neovlivní výsledný pohyb. Zavádíme ji proto, aby výsledný index lomu byl reálný. Jednoduchou úpravou dostaneme index lomu ve tvaru: $n = \sqrt{V_0 - kx^2}$, což je rovnice elipsy. Má-li index lomu právě tento tvar, je řešení rovnice 12 obzvláště snadné a výsledný pohyb paprsku popisuje funkce sinus nebo kosinus.

2.3.8. *Homogenní pole*

Na závěr této kapitoly ještě jeden příklad potenciálu. Bude-li mít potenciál V tvar $V = -gy$, což je tvar potenciálu homogenního pole, pak křivka, po které se šíří paprsek, bude parabola popsána rovnicí:

$$y = Ax^2 + Bx + C. \quad (2.31)$$

Tato rovnice je velmi „sympatická“ svou jednoduchostí a v další práci se s ní ještě setkáme. Velmi dobře se hodí k nejjednodušší aproximaci ohybu světelného paprsku, neboť z ní přímo vychází křivost K či poloměr křivosti R dráhy paprsku

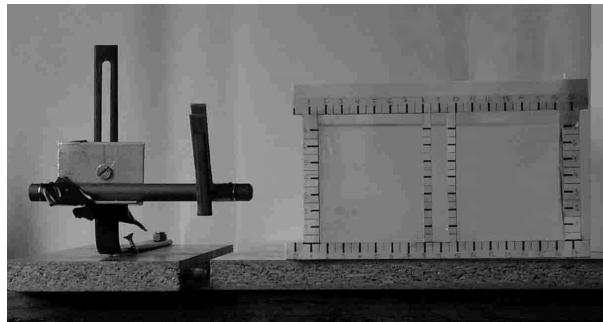
$$(K = \frac{1}{R} = y'' = 2A).$$

3 Experimentální část

3.1. Uspořádání experimentu

Úlohou prováděného experimentu je pozorovat ohyb paprsku v prostředí se spojitě se měnícím indexem lomu a tato pozorování porovnat s teoreticky předpovězenou dráhou. Vhodným prostředím pro takové pozorování je vodný roztok cukru nebo soli. Já se v dalším budu zabývat cukerným roztokem.

Nejdůležitější částí experimentálního zařízení je akvárium s roztokem cukru. Jako zdroj světla jsem použil rubínové laserové ukazovátko s výkonem menším než $1mW$ délkou světelné vlny $650nm$. Jako detekční zařízení sloužil digitální fotoaparát Nikon Coolpix 5000. Uspořádání experimentu je patrné z obrázku 3.1. Při pořizování fotografií jsem používal černé pozadí kvůli kontrastu. Na obrázku 3.1, aby bylo vidět celek, jsem použil pozadí světlé.



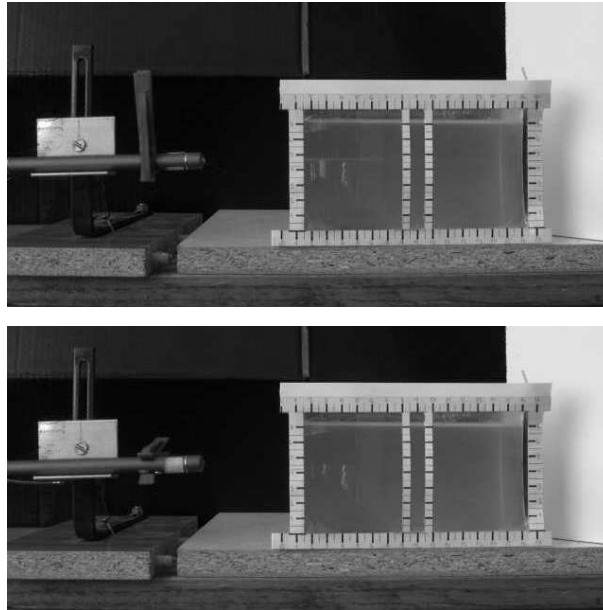
Obrázek 3.1

Obrázek ukazuje experimentální uspořádání

Laserové ukazovátko jsem umístil do stojanu s otočnou a posuvnou lavicí, aby se dal dobře nastavovat směr paprsku. Tím jsem zajistil, aby ukazovátko bylo lehce ovladatelné a přitom nemohlo dojít k nějakému nechtěnému pohybu během fotografování. Pro nastavování různých výšek laserového ukazovátka jsem používal buď posuvu ve stojanu, nebo jsem podkládal stojan planparalelními deskami různých šířek (to zvláště v případě, kdy jsem pořizoval fotografie paprsku rovnoběžného s rovinou stolu). Na aretaci spouštěcího tlačítka jsem využil prádelního kolíčku. Abych zabránil vzniku hrubých chyb při měření, používal jsem značky na akváriu a na zdi. Na akváriu jsem si označil rovinu rovnoběžnou s čelní

stěnou, aby paprsek byl vždy v přibližně stejné hloubce v akváriu a především aby byl na začátku a na konci své cesty akváriem stejně hluboko. Značky na zdi jsem používal pro kontrolu vodorovného nastavení ukazovátka.

K laserovému ukazovátku ještě jednu zajímavost; jeho světelný paprsek je zřejmě polarizovaný, neboť při otáčení kolem podélné osy je světelný vjem v detektoru před akváriem různě silný.



Obrázek 3.2

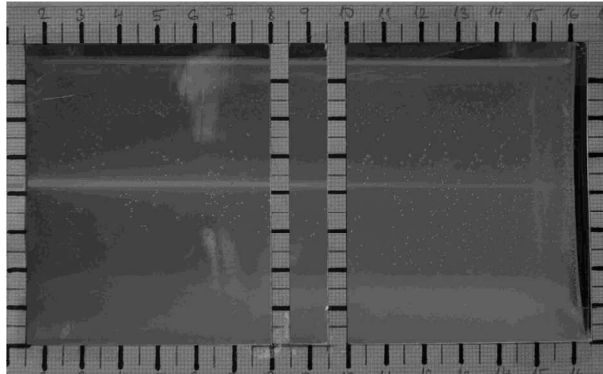
Z obrázků je patrná polarizace laserového paprsku (prádelní kolíček znázorňuje otočení polarizační roviny); na prvním snímku je paprsek dobře vidět z pozice před akváriem, na druhém by byl dobře vidět z pozice nad akváriem.

Nutnou součástí fotografování byl stativ, bez něj by to vůbec nešlo. Především proto, že expoziční doba fotografií byla od 1/8 do 1 sekundy v závislosti na denní době. Fotografie jsem pořizoval samozřejmě bez použití blesku.

Při přípravě experimentu jsem dále musel vzít v úvahu tyto faktory:

- a) je třeba zviditelnit paprsek,
- b) je zapotřebí zvolit správnou velikost akvária,
- c) pro dosažení výrazné změny indexu lomu je třeba zajistit, aby nedošlo k promíchání roztoku v akváriu.

ad a) Zviditelnit paprsek světla v průhledném prostředí se dá několika způsoby. Zajímavý způsob jsem viděl na hvězdárně při pokusech z vlnové optiky, kdy přednášející zvidetnil dráhu laserového paprsku tím, že ve vzduchu rozptýlil krupici.



Obrázek 3.3

Paprsek je vidět díky rozptylu na částicích disperzního lepidla.

Na drobných částicích krupice dochází k rozptylu světla a tím i ke zviditelnění pro pozorovatele z boku. Tato metoda by asi nebyla vhodná pro vodní prostředí, použil jsem tedy malé množství disperzního lepidla, které ve vodě působí stejně jako krupice ve vzduchu. Množství lepidla jsem určoval intuitivně metodou pokus omyl tak, aby dráha paprsku byla dobře viditelná a zároveň nedocházelo k příliš velkému rozptylu a tedy zeslabování záření. Koncentrace disperze je v řádu g/litr a neovlivní tedy příliš vlastnosti roztoku.

ad b) Zde se volba zdá být jasná. Čím větší akvárium tím, přesnější měření ohybu světelného paprsku. Problém je v tom, že čím je delší optická dráha paprsku, k tím většímu zeslabení světla dochází a paprsek ani neprojde na druhou stranu akvária. Já jsem volil ze dvou velikostí a nakonec zvolil akvárium menší, o rozměrech $14,5 \times 8 \times 6$ cm.

ad c) Jsou dvě možnosti jak zajistit spojitě se měnící index lomu v roztoku cukru. Jedna z nich je připravit si koncentrovaný roztok cukru a ten pomocí hadičky podlít pod vodu v akváriu. Tato metoda je vhodná v případě, když chceme rychle získat prostředí se změnou indexu.

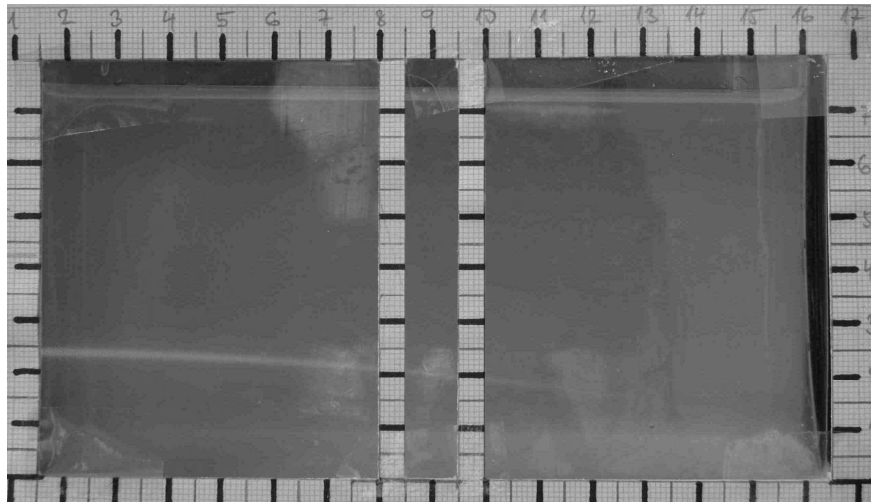
Já jsem však potřeboval zajistit co možná nejpřesněji tyto počáteční podmínky: $n(t=0) = \begin{matrix} N_0 : y=0 \\ N_1 : y>0 \end{matrix}$, aby se dal vytvořit matematický model.

Proto jsem zvolil jiný postup. Do připraveného akvária s vodou a disperzí jsem opatrně nasypal cukr. Snažil jsem se přitom vytvořit na dně akvária stejnoměrnou vrstvu tak, aby se index lomu měnil jen ve vertikálním směru. Tím se úloha stane mnohem jednodušší a bude odpovídat rovnicím odvozeným v druhé kapitole. Je vhodné zvolit cukr s velkými krystalky. Jen malá část cukru se rozpustí během nasypání do akvária. Navíc v takovém případě cukr vydrží na dně dostatečně dlouho a z počáteční podmínky se tak stane podmínka okrajová ($n(0, t) = N_0$).

V takto připraveném prostředí se cukr za krátkou dobu usadí a vše je připraveno k experimentování. Nastal čas $t=0s$. V důsledku difúze se cukr bude rozpouštět a přemísťovat do vyšších vrstev vody a postupně tak spojitě měnit index lomu.

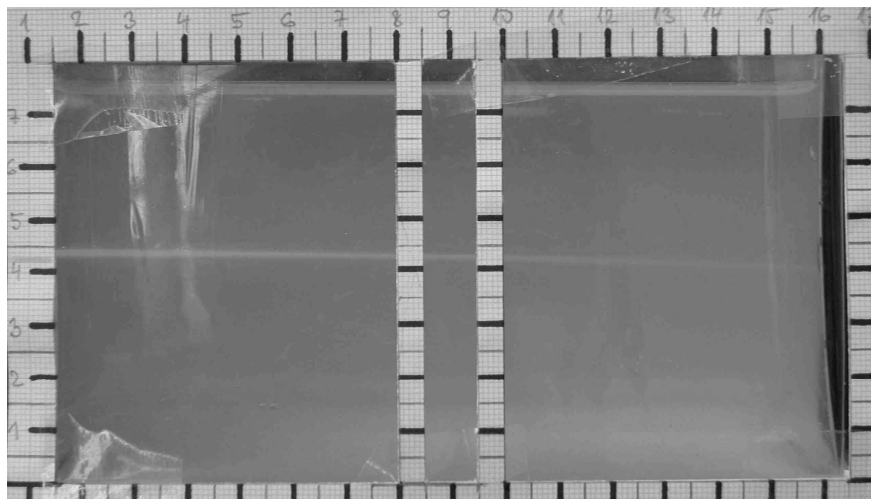
3.2. Vedení experimentu

V době od 25.3.2006 do 3.4.2006 jsem pozorně sledoval vývoj experimentu a pořizoval fotografie drah paprsků. Experimentovat jsem začal 25.3.2006 v 18:05 hodin, což je zmiňovaný čas $t=0s$) Při fotografování jsem použil čtyři základní nastavení laserového ukazovátka. Ve dvou různých výškách jsem světelný paprsek namířil rovnoběžně s povrchem kapaliny, čemuž odpovídají počáteční podmínky $y_1(0) = y_{1,0}$, $y_2(0) = y_{2,0}$ a zároveň $y_1'(0) = y_2'(0) = 0$ a sledoval ohnutí paprsku. Ve stejných výškách jsem poté nastavil laserové ukazovátka tak, aby na konci akvária byl paprsek ve stejné výšce jako na začátku ($y_1(0) = y_{1,0} = y_1(x = x_{\max})$). Při tomto nastavení lze snadno změřit průhyb paprsku $\Delta y_i(t)$. Pro každý čas jsem takto získal čtyři různé fotografie paprsku. Nastavení je patrné z obrázků 3.4 – 3.7.



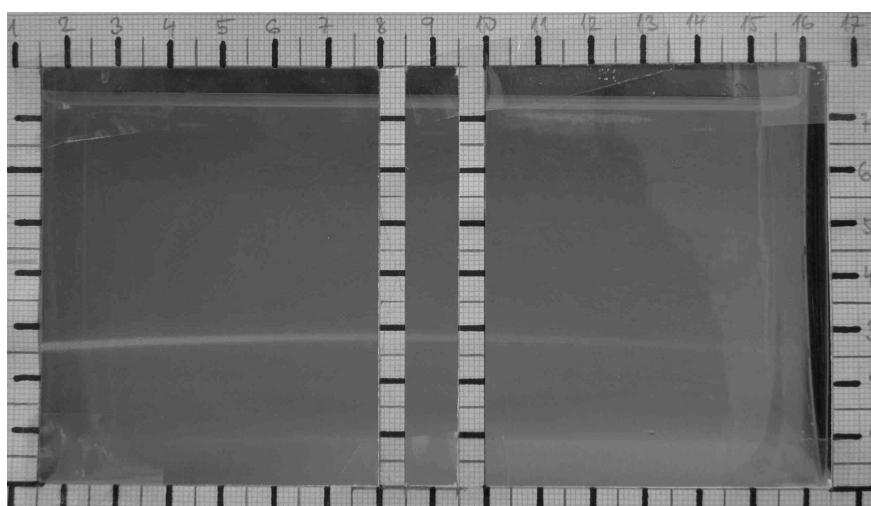
Obrázek 3.4

Paprsek typu A; ve výšce $y=2,5\text{cm}$ poslán rovnoběžně s osou x



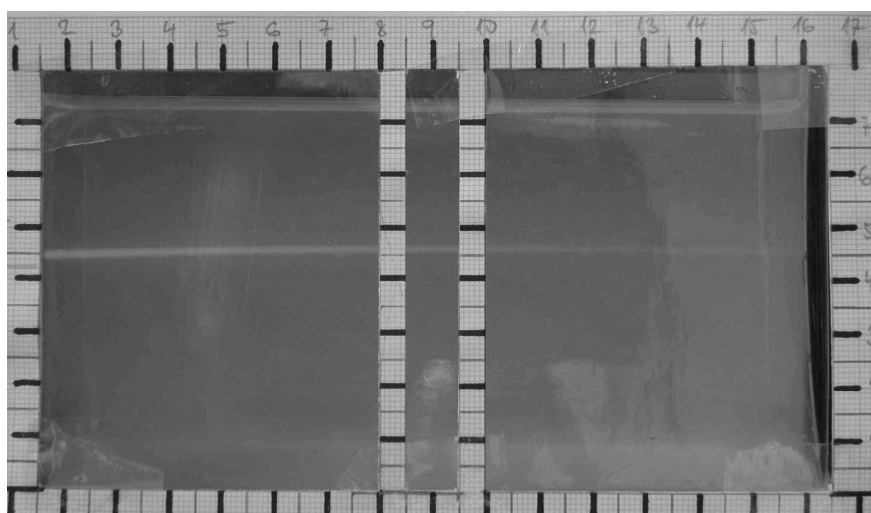
Obrázek 3.5

Paprsek typu B; ve výšce $y=4,4\text{cm}$ poslán rovnoběžně s osou x



Obrázek 3.6

Paprsek typu C; ve výšce $y=2,5\text{cm}$ poslán tak, aby na konci akvária byl ve stejné výšce



Obrázek 3.7

Paprsek typu C; ve výšce $y=4,4\text{cm}$ poslán tak, aby na konci akvária byl ve stejné výšce

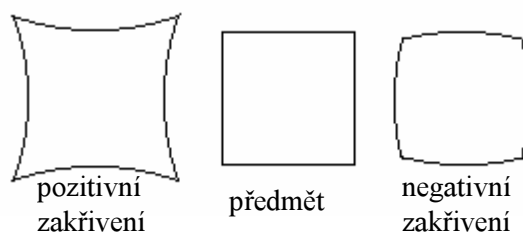
3.3. Vyhodnocení získaných dat

K dalšímu použití je potřeba křivky (paprsky) z fotografií převést do datové formy, dostat tedy pro každý paprsek množinu uspořádaných dvojic $\{[x_i, y_i]\}$. S takovými daty lze pak dále pracovat. Jak ale nejlépe tyto dvojice získat?

Jako velice efektivní se ukázalo obrázek zvětšit v nějakém prohlížeči (já osobně jsem používal freeware verzi Zoner media explorer 5) a kurzorem vybrat určitá místa na křivce. Prohlížeč jim přiřadí hodnoty v pixelech. Díky milimetrové mřížce na akváriu nebyl problém provést transformaci na centimetry. Při tomto zpracovávání dat se ukázalo, že objekty na fotografiích jsou deformované. To je vidět již z předešlých dvou obrázků.

3.3.1. Distorze

Během převádění křivek na data jsem usoudil, že se jedná o soudkovité zkreslení obrazu. Přesně se vlastně jedná o distorzi, neboli zkreslení obrazu díky zvětšení, které není konstantní pro celý obrázek. Distorze může být negativní nebo pozitivní (viz obrázek 3.8), přičemž negativní distorze je známa pod termínem soudkovité zkreslení obrazu. Pokusil jsem se deformaci způsobenou tímto zkreslením zmírnit korekcí.



Obrázek 3.8
Zakřivení obrazu na optické soustavě v důsledku zvětšení.

Zkreslení z ve směru osy x je v kvadratické aproximaci dáno rovnicí:

$$z = \frac{dx}{d\xi} = A + B\xi^2, \quad (3.1)$$

kde x je zkreslená souřadnice a ξ je souřadnice správná. Odtud integrací dostaneme:

$$x = A\xi + \frac{B}{3}\xi^3. \quad (3.2)$$

Obecně lze tuto transformaci zapsat ve tvaru:

$$\vec{r}(x, y, z) = A\vec{R}(\xi, \eta, \zeta) + \frac{B}{3}R^2\vec{R}(\xi, \eta, \zeta). \quad (3.3)$$

Ve dvou rozměrech tedy máme dvě rovnice korekce:

$$x = \xi \left(A + \frac{B}{3}R^2 \right) \text{ a } y = \eta \left(A + \frac{B}{3}R^2 \right). \quad (3.4)$$

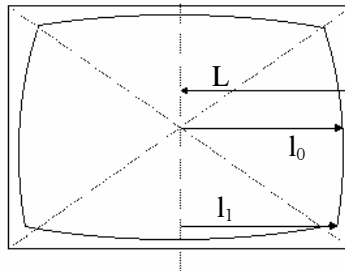
Konstanty A a B snadno určíme z měření. Při použití označení jako na obrázku 3.9 dostaneme:

$$l_0 = L \left(A + \frac{B}{3}R^2 \right) \text{ a } l_1 = L \left(A + \frac{2B}{3}R^2 \right). \quad (3.5)$$

Odtud po několika úpravách již pro A a B dostaneme:

$$A = \frac{2l_0 - l_1}{L} \quad B = -3 \frac{l_0 - l_1}{L^3}. \quad (3.6)$$

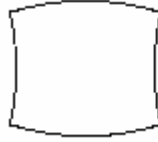
Vzápětí jsem se snažil tuto teorii použít při korekcích. Ukázalo se, že jsem situaci špatně odhadl. Fotografie jsou v každém směru deformované trochu jinak a navíc ne všechny stejně.



Obrázek 3.9

Obrázek ukazuje označení proměnných v rovnici 3.6.

Chyba vzniklá při fotografování nebyla pouze chybou optické soustavy fotoaparátu, jak jsem se zprvu domníval. Při fotografování se mi nepovedlo zcela přesně nastavit fotoaparát tak, aby osa objektivu fotoaparátu byla kolmo na stěnu akvária. I velice malá chyba v úhlovém nastavení způsobuje zkreslení obrazu. Rozhodl jsem se tedy data zpracovávat jinou metodou.



Obrázek 3.10

Takto přibližně vypadá zkreslený obraz na fotografiích.

Na každé fotografii jsem v několika bodech změřil vzdálenost spodního a horního konce akvária a určil z těchto měření průměrnou hodnotu a směrodatnou odchylku vzdálenosti připadající na jeden pixel. Poté již nebyl problém každou množinu bodů křivky převést do metrických souřadnic.

Na následující straně uvádím vzorovou tabulku pro zpracování dat a obrázek, který znázorňuje vztah mezi vzorem (fotografií) a datovou strukturou (množinou bodů).

V příloze jsou uvedeny čtyři grafy znázorňující časový vývoj chodu paprsků typu A, B, C a D a dále graf 5 ukazující všechny čtyři sledované paprsky v jednom čase.

Nyní jsou data připravena pro další zpracování a v následující kapitole se pokusím numerickými metodami modelovat chod paprsku a porovnat se získanými daty.

fotografie	030414401.jpg
hodina	03.04. 14:40
čas [den]	8,86 dne

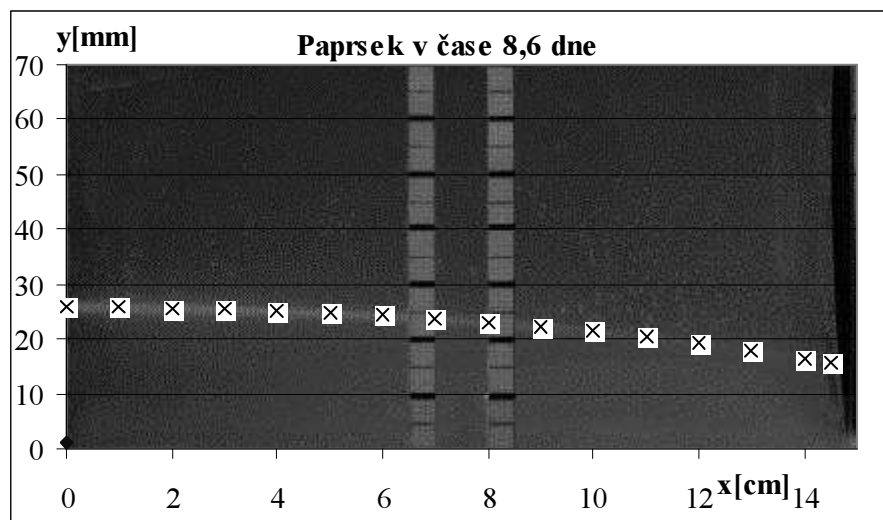
body na ose x	[pixel]
[0;0]	1834
[7,5;0]	1847
[15;0]	1851

body na horním okraji	
[0;6,6]	820
[7,5;6,6]	820
[15;6,6]	818

vzdálenost v pixelech	
	1014
	1027
	1033

X	Y_8,86	Y_8,86
	[pixel]	[mm]
0,0	1464	24,5
1,0	1466	24,3
2,0	1471	24,0
3,0	1478	23,6
4,0	1486	23,1
5,0	1496	22,4
6,0	1507	21,7
7,0	1523	20,7
8,0	1537	19,8
9,0	1556	18,6
10,0	1576	17,3
11,0	1602	15,6
12,0	1624	14,2
13,0	1654	12,2
14,0	1698	9,4
14,5	1734	7,1

poloha osy x	1844	pix
průměrná vzdálenost horního okraje	1025	pix
směr.odch.=	8	pix
relativní chyba r=	0,77%	
1pixel=	0,0644	mm
směrodatná odchylna	0,51	mm



Obrázek 3.11

Ukázka zpracování dat v tabulce a odpovídající fotografie na pozadí grafu.

4 Matematická modelace

4.1. Difúze

Až doposud jsem hledal rovnici, která popisuje pohyb paprsku v prostředí se spojitě se měnícím indexem lomu. Tu jsem našel v kapitole 2. Dále jsem našel několik rozložení indexu lomu, pro která má rovnice 2.11 exaktní řešení. Jak ale vypadá rozložení indexu lomu opravdu? Jak vlastně index lomu souvisí s koncentrací roztoku cukru? Jak se mění koncentrace roztoku v závislosti na vertikální souřadnici a na čase? Na tyto otázky se pokusí odpovědět tato kapitola. Začneme poslední otázkou.

4.1.1. Odvození difúzní rovnice

Experimentální část začala nasypáním cukru do akvária s vodou. V té chvíli se však v soustavě silně uplatňují jevy na hranici makrosvěta a mikrosvěta. O jejich kvantitativní posouzení se zasloužil A. Einstein ve svém článku o Brownově pohybu otištěném 18. června 1905 v 8. čísle 17. svazku časopisu *Annalen der Physik* [16].

Na částici (cukru) působí tíhová síla směrem dolů a Archimédova vztlaková síla směrem vzhůru. Vzhledem k tomu, že hustota cukru je větší než hustota vody, má výsledná síla směr dolů. Pro tuto sílu Einstein odvodil rovnici:

$$-Fu + kT \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad (4.1)$$

kde k je Boltzmanova konstanta, T je termodynamická teplota soustavy, u je objemová koncentrace částic. Vyjádříme-li z rovnice 4.1 sílu dostaneme:

$$F = kT \frac{u'}{u}. \quad (4.2)$$

Částice se vlivem této síly bude pohybovat směrem dolů rychlostí v . Podle Stokesese je rychlost částice směrem dolů přímo úměrná působící síle a nepřímo úměrná poloměru částice r a koeficientu viskozity η

$$v = -\frac{F}{6\pi\eta}. \quad (4.3)$$

V systému se prakticky okamžitě ustaví rovnováha mezi silou směrem dolů a odporovou silou prostředí. Vyloučením síly dostaneme pro rychlost částice:

$$v = -\frac{kT}{6\pi\eta} \cdot \frac{u'}{u} \quad (4.4)$$

Zákon zachování hmotnosti bude mít tvar (rovnice kontinuity):

$$\operatorname{div}(uv) = -\frac{\partial u}{\partial t} \quad (4.5)$$

Dosazením výrazu pro rychlost (4.3) do rovnice kontinuity (4.4) a úpravou dostaneme:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \cdot \frac{kT}{6\pi\eta} = \frac{\partial u}{\partial t}. \quad (4.6)$$

Označíme-li :

$$D = \frac{kT}{6\pi\eta} = \mu kT, \quad (4.7)$$

kde D nazýváme difúzní koeficient a μ pohyblivost částic, dostaneme známý tvar difúzní rovnice:

$$D \frac{\partial^2 u(y,t)}{\partial y^2} = \frac{\partial u(y,t)}{\partial t}, \quad (4.8)$$

nebo zjednodušeným zápisem

$$Du_{yy} = u_t \quad (4.9)$$

Jedná se o parabolickou rovnici, často označovanou za rovnici vedení tepla. Při jejím odvozování jsem vycházel z [13] a [16].

4.1.2. Řešení difúzní rovnice

Úkolem tedy je najít řešení Cauchyova problému v jednorozměrném případě. Má-li difúzní rovnice tvar 4, pak se jedná o homogenní rovnici, což fyzikálně znamená, že v roztoku není žádný zdroj koncentrace, neboli, že

nedosypáváme cukr. Okrajové podmínky budou mít, v návaznosti na experiment, tvar:

$$u(0,t) = U_0, \quad u(\infty,0) = 0 \quad (4.10)$$

dokud na dně nádoby zůstává nerozpuštěný cukr. V tomto případě představuje U_0 koncentraci nasyceného roztoku cukru ve vodě za dané teploty (V tomto místě jsem si dovolil situaci zjednodušit. Je zřejmé, že cukr se postupně rozpouští a tak se mění okrajová podmínka. Didúzní rovnici s okrajovou podmínkou závislou na čase však nejsem schopen v současné době řešit a navíc se domnívám, že to pro účely této práce není nezbytně nutné).

Řešení této rovnice dostaneme pomocí Laplaceovy transformace. Označme $U(p,y)$ Laplaceův obraz řešení rovnice 1:

$$U(p,y) = \int_0^{\infty} u(y,t) e^{-pt} dt, \quad \text{kde pro } p \text{ platí } \operatorname{Re}(p) > 0. \quad (4.11)$$

Rovnici 2 vynásobíme faktorem e^{-pt} a integrujeme od 0 do $+\infty$:

$$\int_0^{\infty} \frac{\partial u}{\partial t}(y,t) e^{-pt} dt = \left[u(y,t) e^{-pt} \right]_0^{\infty} + p \int_0^{\infty} u(y,t) e^{-pt} dt = pU(y,p). \quad (4.12)$$

Užitím Laplaceovy transformace tak dostáváme obyčejnou diferenciální rovnici:

$$\frac{d^2 U}{dy^2} - \frac{1}{\sqrt{D}} pU = 0 \quad (4.13)$$

Řešením této rovnice, užitím tabulky transformací a použitím okrajových podmínek dostaneme pro koncentraci:

$$u(y,t) = U_0 \left(1 - \operatorname{erfc} \left(\frac{y}{2\sqrt{Dt}} \right) \right). \quad (4.14)$$

Řešení difúzní rovnice je možné najít např. v [5]. Pro úplné vyřešení rozložení koncentrace je třeba stanovit konstanty D a U_0 .

Jejich stanovení není zcela jednoznačné. Například v tabulkách [11] jsem našel pro koncentraci nasyceného roztoku cukru ve vodě hodnotu $U_0 = 70\%$, a pro difúzní koeficient hodnotu $D = 0,4 \text{ cm}^2 \text{den}^{-1}$. Podle zdroje [12] je však koncentrace $U_0 = 85\%$. Vzhledem k tomu, že zdroj [12] uvádí i vztah koncentrace s indexem

lomu rozhodl jsem se čerpat z něj. Rozložení koncentrace pro několik konkrétních časů je vidět v grafu 6.

Zdroj [12] neuvádí exaktní vztah mezi koncentrací cukerného roztoku a indexem lomu. Převzal jsem z něj množinu hodnot indexu lomu pro řadu koncentrací $\{[u_i, n_i]\}$ a zapsal do tabulky 2.

u	0,00	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30
n	1,33299	1,34026	1,34783	1,35568	1,36384	1,37233	1,38115
u	0,35	0,40	0,45	0,50	0,55	0,60	0,65
n	1,39032	1,39986	1,40978	1,42009	1,43080	1,44193	1,45348
u	0,70	0,75	0,80	0,85			
n	1,46546	1,47787	1,49071	1,50398			

Tabulka 2

Tabulka hodnot indexu lomu v závislosti na koncentraci cukerného roztoku

Pro další výpočty je však třeba dostat funkci $n=n(u)$, respektive $n=n(y)$. Proložil jsem tedy touto řadou bodů kvadratickou funkci ($n=au^2+bu+c$). K určení parametrů a , b , c jsem použil metodu nejmenších čtverců. Ta spočívá v minimalizaci výrazu:

$$\sum_{i=1}^N [y_i - f(x_{i1}, \dots, x_{ir})]^2 . \quad (4.15)$$

Výsledky kvadratické regrese a hodnoty parametrů a , b , c jsou zakresleny v grafu 7. Nyní tedy mohu napsat pro index lomu v závislosti na čase a vertikální souřadnici y :

$$n(y, t) = au^2(y, t) + bu(y, t) + c$$

dosazením řešení difúzní rovnice za koncentraci dostaneme:

$$n = aU_0^2 \left(1 - \operatorname{erfc} \left(\frac{y}{2\sqrt{Dt}} \right) \right)^2 + bU_0 \left(1 - \operatorname{erfc} \left(\frac{y}{2\sqrt{Dt}} \right) \right) + c , \quad (4.16)$$

umocněním, jednoduchou úpravou a novým označení konstant dostaneme:

$$n = A \left(\operatorname{erfc} \left(\frac{y}{2\sqrt{Dt}} \right) \right)^2 + B \left(\operatorname{erfc} \left(\frac{y}{2\sqrt{Dt}} \right) \right) + C . \quad (4.17)$$

Následným dosazením všech známých konstant dostaneme index lomu závislý již jen na y , přičemž t zde vystupuje jako parametr:

$$n \doteq 0,0549 \cdot \left(\operatorname{erfc} \left(0,7906 \frac{y}{\sqrt{t}} \right) \right)^2 + 0,2251 \cdot \operatorname{erfc} \left(0,7906 \frac{y}{\sqrt{t}} \right) + 1,5036. \quad (4.18)$$

V grafu 8 si můžeme prohlédnout jak závislost indexu lomu vypadá graficky.

Pro další výpočty bude třeba určit derivaci n ; s přihlédnutím k tomu, že:

$$(\operatorname{erfc}(x))' = -2 \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}} \quad (4.19)$$

dostaneme:

$$\frac{\partial n}{\partial y} = n' = \frac{-2A \left(\operatorname{erfc} \left(\frac{y}{2\sqrt{Dt}} \right) \right)^2 e^{\left(-\frac{y^2}{4Dt} \right)} - Be^{\left(-\frac{y^2}{4Dt} \right)}}{\sqrt{\pi} \sqrt{Dt}} \quad (4.20)$$

a opět po dosazení konstant dostaneme:

$$n' \doteq 0,1736 \cdot \frac{\operatorname{erfc} \left(0,7906 \frac{y}{\sqrt{t}} \right) \cdot e^{-0,625 \frac{y^2}{t}}}{\sqrt{\pi} \sqrt{t}} - 0,3560 \cdot \frac{e^{-0,625 \frac{y^2}{t}}}{\sqrt{\pi} \sqrt{t}} \quad (4.21)$$

Nyní máme vše připraveno na vytvoření numerického modelu znázorňujícího pohyb paprsku v prostředí se spojitou změnou indexu lomu.

4.1.3. Numerický model

Na úvod zde připomenou rovnici 2.11:

$$y'' = \frac{n'}{n} (1 + (y')^2)$$

Pro tuto rovnici jsem našel několik exaktních řešení pro různá rozložení indexu lomu. Pouhý letmý pohled na výrazy 4.18 a 4.21 mě odradil od hledání exaktního řešení pro takto se měnící index lomu. Rozhodl jsem se tedy řešit rovnici numericky a to v programu *Maple V*. Pro řešení rovnice 1 jsem zvolil metodu Runge-Kuttova typu, přesněji Fehlbergovu 4-5 metodu (více o metodách Runge-Kuttova typu lze najít v [17]). Pro výpočet bylo třeba rovnici vhodnou substitucí převést na dvě rovnice prvního řádu. Označme tedy:

$$v = y', \quad v' = \frac{n'}{n}(1 + v^2) \quad (4.22)$$

Pro takto sestavené rovnice s počátečními podmínkami:

$$y(0, t) = Y_0, \quad v(0, t) = 0 \quad (4.23)$$

nebyl problém nalézt řešení. Takto matematicky určené dráhy paprsků pro některé vybrané časy společně s daty získanými z fotografií jsou zakresleny v grafech 9 a 11.

Větším problémem se ukázalo řešit soustavu 4.22 společně s druhou sadou počátečních podmínek:

$$y(0, t) = Y_0, \quad y(y_{\max}, t) = Y_0. \quad (4.24)$$

Tyto podmínky představují paprsek, který je na začátku a na konci akvária stejně vysoko, tedy umožňují měřit přímo prohnutí paprsku, přesněji křivost nebo poloměr křivosti. Problém je v tom, že výpočetní procedura potřebuje počáteční podmínku opravdu na počátku. Bylo nutné odhadnout tedy derivaci y a tu iterační metodou zpřesňovat až do zvolené odchylky. K tomuto účelu jsem využil cyklus *for –while*. Výsledky řešení spolu s naměřenými hodnotami jsou znázorněny v grafech 10 a 12. Všechna řešení ukazují funkci y -ové souřadnice paprsku v závislosti na čase a na x -ové souřadnici. Jediným parametrem vstupujícím do funkční závislosti je difúzní koeficient D . A tak se nabízí otázka, zda by úloha nešla obrátit a určovat ze známé trajektorie paprsku právě difúzní koeficient.

K výpočtu difúzního koeficientu stačí vložit do programu ještě jeden cyklus. V něm jsem iteroval difúzní koeficient tak, aby odchylka naměřených dat od vypočtené křivky byla pod nastavenou hodnotou. I v nejjednodušším případě, kdy považují difúzní koeficient za konstantní v celém prostoru pro konkrétní čas, je tedy jen funkcí času, je výpočet dosti složitý a trvá i několik minut. Výsledkem jsou hodnoty difúzního koeficientu pro každou fotografii. Pro každý čas dostanu až čtyři koeficienty. Já osobně jsem určoval difúzní koeficienty pro fotografie typu C, a D. Jejich hodnoty jsem vynesl do grafu 15. Takto proložené křivky s naměřenými daty ukazují grafy 13 a 14.

4.1.4. *Křivost, poloměr křivosti*

Na celou věc je možné nahlížet i z jiného úhlu pohledu. Můžeme sledovat jak se mění prohnutí paprsku v čase. Vhodná veličina pro popis prohnutí paprsku je křivost K , respektive poloměr křivosti R . Je-li křivka popsána rovnicí $y=y(x)$, pak pro tyto veličiny v místě, kde $y'=0$, platí (to je vidět z rovnice 2.11):

$$K = \frac{1}{R} = |y''| = \frac{\left| \frac{\partial n}{\partial y} \right|}{n} = \left| \frac{n'}{n} \right| \quad (4.25)$$

Toto je ovšem diferenciální rovnice prvního řádu. Po jejím vyřešení bychom dostali křivost jako funkci souřadnic a tu bychom pak mohli porovnat s experimentem. Takto jsem však nepostupoval. Vzhledem k tomu, že prohnutí paprsku je relativně malé vzhledem k délce trajektorie, je možné použít jednodušší metodu. Uvažoval jsem tvar trajektorie daný rovnicí 2.31. Z rovnice 2.31 pro křivost rychle plyne již zmiňovaný vztah:

$$K = y'' = 2A. \quad (4.26)$$

Pro ilustraci jsem hodnoty křivosti pro paprsky z fotografií typu A a C vynesl do grafu 16.

5 Závěr

V přírodě velmi často, vedle skokových změn, dochází ke spojitým změnám vlastností optických prostředí. Ve své práci jsem se zabýval šířením světla právě v takovém prostředí, kde zmiňovanou vlastností je index lomu. V rámci této práce jsem navázal na znalosti popisu skokových změn získané v základním kurzu optiky a dále je prohloubil. Problematika spojité změny však pro mě byla nová. Pochopení chování světla v takovémto prostředí si vyžádalo zbavit se některých předsudků o šíření světla a přijmout nový model popisu fyzikální reality.

V první části své práce jsem se snažil právě o pochopení popisu chodu světla. Odvodil jsem rovnice popisující trajektorii světelného paprsku a našel některá řešení. Ukázalo se, že zdánlivě nepodstatný rozdíl ve fyzikálním modelu (geometrická optika versus vlnová optika, respektive Snellův zákon versus Fermatův princip) může vést k velmi odlišnému chování paprsku.

V experimentální části jsem vytvořil prostředí se spojitou změnou indexu lomu. Využil jsem k tvorbě takového prostředí difúze cukru v kapalině. Při zpracování naměřených dat jsem narazil na problematiku zkreslení a deformace obrazu na optické soustavě.

Následně jsem interpretoval získaná data. Porovnával jsem je s daty získanými z matematického modelu. Ukázalo se, že v reálném případě nastal menší ohyb paprsků, než vychází z řešení rovnice matematického modelu. Na této odchylce se podílí jistě více faktorů. Jedním z nejdůležitějších je koeficient difúze. Ten zřejmě nebude konstantní jak jsem předpokládal, ale bude funkcí koncentrace. Z tohoto důvodu jsem určil efektivní hodnoty difúzního koeficientu pro jednotlivá měření. Tyto hodnoty však nelze interpretovat jako funkční závislost difúzního koeficientu na čase. Spíše se jedná o jakousi fiktivní konstantní hodnotu difúzního koeficientu, pro kterou bude předpovězená trajektorie paprsku (v daném čase) v nejlepší shodě s naměřenou křivkou. Pomocí těchto dat si lze ale vytvořit kvalitativní představu o procesu difúze v kapalině. Difúzní koeficient je větší (oproti tabelované hodnotě) na počátku experimentu, kdy v celém objemu kapaliny

je jen malá koncentrace cukru, a difundující molekula má „volnou dráhu“. Koeficient difúze se však zmenšuje s rostoucím časem, neboť v celém objemu kapaliny roste koncentrace a tedy hustota a jistě se zmenšuje volná dráha molekuly cukru. Takto lze vysvětlit i menší zakřivení paprsků oproti modelu s konstantním difúzním koeficientem.

Vliv na přesnost modelu mají i další fakta.

Domnívám se, že důležitým faktorem je stanovení počátku souřadnic při zpracování experimentu. Vlivem difúze se neustále zmenšuje množství cukru na dně akvária. Tím se posouvá hladina s koncentrací odpovídající nasycenému roztoku pomalu dolů (proti směru y-ové osy). Tento posuv není jistě zcela zanedbatelný. Já osobně jsem tento fakt při řešení nezohlednil a dopustil se tak při zpracování měření určité chyby.

A do třetice difúze. Při řešení difúzní rovnice vystupuje počáteční podmínka, která počítá s polonekonečným prostředím. Toto jistě není splněno. Zde ovšem zanedbání konečných rozměrů akvária není takovým problémem, neboť doba experimentování byla krátká a koncentrace u hladiny se podstatně nezměnila. To je vidět z grafů závislosti koncentrace na čase.

Je vidět, že otázka šíření světla v prostředí se spojitou změnou indexu lomu je velmi zajímavá a stále aktuální. Faktorů, které ovlivňují chování světla, je velmi mnoho. Jistě by stálo za námahu pokusit se najít závislost difúzního koeficientu na koncentraci, řešit kvantitativně šíření světla ve vzduchu nad zahřátou silnicí nebo nad chladnou vodou. To bych však nechal jako námět pro jiné práce.

Seznam použité literatury

- [1] M. Brdička, A. Hladík, Teoretická mechanika, Academia, Praha 1987
- [2] J. Bednář, Pozoruhodné jevy v atmosféře, Academia Praha 1989
- [3] P. N. Tverskoj, Optické, elektrické a akustické jevy v atmosféře, Naše vojsko, Praha 1953
- [4] R. P. Feynman, Feynmanovy přednášky z fyziky s řešenými příklady 1³, Fragment 2000
- [5] RNDr. K Rektorys, Přehled užití matematiky I a II, Prometheus, Praha 1995
- [6] E. Mechlová, K. Košťál a kol., Výkladový slovník fyziky pro základní vysokoškolský kurz fyziky, Prometheus, Praha 2001
- [7] E. Svoboda a kol., Přehled středoškolské fyziky, Prometheus, Praha 1998
- [8] H. Tributsch, Záhadná fata morgána, Naše vojsko, Praha 1998
- [9] M. Plöschner, Světlo v prostředí se spojitě proměnným indexem lomu, zpracováno pro přednášku „Zajímavá teoretická fyzika“, Brno 2006
- [10] J. Hosnedl, Zajímavé příklady z atmosférické optiky doplněné pokusy, Diplomová práce, Pedagogická fakulta Univerzity v Plzni, 1999, staženo z <http://www.pef.czu.cz/pef/kof/diplomky/hosnedl.htm>
- [11] J. Brož, V. Roskovec, M. Valouch, Fyzikální a matematické tabulky, SNTL, Praha 1980
- [12] <http://www.reichertai.com/files/applications/1039637372.PDF>.
- [13] Z. Horák, F. Krupka, Fyzika, Příručka pro vysoké školy technického směru, SNTL Praha, 1981
- [14] V. Mádr, J. Knejzlík, J. Kopečný, I. Novotný, Fyzikální měření, SNTL, Praha 1991
- [15] J. Serna, G. Piquero, Measurement of graded-index media using digitized of light path, European journal of physics 23 (2002) 465-468, staženo z www.stacks.iop.org/EJP/23/465

- [16] Petr Chvosta, Průvodce publikací Alberta Einsteina o Brownově pohybu z roku 1905, Československý časopis pro fyziku 6/2005, staženo z <http://www.cscasfyz.fzu.cz/2005/06/625.html>
- [17] J. Celý, Řešení fyzikálních úloh na mikropočítačích, Př. fakulta MU, Brno 1990
- [18] Vojtěch Sedláček, Podivné vidění, 1. ročník časopisu Společnosti vlasteneckého muzea v Čechách, 1827, převzato z <http://www.prikosice.globalweb.cz/historie.htm>

Příloha – grafy funkcí