

MASARYKOVA UNIVERZITA  
Přírodovědecká fakulta  
Ústav teoretické fyziky a astrofyziky



**BAKALÁŘSKÁ PRÁCE**  
**Kmity pružných membrán**

Pavel Kočí

Vedoucí bakalářské práce: doc. Mgr. Tomáš Tyc, Ph.D.

2009

Chtěl bych velice poděkovat panu doc. Mgr. Tomáši Tycovi, Ph.D. za vedení bakalářské práce, za neskonalou ochotu pomoci s jakýmkoliv problémem a v neposlední řadě za rozšíření fyzikálních obzorů. Panu Mgr. Jiřímu Bartošovi, Ph.D. za pomoc při návrhu experimentu a také za pomoc při výrobě pomůcek k němu potřebných. Panu Bc. Martinu Šarbortovi za velmi obohacující konzultace o fázových singularitách, dále mým spolužákům, slečně Lence Herzánové a panu Petru Zikánovi, za pomoc jak při experimentu, tak teoretických nesnázích. Panu Jaroslavu Vážnému děkuji za seznámení s programem GNU Octave, pracovníkům Agrodružstva Miroslav, dále panu Ing. Vladimíru Vančurovi a panu Jiřímu Uhříkovi za pomoc technického rázu. Nesmím také zapomenout na Mgr. Pavlu Švástovou, která mi nesmírně pomohla při samotném experimentu.

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci napsal samostatně výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce a jejím zveřejňováním.

V Brně dne

Pavel Kočí

Abstrakt:

Vzhledem k analogickému chování mezi pružnou membránou a vodní hladinou se zabýváme povrchovými vlnami na vodě. Zejména se zaměřujeme na zajímavý jev vznikající při interferenci vln, fázovou singularitu. Studujeme fázové singularity pomocí tří válcových vln a pokoušíme se je najít pomocí odrazu laserového paprsku na vodní hladině. Následně porovnáváme naměřené výsledky s vypočtenými. V poslední kapitole ukazujeme, že Maxwellovo rybí oko pro vlny na vodě nelze experimentálně sestavit.

Klíčová slova: vlny na vodní hladině, fázové singularity, odraz laserového paprsku, Maxwellovo rybí oko

Abstract:

Analogy between vibrating membrane and water surface lead to study surface water waves. We are focused on an interesting point of wave interference - phase singularity. Three cylindrical water waves generate phase singularities. We try to find them using reflection of laser ray on water surface. We compare an experimental result with theoretical. In the third chapter we show, that an experimental realization of Maxwell fish-eye for water waves is not possible.

Keywords: water waves, phase singularities, reflection of laser ray, Maxwell fish-eye

# Obsah

<b>1 Úvod</b>	<b>5</b>
<b>2 Povrchové vlny v kapalině</b>	<b>6</b>
2.1 Rozdělení povrchových vln . . . . .	6
2.2 Gravitační vlny . . . . .	6
2.3 Kapilární vlny . . . . .	9
2.4 Současné působení zemské tíže a povrchového napětí . . . . .	11
<b>3 Fázové singularity</b>	<b>12</b>
3.1 Co je to fázová singularita . . . . .	12
3.2 Popis a vlastnosti fázových singularit . . . . .	12
3.3 Válcové vlny na vodní hladině . . . . .	17
3.4 Odraz laserového paprsku od vodní hladiny . . . . .	18
3.5 Experiment . . . . .	19
3.6 Experimentální aparatura a měření její geometrie . . . . .	19
3.7 Výsledky měření . . . . .	21
3.8 Diskuze o výsledcích měření . . . . .	22
<b>4 Maxwellovo rybí oko</b>	<b>36</b>
4.1 Co je to Maxwellovo rybí oko . . . . .	36
4.2 Vlastnosti Maxwellova rybího oka . . . . .	36
4.3 Maxwellovo rybí oko pro vlny na vodě . . . . .	38
<b>5 Závěr</b>	<b>41</b>
<b>6 Dodatky</b>	<b>42</b>
6.1 Besselovy funkce . . . . .	42
6.2 Skripty . . . . .	43
<b>Literatura</b>	<b>46</b>

# Kapitola 1

## Úvod

Chování vodní hladiny lze v jistém smyslu chápat jako analogii k chování rovnoměrně napjaté pružné membrány. Proto jsme se zabývali tím, co se stane s vodní hladinou, pokud ji budeme periodicky vychylovat. Tímto způsobem pak vzniknou vlny na vodě. Ačkoli popis takto vzniklých vln není zcela jednoduchý a v obecném případě se nejedná o vlny lineární, lze je, pokud je vlnová délka o hodně větší než amplituda, považovat za lineární. Pak při skládání vln můžeme použít princip superpozice. Naším hlavním úkolem bylo studovat fázové singularity vznikající při interferenci tří válcových vln.

Fázové singularities jsou zajímavým fyzikálním výsledkem interference tří a více vln. Lze jimi popsat nejrůznější jevy, např. v optice, akustice, kvantové mechanice. My jsme se snažili nejprve fázové singularities na vodní hladině nalézt teoreticky a potom teoretické výsledky porovnat s experimentem.

Dalším našim úkolem bylo pokusit se nalézt Maxwellovo rybí oko pro vlny na vodě pomocí toho, že fázová rychlost vln závisí na hloubce dna. Pro takové uspořádání bychom v určitém místě vodní hladiny, které je obrazem zdroje válcových vln, pozorovali velkou výchylku.

# Kapitola 2

## Povrchové vlny v kapalině

### 2.1 Rozdělení povrchových vln

V druhé kapitole se budeme zabývat povrchovými vlnami (proč je můžeme nazvat povrchovými, si ukážeme později), které se vytvoří v kapalině (v našem případě budeme závěry aplikovat na případ vodní hladiny). Jak víme, vlnění má dva základní aspekty, jednak je to vychýlení systému z rovnovážného stavu (typické jsou například poryvy větru, dopad předmětu na hladinu, zemětřesení, které může způsobit vlny tsunami), dalším je charakter, jakým je systém nucen se vrátit do rovnovážné polohy, a právě z tohoto pohledu můžeme dělit vlny na gravitační a kapilární. Jak už názvu plyne, hlavní roli pro gravitační vlny hraje zemská tíže. Vlny kapilární naopak vznikají v důsledku povrchového napětí. Pro gravitační vlny jsou typické spíše větší vlnové délky, kapilární vlny mají za následek spíše jemné zčeření hladiny.

### 2.2 Gravitační vlny

Budeme předpokládat, že jde o ideální nestlačitelnou kapalinu. Při působení jen konzervativních sil (což jak víme pro gravitační sílu platí) můžeme využít Kelvinovu větu [4], podle které je pak proudění nevířivé. Matematicky to lze vyjádřit jako

$$\nabla \times \vec{v} = 0, \quad (2.1)$$

kde  $\vec{v}$  vyjadřuje rychlost elementu kapaliny, která je závislá na čase a poloze. Vzhledem k platnosti vztahu (2.1) lze zavést potenciál  $\varphi$  s vlastností

$$\nabla \varphi = \vec{v}. \quad (2.2)$$

Pomocí známé rovnice kontinuity  $\nabla \cdot \vec{v} = 0$ , která souvisí se zachováním hmotnosti, lze získat Laplaceovu rovnici

$$\nabla \cdot (\nabla \varphi) = \Delta \varphi = 0. \quad (2.3)$$

Pro nevířivé proudění můžeme integrovat Eulerovu rovnici [2] a dostat z ní Bernoulliho rovnici

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} \vec{v}^2 + U + \frac{p}{\rho} = f(t), \quad (2.4)$$

kde  $U$  je gravitační potenciál,  $p$  popisuje rozložení tlaku a  $\rho$  je hustota kapaliny. Abychom zjednodušili rovnici (2.4), použijeme namísto  $\varphi$  potenciál ve tvaru

$$\bar{\varphi} = \varphi - \int_0^t f(t) dt + \frac{p_0}{\rho} t, \quad (2.5)$$

kde  $p_0$  značí atmosférický tlak. Pomocí nově definovaného potenciálu  $\bar{\varphi}$  dostaneme stejné rychlostní pole a je tedy splněna Laplaceova rovnice

$$\Delta \bar{\varphi} = 0. \quad (2.6)$$

Pokud vyjádříme  $\varphi$  pomocí  $\bar{\varphi}$  a dosadíme do vztahu (2.4), získáme tak

$$\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial t} + \frac{1}{2} \vec{v}^2 + U + \frac{p - p_0}{\rho} = 0. \quad (2.7)$$

Pomocí rovnic (2.6) a (2.7) lze určit funkce  $\bar{\varphi}$  a  $p$ , budeme však ještě potřebovat počáteční a okrajové podmínky.

Považujeme-li pohyb tekutiny za tak malý, že můžeme rychlost zanedbat v druhém řádu malosti, lze pak v rovnici (2.7) zanedbat člen s  $\vec{v}^2$ . Uvedený předpoklad vlastně neznamená nic jiného než, že amplituda je o hodně menší než vlnová délka. Po dosazení za  $U = gz$  dostaneme

$$\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial t} + gz + \frac{p - p_0}{\rho} = 0. \quad (2.8)$$

Uvažujme, jak dopadnou okrajové podmínky. Pro pevné stěny a dno zřejmě bude platit, že složka rychlosti kolmá k ploše bude nulová,

$$\nabla \bar{\varphi} \cdot \vec{n} = 0, \quad (2.9)$$

kde je  $\vec{n}$  normála. Na hladině  $z = z(x, y, t)$  je atmosférický tlak  $p_0$ , proto pro hladinu dostáváme podmínku

$$\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial t} + gz(x, y, t) = 0. \quad (2.10)$$

Spočítejme nyní  $v_z$  rychlost částice, která se nachází na hladině.

$$v_z = \frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial t} + v_x \frac{\partial z}{\partial x} + v_y \frac{\partial z}{\partial y}. \quad (2.11)$$

Při předpokladu o malé amplitudě můžeme říct, že parciální derivace  $z$  podle  $x$  a  $y$  jsou velmi malé a blíží se nule (souřadný systém máme zvolen tak, aby nevychýlená vodní hladina byla v rovině  $xy$ ). Potom můžeme psát

$$v_z = \frac{dz}{dt} \approx \frac{\partial z}{\partial t}. \quad (2.12)$$

Ovšem rychlost  $v_z$  lze také zapsat pomocí potenciálu

$$v_z = \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial z}. \quad (2.13)$$

Pokud budeme parciálně derivovat vztah (2.10) a dále pak využijeme rovnice (2.12) a (2.13), dostaneme

$$\frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial t^2} + g \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial z} = 0. \quad (2.14)$$

Uvedené vztahy platily na hladině popsané  $z = z(x, y, t)$ , ovšem při malé amplitudě lze příslušné veličiny aproximovat hodnotami v rovině  $z = 0$ .

Nyní se budeme věnovat příkladu nejjednodušších vln, rovinných vln. Uvažujme rovinovou vlnu šířící se ve směru osy  $x$ , proto potenciál popisující rychlost nemůže záviset na ose  $y$ . Časová závislost rychlosti a potenciálu musí být stejná. Proto budeme předpokládat potenciál ve tvaru

$$\bar{\varphi} = f(z) \exp[i(kx - \omega t)], \quad (2.15)$$

kde  $k$  je velikost vlnového vektoru. Dosadíme-li (2.15) do (2.3), vychází nám

$$\frac{d^2 f}{dz^2} - k^2 f = 0. \quad (2.16)$$

Uvedená diferenciální rovnice má obecné řešení

$$f(z) = A \exp(-kz) + B \exp(kz). \quad (2.17)$$

Dno je v hloubce  $z = -l$

$$\left( \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial z} \right)_{-l} = f(-l) = 0. \quad (2.18)$$

Konstanty  $A$  a  $B$  zvolíme takto

$$A = \frac{1}{2}C \exp(-kl), \quad B = -\frac{1}{2}C \exp(kl). \quad (2.19)$$

Vidíme, že konstanty vyhovují podmínce (2.18). Potom dostáváme potenciál ve tvaru

$$\begin{aligned} \bar{\varphi} &= \frac{1}{2}C [\exp(-kl - kz) + \exp(kl + kz)] \exp[i(kx - \omega t)] \\ &= C \cosh(kl + kz) \exp[i(kx - \omega t)]. \end{aligned} \quad (2.20)$$

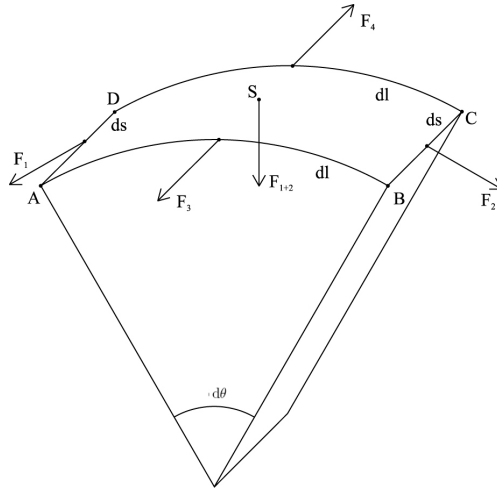
Nyní výsledek (2.20) dosadíme do rovnice (2.14) a za  $z$  položíme 0 (viz. poslední věta v oddílu 1.2), abychom získali potřebný vztah mezi  $k$  a  $\omega$ :

$$\omega = \sqrt{gk \tanh(kl)} \quad (2.21)$$

Fázovou rychlost vlnění již získáme snadno

$$c = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{g}{k} \tanh(kl)} = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi} \tanh\left(l \frac{2\pi}{\lambda}\right)}. \quad (2.22)$$





Obrázek 2.1: Je převzat z [9]

Pro vlny na hluboké vodě  $l \gg \lambda$  klesá funkce  $f(z)$  exponenciálně s hloubkou, proto je můžeme nazvat povrchovými vlnami. Zároveň přibližně platí  $\tanh(kl) \doteq 1$ . Pak disperzní relace má tvar

$$c = \sqrt{\frac{g}{k}}. \quad (2.23)$$

Naopak pro  $l \ll \lambda$  můžeme aproximovat  $\tanh(kl) \doteq kl$ . Po dosazení dostaneme fázovou rychlost

$$c = \sqrt{gl}. \quad (2.24)$$

## 2.3 Kapilární vlny

Předešlá analýza selže při aplikaci výsledků na vlny s malou vlnovou délkou. Při malých vlnových délkách se výrazně uplatňuje povrchové napětí. Při vychýlení hladiny z vodorovné polohy se zvýší velikost povrchu a síly způsobené povrchovým napětím se budou snažit vrátit hladinu do rovnovážné polohy. Situace je proto analogická rovnoměrně napjaté membráně.

Aplikujeme-li vztah (2.8) na hladinu a zanedbáme-li tíhové pole země, dostaneme

$$\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial t} + \frac{p - p_0}{\rho} = 0, \quad (2.25)$$

kde  $p$  je tlak těsně pod hladinou. Rozdíl tlaků  $p - p_0$  souvisí s povrchovým napětím, to nyní ukážeme.

Uvažujme znovu rovinnou vlnu. Okolí daného bodu hladiny bychom mohli reprezentovat válcovou plochou o poloměru  $R$ . Povrchové napětí  $\sigma$  je definováno jako síla působící na úsečku jednotkové délky ve směru tečném k ploše a kolmém na úsečku, která vznikne pomyslným řezem plochy. Na obr.2.1 je vidět, že síly  $\vec{F}_3$  a  $\vec{F}_4$  působí na přímkce, jsou stejně

velké a opačně orientované, odečtou se. Teď se pokusíme určit velikost výslednice sil  $\vec{F}_1$  a  $\vec{F}_2$ . Zřejmě pro malé  $d\theta$  můžeme psát

$$F_1 + F_2 = \sigma d\theta dl. \quad (2.26)$$

Aby byla splněna rovnováha sil na hladině, určíme velikost síly způsobenou tlakem  $p - p_0$

$$F = (p - p_0) ds dl, \quad (2.27)$$

ta se musí rovnat velikosti výslednice sil  $\vec{F}_1$  a  $\vec{F}_2$ . Vzhledem k platnosti  $ds = R d\theta$  dostaneme

$$(p - p_0) = \frac{\sigma}{R}. \quad (2.28)$$

Uvažujeme-li o ploše, která má dva poloměry křivosti  $R_1$  a  $R_2$  v navzájem kolmých směrech, lze dojít ke vztahu

$$(p - p_0) = \sigma \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right), \quad (2.29)$$

což je známá Laplaceova-Youngova rovnice. Při rovinné vlně šířící se v směru  $x$  lze uvažovat, že rovnice hladiny dána jako  $z = z(x, t)$ , pak křivost spočteme pomocí známého vzorce

$$\frac{1}{R} = \pm \frac{\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}}{\left[ 1 + \left( \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} \doteq \pm \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad (2.30)$$

kde jsme využili předpokladu o malé amplitudě. Nyní dostáváme

$$(p - p_0) = -\sigma \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad (2.31)$$

znaménko mínus vyjadřuje, že na konvexní straně povrchu je větší tlak než na straně konkávní. Pro hladinu dostáváme tedy podmínku

$$\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial t} - \frac{\sigma}{\rho} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0. \quad (2.32)$$

Stejným postupem jako v předchozím oddílu, viz. vztahy (2.11), (2.12) a (2.13), lze dospět k rovnici

$$\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial t} - \frac{\sigma}{\rho} \frac{\partial^3 \bar{\varphi}}{\partial x^2 \partial z} = 0. \quad (2.33)$$

Řešíme stejné rovnice až na podmínku pro hladinu, proto platí vztah (2.20), který dosadíme do rovnice (2.33). Dostáváme pak disperzní relaci ve tvaru

$$\omega = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho} k^3 \tanh(kl)}. \quad (2.34)$$

Pro fázovou rychlost získáváme

$$c = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho} k \tanh(kl)} = \sqrt{\frac{2\pi\sigma}{\rho\lambda} k \tanh\left(\frac{2\pi}{\lambda} l\right)}. \quad (2.35)$$

Pro vlny na hluboké vodě  $l \gg \lambda$  platí

$$c = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}} k, \quad (2.36)$$

vidíme tedy, že fázová rychlost závisí nepřímo úměrně na vlnové délce, mluvíme pak o anomální disperzi. Z toho lze pak usuzovat, že se bude povrchové napětí uplatňovat spíše u malých vlnových délek.

## 2.4 Současné působení zemské tíže a povrchového napětí

Při uvažování obecného případu působení jak zemské tíže, tak povrchového napětí, dopadne podmínka na hladinu takto:

$$\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial t} + g \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial z} - \frac{\sigma}{\rho} \frac{\partial^3 \bar{\varphi}}{\partial x^2 \partial z} = 0. \quad (2.37)$$

Pak dostaneme disperzní relaci a fázovou rychlost

$$\omega = \sqrt{\left(gk + \frac{\sigma}{\rho} k^3\right) \tanh(kl)}, \quad c = \sqrt{\left(\frac{g}{k} + \frac{\sigma}{\rho} k\right) \tanh(kl)}. \quad (2.38)$$

Pro vlny na hluboké vodě pak získáme

$$c = \sqrt{\frac{g}{k} + \frac{\sigma}{\rho} k}. \quad (2.39)$$

Rovnice (2.39) ukazuje, že by měla existovat minimální fázová rychlost. Derivováním a dosazením konstant pro vodu  $\sigma = 0,072 \text{ N m}^{-1}$ ,  $\rho = 10^3 \text{ kg m}^{-3}$ ,  $g = 9,81 \text{ m s}^{-2}$  nám vychází minimální fázová rychlost, jí příslušná vlnová délka a frekvence

$$\lambda = 0.017 \text{ m}, \quad c = 0.23 \text{ m s}^{-1}, \quad f = \frac{\omega}{2\pi} = 13.53 \text{ s}^{-1}. \quad (2.40)$$

# Kapitola 3

## Fázové singularity

### 3.1 Co je to fázová singularita

V další části práce se budeme zabývat fázovými singularitami, které se objevují při interferenci tří a více vln (mohou to být jak vlny skalární, tak vektorové). Jak již z názvu plyne, jde o místa v prostoru či v rovině (ukazuje se, že v prostoru se jedná o křivky a v rovině o body), kde není definovaná fáze. Abychom získali lepší náhled na tento jev, budeme jej ilustrovat na třech příkladech. První příklad fázové singularity nebude mít zatím nic společného s vlněním. Uvažujme o ideálních časových pásmech na zeměkouli, zeměkoule je tedy rozdělena na 24 časových pásem, fázi nazveme hodnotou časového pásma, v jakém se nachází dané místo. Osa otáčení prochází na pólech, proto se zde sbíhají všechna časová pásma a nebude možné zde definovat fázi.

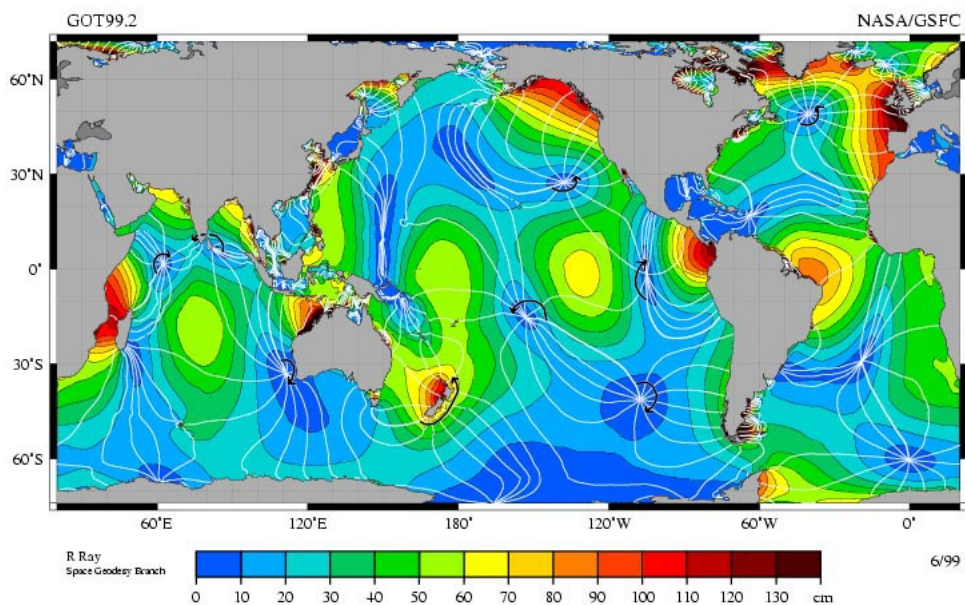
Další pěknou ilustrací fázových singularit je studium slapových jevů, změny výšky hladiny oceánů, které jsou způsobeny silami od Měsíce a Slunce a rotací Země okolo vlastní osy. Na obrázku 3.1. je znázorněna amplituda výchylky pomocí různých barev a bílými křivkami místa, která mají stejnou fázi. Na oceánu lze najít místa, kde se výška vodní hladiny nemění a kde se zároveň sbíhají čáry konstantní fáze, a proto je jasné, že v těchto místech se nachází fázová singularita.

Při zavádění komplexních čísel jsme se také setkali s fázovou singularitou. A to při goniometrickém či exponenciálním tvaru komplexních čísel. Uvažme Gaussovu rovinu, je zřejmé, že komplexní čísla ležící na přímce procházející číslem  $z = 0 + i0$  budou mít stejný úhel čili fázi. Ovšem číslem  $z$  procházejí křivky o různé fázi. Je tedy zřejmé, že budeme-li se blížit k tomuto bodu z různých směrů, dostaneme různé hodnoty fáze.

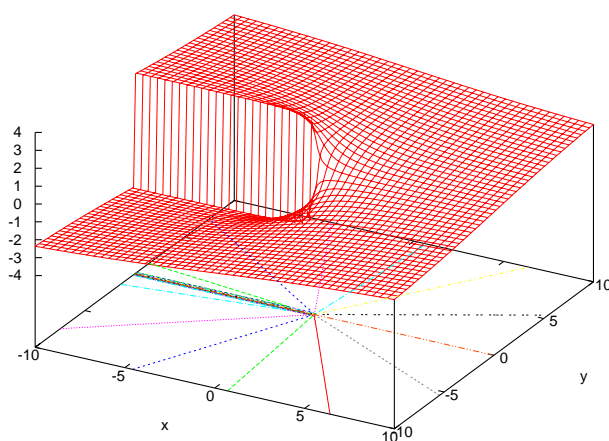
### 3.2 Popis a vlastnosti fázových singularit

Jelikož se budeme snažit popsat a experimentálně najít fázové singularity na vodní hladině, vystačíme si s komplexními funkcemi, které budou popisovat skalární vlny. Výchylku vodní hladiny z rovnovážné polohy lze pak vyjádřit v obecném tvaru

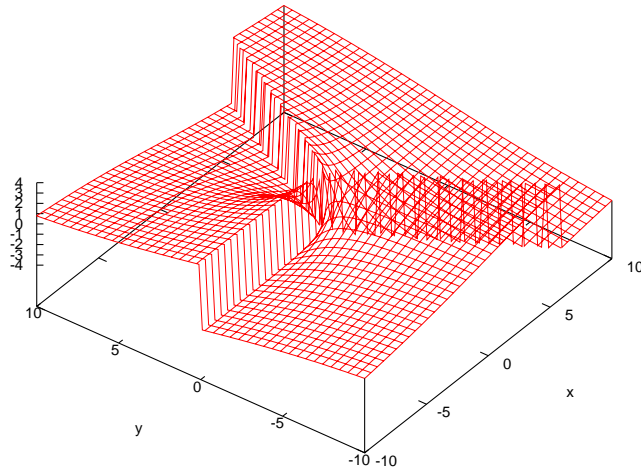
$$\Re[\Psi(\vec{r}, t)] = \Re[\rho(\vec{r}, t) \exp(i \chi(\vec{r}, t))], \quad (3.1)$$



Obrázek 3.1: Znázornění amplitudy a fáze pro slapové jevy, obrázek převzat z [13].



Obrázek 3.2: Fáze pro funkci  $f(x,y) = x + i y$ , dále jsou znázorněny některé křivky s konstantní fází



Obrázek 3.3: Fáze pro funkci  $f(x, y) = (x + iy)^3$ , jedná se o singularitu síly 3.

kde  $\rho(\vec{r}, t)$  je amplituda,  $\chi(\vec{r}, t)$  fáze. Funkce  $\rho$  i  $\chi$  jsou reálné. V dalším textu již argumenty funkcí, nebude-li to nutné, vypisovat nebudeme.

Důležitou charakteristikou singularity je její síla, která popisuje, jak se v okolí singularity mění fáze. Uvažujme dvourozměrný problém, mějme uzavřenou křivku, která obsahuje fázovou singularitu. Změnu fáze při posunu o  $d\vec{l}$  lze vyjádřit jako  $\nabla\chi \cdot d\vec{l}$ . Proto výslednou změnu vyjádříme

$$\oint \nabla\chi \cdot d\vec{l}. \quad (3.2)$$

Vzhledem k tomu, že se jedná o uzavřenou křivku a fáze je určena až na násobek  $2\pi$  (předpokládáme, že je funkce  $\Psi$  jednoznačně určená), pak dostáváme vztah

$$\oint \nabla\chi \cdot d\vec{l} = 2\pi s. \quad (3.3)$$

kde  $s$  je celé číslo a nazývá se síla singularity. Nyní pro úplnost musíme definovat kladný směr, ten vezmeme jako obvykle ve směru proti hodinovým ručičkám. Singularita na obr.3.2 má zřejmě sílu 1. Z vlastností komplexních čísel, a to z Moivreovy věty plyne, jak můžeme konstruovat singularity vyšších řádů. Při umocnění komplexního čísla  $z$  na  $n$ -tou dostaneme  $z^n$ , které má fázi větší  $n$ -krát. Proto funkce  $f(x, y) = (x + iy)^n$  má v bodě  $0 + i0$  singularitu síly  $n$ .

Vzhledem k tomu, že  $\Psi$  popisuje nějaký fyzikální děj, musí splňovat rovnice, které danou situaci popisují. Ukážeme si, jak vypadají fázové singularity splňující vlnovou rovnici ve tvaru

$$\nabla^2\Psi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}, \quad (3.4)$$

kde  $c$  je fázová rychlost. Předpokládáme, že lze  $\Psi$  napsat v separovaném tvaru

$$\Psi = \psi(\vec{r}) \exp(i\omega t). \quad (3.5)$$

Pak po dosazení do (2.4) získáme Helmholtzovu rovnici

$$\nabla^2\psi + k^2\psi = 0, \quad (3.6)$$

kde  $k = \omega/c$  je vlnové číslo. Z rovnice (2.5) plyne, že nám bude stačit určit fázové singularity pro funkci  $\psi$ . Z obecného vyjádření (2.1) by poloha fázových singularit mohla záviset na čase, při splnění vztahu (2.5) je však časová závislost vyloučena.

V článku [8] autoři ukazují na existenci dvou typů fázových singularit, které nazývají dislokacemi vzhledem k analogii k dislokacím vyskytujících se v krystalové struktuře pevných látek. Jedná se o hranovou a šroubovou dislokaci. Přibližné řešení rovnice (2.6), které popisuje hranovou dislokaci, má tvar

$$\psi = (x + iz) \exp(ikz). \quad (3.7)$$

Pro amplitudu a fázi dostáváme vztahy

$$\rho = x^2 + z^2, \quad \chi = \arctan\left(\frac{x}{z}\right) + kz. \quad (3.8)$$

Z výrazu pro fázi lze určit místa, v nichž nebude definována fáze. Půjde o body, které mají jak složku  $x$ , tak složku  $z$  nulovou, tedy o osu  $y$ . Uvažujeme-li, že se blížíme k nějakému bodu osy  $y$  po přímkách z různých směrů limita pro argument funkce  $\arctan$  nabývá hodnot od  $-\infty$  do  $\infty$ , a proto fázi zde nemůžeme určit. Na obrázku 3.4 je vidět, že pokud obejdeme singulární bod v kladném smyslu, hodnota se změní o  $-2\pi$ , síla singularity je tedy  $-1$ .

Přesné řešení rovnice (2.6) popisující šroubovou dislokaci vypadá následovně:

$$\psi = (x + iy) \exp(ikz), \quad (3.9)$$

ze kterého pak dostáváme výrazy pro amplitudu a fázi

$$\rho = x^2 + y^2, \quad \chi = \arctan\left(\frac{x}{y}\right) + kz. \quad (3.10)$$

Analogicky k předchozí situaci se singularity nachází na ose  $z$ . Pokud budeme znázorňovat průběh fáze v rovině  $z = 0$ , dostaneme obrázek 3.2. Použijeme-li polární souřadnice  $(R, \theta, z)$  můžeme vyjádřit fázi (2.10) jako

$$\chi = \theta + kz. \quad (3.11)$$

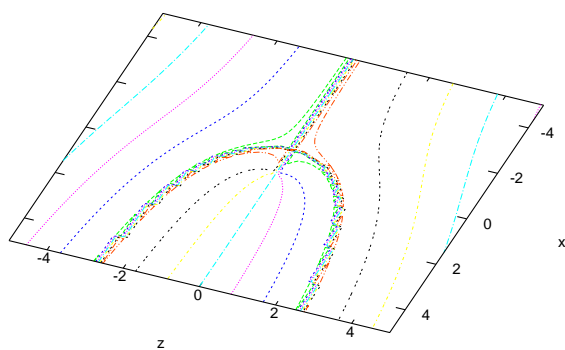
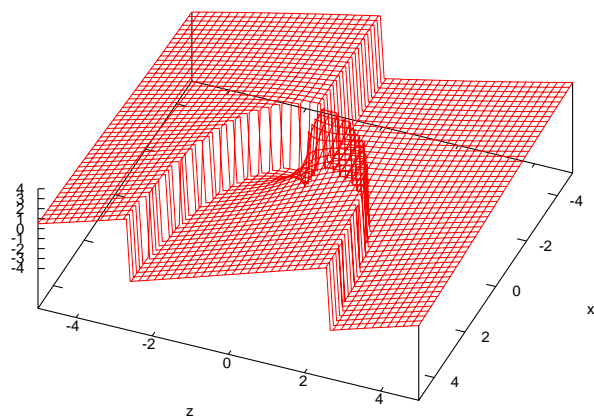
V okolí singulární čáry bude plocha v prostoru určující konstantní fázi šroubovice. Dosazením se lze přesvědčit, že rovnici (2.6) vyhovuje i

$$\psi = (x + iy)^s \exp(ikz), \quad (3.12)$$

což popisuje šroubovou singularitu síly  $s$ .

Z předešlých případů jsme viděli, že singularity se nachází v místech, kde

$$\rho = 0. \quad (3.13)$$



Obrázek 3.4: Fáze pro hranovou dislokací s  $k = 1$  pro rovinu  $z = 0$ , dále průběh křivek s konstantní fází.



Komplexní funkci  $\Psi$  můžeme přepsat pomocí funkcí  $f$  a  $g$  jako

$$\Psi = f + i g. \quad (3.14)$$

Vzhledem k platnosti vztahu  $\rho = \sqrt{f^2 + g^2}$  je podmínce  $\rho = 0$  ekvivalentní dvojice rovnic

$$f = 0, \quad g = 0. \quad (3.15)$$

Řešení každé z rovnic vede v třírozměrném případě na určitou plochu či soustavu ploch a průnikem těchto ploch by měla být křivka. V dvourozměrném případě jsou řešením křivky a jejich průnikem jsou body.

Podrobnější rozbor fázových singularit lze nalézt v [8], [2], [10], [5].

### 3.3 Válcové vlny na vodní hladině

Válcovou vlnu lze popsat komplexní funkcí [1], [2]

$$\Psi = H_0^1(kr) \exp(-i\omega t), \quad (3.16)$$

kde je  $H_0^1$  Hankelova funkce prvního druhu, která je blíže popsána v oddílu 6.1, dále ji budeme značit pouze  $H$ ,  $r$  je vzdálenost od osy symetrie procházející zdrojem válcových vln, vztah mezi  $\omega$  a  $k$  určuje rovnice (2.38). Jelikož chceme zkoumat fázové singularity na vodní hladině, potřebujeme k tomu interferenci alespoň tří válcových vln. Pro tento případ (neuvažujeme-li odraz vln od okrajů) lze zapsat výchylku jako

$$\Psi = \psi \exp(-i\omega t), \quad (3.17)$$

kde

$$\psi = [A H(k|\vec{r} - \vec{r}_1|) \exp(-i\chi_1) + B H(k|\vec{r} - \vec{r}_2|) \exp(-i\chi_2) + C H(k|\vec{r} - \vec{r}_3|) \exp(-i\chi_3)],$$

$A, B, C$  jsou konstanty,  $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3$  polohové vektory jednotlivých zdrojů,  $\chi_1, \chi_2, \chi_3$  počáteční hodnoty fází zdrojů pro  $t = 0$ . Při vhodně zvolených parametrech by na vodní hladině měly existovat fázové singularity. Hledali jsme je numericky pomocí podmínky (3.13), skript hledající singularity je uveden v oddílu 6.2. Při popisu hladiny pomocí funkce  $\Psi$  ve tvaru (3.18) vznikají šroubové singularity síly  $\pm 1$ . V okolí těchto fázových singularit by pak měla hladina vypadat jako

$$\Re[K(x + iy) \exp(-i\omega t)], \quad (3.18)$$

kde  $K$  je komplexní konstanta. Jedná se vlastně o otáčející se rovinu.

Nejjednodušším návrhem, jak v daném bodě vytvořit fázovou singularitu, je umístit zdroje do vrcholů rovnostranného trojúhelníka a zároveň posunout fázi mezi sousedními zdroji o  $2\pi/3$ , přičemž konstanty  $A, B, C$  musí být stejné. Pak v těžišti pomyslného trojúhelníka vznikne fázová singularita při jakémkoli vlnovém čísle.

### 3.4 Odraz laserového paprsku od vodní hladiny

Zkoumat vlastnosti vodní hladiny se pokusíme tak, že budeme sledovat, jaké trajektorie vytvoří laserový paprsek na zdi po odrazu od vodní hladiny. Pokud by paprsek dopadal kupříkladu na rovinou vlnu či válcovou vlnu, vytvořila by se na zdi úsečka. Při dopadu laseru na fázovou singularitu, která by se měla chovat v okolí jakou otáčející se rovina, by měl koncový bod směrového vektoru odraženého paprsku opisovat kružnici. Proto trajektorie stopy laseru na zdi by měla být s největší pravděpodobností elipsa, či ve speciálním případě kružnice.

Pro výpočet odraženého paprsku použijeme zákon odrazu (lze odvodit pomocí vztahu (4.2)), který nám říká, že úhel dopadu se rovná úhlu odrazu. Pokud je v místě dopadu paprsku normálový vektor k hladině  $\vec{n}$  a směr dopadajícího paprsku  $\vec{s}$ , pak lze vyjádřit směr odraženého paprsku  $\vec{\sigma}$  jako

$$\vec{\sigma} = \vec{s} - 2 \frac{\vec{n} \cdot \vec{s}}{|\vec{n}|^2} \vec{n}. \quad (3.19)$$

Normálový vektor ze známé funkce  $\Psi$  spočítáme takto: určíme parciální derivace podle obou proměnných a z nich získáme tečny k hladině ve směrech  $x$  a  $y$

$$\vec{t}_x = \left( 1, 0, \frac{\partial \Re(\Psi)}{\partial x} \right), \quad \vec{t}_y = \left( 0, 1, \frac{\partial \Re(\Psi)}{\partial y} \right). \quad (3.20)$$

K vypočtení parciálních derivací použijeme identitu (6.7).

Normálový vektor k hladině získáme již snadno jako

$$\vec{n} = \vec{t}_x \times \vec{t}_y = \left( -\frac{\partial \Re(\Psi)}{\partial x}, -\frac{\partial \Re(\Psi)}{\partial y}, 1 \right). \quad (3.21)$$

Známe-li místo dopadu laserového paprsku na vodní hladinu, vzdálenost zdi (předpokládáme, že je rovnoběžná s rovinou  $xz$ ) a směr odraženého paprsku, lze pak spočítat stopu paprsku na zdi pomocí rovnic

$$a = \frac{d - p_2}{o_2} \quad (3.22)$$

$$x = a o_1 + p_1 \quad (3.23)$$

$$z = a o_3 + p_3 \quad (3.24)$$

kde  $P [p_1, p_2, p_3]$  je místo dopadu,  $\vec{\sigma} = (o_1, o_2, o_3)$  směr odraženého paprsku a  $d$  je vzdálenost zdi od souřadnicového systému vztaženého k vodní hladině. Místo dopadu určíme numerickým řešením rovnic

$$p_1 - b s_1 - n_1 = 0 \quad (3.25)$$

$$p_2 - b s_2 - n_2 = 0 \quad (3.26)$$

$$\Re[\Psi(p_1, p_2)] - b s_3 - n_3 = 0, \quad (3.27)$$

kde  $\vec{s} = (s_1, s_2, s_3)$  je směr dopadajícího paprsku,  $N [n_1, n_2, n_3]$  bod, kterým prochází paprsek, neznámými v soustavě jsou  $p_1, p_2$  a  $b$ . Dále víme, že platí vztah  $p_3 = \Re[\Psi(p_1, p_2)]$  Skript počítající trajektorii stopy laseru je v oddílu 6.2.

## 3.5 Experiment

V dalších částech této kapitoly se budeme věnovat popisu experimentu. Jak jsme již naznačili, nejjednodušším teoretickým návrhem na vytvoření fázové singularity je umístění tří zdrojů do vrcholů rovnostranného trojúhelníka, které jsou mezi sebou fázově posunuty o  $2\pi/3$ . Ovšem experimentálně není úplně snadné získat třífázový proud. A tak pro experimenty použijeme zdroje, které jsou ve fázi. Podle simulace se sice sníží počet singularit, ale při vhodném nastavení parametrů by singularity na vodní hladině měly existovat.

Najít fázovou singularitu ovšem nebude tak snadné. Je to především tím, že se nám nepodařilo najít nějakou přímou metodu pro její hledání. Jde o to, že máme na vodní hladině najít místa, pro která je amplituda nulová. Jak ale určit experimentálně, že určité místo nevychyluje? Na tuto otázku se nám nepodařilo odpovědět. Proto jsme se pokusili zkoumat vlny na vodě pomocí odrazu laserového paprsku.

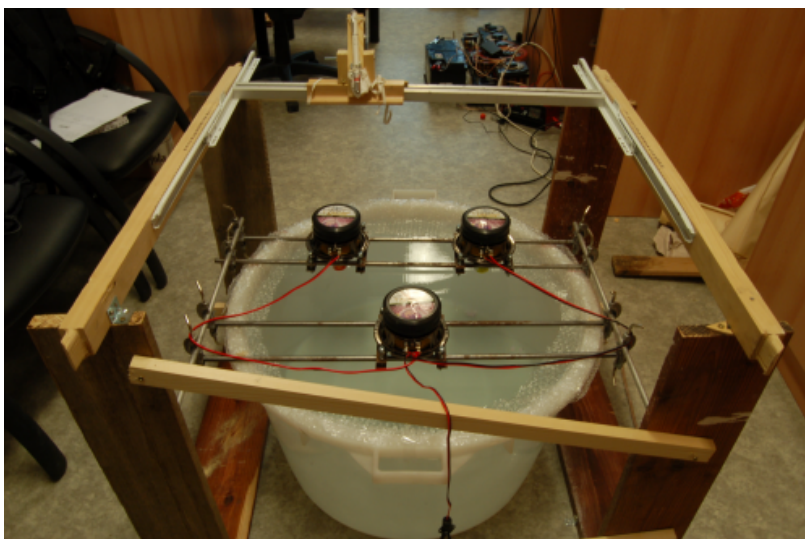
Naším cílem bude nejprve porovnat pro zvolené body výsledky vypočtené a naměřené, dále prozkoumat okolí bodů, kde by se podle výpočtu měly vyskytovat fázové singularity.

Při nastavování frekvence a amplitudy jsme museli zvažovat několik aspektů. Veškeré výsledné vztahy souvisely s lineárními vlnami, což, jak víme, lze splnit tak, když amplituda je o hodně menší než vlnová délka. Ovšem při zvyšování frekvence se vlnová délka zmenšuje. Proto je daná aproximace při konstantní amplitudě splněna lépe pro menší frekvence. Na druhou stranu jsme v teoretickém popisu zanedbali odrazy vln od okrajů kádě. Při menším vlnovém čísle ovšem mají odrazy větší vliv. Při experimentování se také ukázalo, že zhruba od frekvence 40 Hz je obtížné vybudit válcovou vlnu. Při těchto vyšších frekvencích již vznikají vlny, které mají závislost nejen na vzdálenosti  $r$  od zdroje, ale také na úhlu  $\theta$  (uvažujeme o sférických souřadnicích  $r, \theta$ ). Proto jsme také zavrhli možnost použití třífázového proudu ze sítě, jelikož má frekvenci 50 Hz.

## 3.6 Experimentální aparatura a měření její geometrie

Na obrázku 3.5 vidíme použitou experimentální aparaturu. Jako zdroje válcových vln byly použity reproduktory, na které se nalepily válcové trubičky. Válcové trubičky se ponořily do vody a puštěním sinusového proudu do reproduktorů začaly vznikat válcové vlny. Reproduktory byly zapojeny paralelně. Sinusový signál byl generován pomocí počítačového programu Tone Generator [15] a pomocí mixážního pultu byla upravována jeho amplituda. Vzájemnou vzdálenost reproduktorů jsme také mohli měnit, ovšem k celkovým rozměrům aparatury bylo nejhodnější umístit reproduktory do rovnostranného trojúhelníka s délkou strany  $30 \pm 0.1$  cm. Laserové ukazovátka bylo umístěno na stojanu, přičemž bylo možné polohou laseru pohybovat v navzájem kolmých směrech. Vzhledem k tomu, že jsme v teoretickém popisu zanedbali vliv odražených vln od okrajů kádě, museli jsme se pokusit odrazy eliminovat, na okraj kádě jsme proto připevnili fólii, která odrazy měla alespoň částečně tlumit.

Vypočtenou polohu singularit máme v soustavě spojené s vodní hladinou. Ovšem polohu laseru měříme v soustavě, která je spojená se stojanem na laser. Musíme tedy znát trans-



Obrázek 3.5: Experimentální aparatura

formační vztahy, které nám udávají, na jaké místo nevychýlené vodní hladiny dopadá laserový paprsek při dané poloze laseru ve stojanu. Roviny  $xy$  v obou soustavách jsou rovnoběžné. Dále jsme se snažili aparaturu nastavit tak, aby osy  $x$  v obou soustavách byly také rovnoběžné. Musíme proto určit vzdálenost  $m$  vodní hladiny od roviny, v níž se pohybuje laser, dále vzájemný posun rovin  $xy$  daný vektorem  $\vec{u} = (u_1, u_2)$  a směr dopadajícího laserového paprsku  $\vec{s}$ . Abychom vyjasnili případné nejasnosti, uvádíme zde přepočty mezi jednotlivými soustavami. Bude nás zajímat taková poloha laseru  $[\bar{x}, \bar{y}]$ , abychom svítili na místo  $[x, y]$  nevychýlené vodní hladiny.

$$q = \frac{m}{s_3} \quad (3.28)$$

$$\bar{x} = qs_1 + x + u_1 \quad (3.29)$$

$$\bar{y} = qs_2 + y + u_2 \quad (3.30)$$

Vzdálenost  $m$  a vektor  $\vec{p}$  jsme určili pomocí pravítek, směr laseru jsme změřili pomocí určení jeho stopy na milimetrovém papíře ve dvou navzájem rovnoběžných rovinách. Výsledky měření jsou uvedeny v tabulce 3.1.

Dalším veličinou, kterou bylo nutné změřit, byla vzdálenost  $d$  aparatury od zdi. Aparaturu jsme se snažili nastavit tak, aby osa  $x$  byla rovnoběžná s rovinou zdi.

Dále jsme ještě určili hloubku dna  $h$ . Pro použité vlnové délky při experimentech lze pak využít aproximace vln na hluboké vodě.

Abychom dostali správnou funkci  $\Psi$  popisující vodní hladinu, musíme určit konstanty  $A, B, C$  ve vztahu (3.18). Potřebujeme naměřit průměry válcových trubiček, jejichž kmitání způsobuje vlnění vodní hladiny a dále pak amplitudy kmitů trubiček. Průměr lze snadno změřit posuvným měřítkem, avšak u amplituda situace tak snadná není. Pokusili jsme se alespoň přibližně amplitudu pomocí následujícího postupu. Upevnili jsme zvýrazňovač do

$m$ [cm]	$29.8 \pm 0.1$
$\vec{u}$ [cm]	$(33.9 \pm 0.1, 6.3 \pm 0.1)$
$\vec{o}$ [cm]	$(-1.4 \pm 0.1, 17.1 \pm 0.1, -25.3 \pm 0.1)$
$d$ [cm]	$204 \pm 1$
$h$ [cm]	$40 \pm 0.1$
$r_1$ [cm]	$1.37 \pm 0.01$
$r_2$ [cm]	$1.39 \pm 0.01$
$r_3$ [cm]	$1.43 \pm 0.01$

Tabulka 3.1: Naměřené parametry

držáku na laser a jemně přiložili k válečku. Nechali jsme váleček kmitat a zvýrazňovač vyznačil na trubičce úsečku, jejíž délka by měla odpovídat dvojnásobku amplitudy. Tuto délku označme  $j$ . Tření mezi válečkem a zvýrazňovačem bude tak malé, že lze jeho efekt na výsledek zanedbat. Kalibrační konstantu  $A$  lze pak vypočítat jako

$$A = \frac{j}{2H(kr_1)}, \quad (3.31)$$

kde  $r_1$  je poloměr prvního válečku. Analogickým postupem lze určit konstanty  $B$  a  $C$ . Naměřené hodnoty  $j$  lze nalézt v tabulce 3.2. Hodnoty  $j$  byly při dané frekvenci a daném zesílení měřeny pro všechny reproduktory, ukázalo se, že jsou pro všechny stejné. Skript počítající kalibrační konstanty lze nalézt v oddílu 6.2.

### 3.7 Výsledky měření

Měření probíhalo tak, že jsme nejprve nastavili vhodnou amplitudu při dané frekvenci tak, aby byla trajektorie laseru dobře patrná, avšak amplituda natolik malá, abychom mohli využít aproximace lineárních vln. Poměr amplitudy ku vlnové délce v našich experimentech (viz. tabulka 3.2) měl maximální hodnotu 4%, tedy aproximace lineárních vln byla poměrně dobře splněna. Potřebnou výchylku jsme změřili a skriptu jsme určili kalibrační konstanty. Pak jsme umístili laser do dané polohy a počkali na ustálení trajektorie laseru, jelikož již silnější otřes podlahy způsoboval sekundární vlny. Nakonec jsme trajektorii vyfotografovali.

První měření jsme zkoumali vybraných 12 míst na hladině pro frekvence 3 Hz, 5 Hz, 8 Hz, 10 Hz, 15 Hz, 20 Hz. Polohy míst, které byly naměřeny, jsou v tabulce 3.3. Dále jsme naměřené výsledky porovnali s teoretickým výpočtem. Při zobrazování vypočtených trajektorií jsme se snažili, aby grafy byly rozměrově identické vyfotografovaným útvarům, proto některé vypočtené trajektorie nejsou vidět celé nebo dokonce vidět vůbec, jelikož dané rozměry přesáhly.

Ve druhém měření jsme se zaměřili na místa, kde by se podle výpočtu měly nacházet fázové singularity. Vyfotografovali jsme trajektorii laseru přímo v místě singularity a potom pro další čtyři okolní body. Pro každou frekvenci jsme si vybrali tři singularity a ty změřili. Z výpočtu vyplynulo, že fázové singularity vznikají v měřené oblasti při frekvenci vyšší

první měření			druhé měření		
$f$ [Hz]	$j$ [mm]	$j/2\lambda$	$f$ [Hz]	$j$ [mm]	$j/2\lambda$
3	3	0.009	3	3	0.009
5	2	0.02	4	2	0.01
8	1	0.02	5	1.5	0.01
10	1	0.02	6	1	0.01
15	1	0.03	7	1	0.01
20	1	0.04	8	1	0.02

Tabulka 3.2: Naměřené hodnoty pro určení kalibračních konstant

fotka	$x$ [cm]	$y$ [cm]	fotka	$x$ [cm]	$y$ [cm]
1	6.4	7.9	7	12.4	9.9
2	9.4	7.9	8	15.4	9.9
3	12.4	7.9	9	6.4	11.9
4	15.4	7.9	10	9.4	11.9
5	6.4	9.9	11	21.4	11.9
6	9.4	9.9	12	23.4	11.9

Tabulka 3.3: Naměřené místa pro první měření

než 2 Hz, pro frekvenci 8 Hz je již počet singularit 150. Je proto zřejmé, že vzhledem k přesnosti měření nemá smysl pro frekvence vyšší se pokoušet proměřit okolí singularit. Naměřili jsme tedy oblast 3–8 Hz. V tabulce 3.4 jsou shrnuty polohy proměřených singularit a jejich okolních bodů. Fotografie, na kterých je zobrazena trajektorie při dopadu paprsku laseru přímo na singularitu, mají číslo 1, 6 a 11.

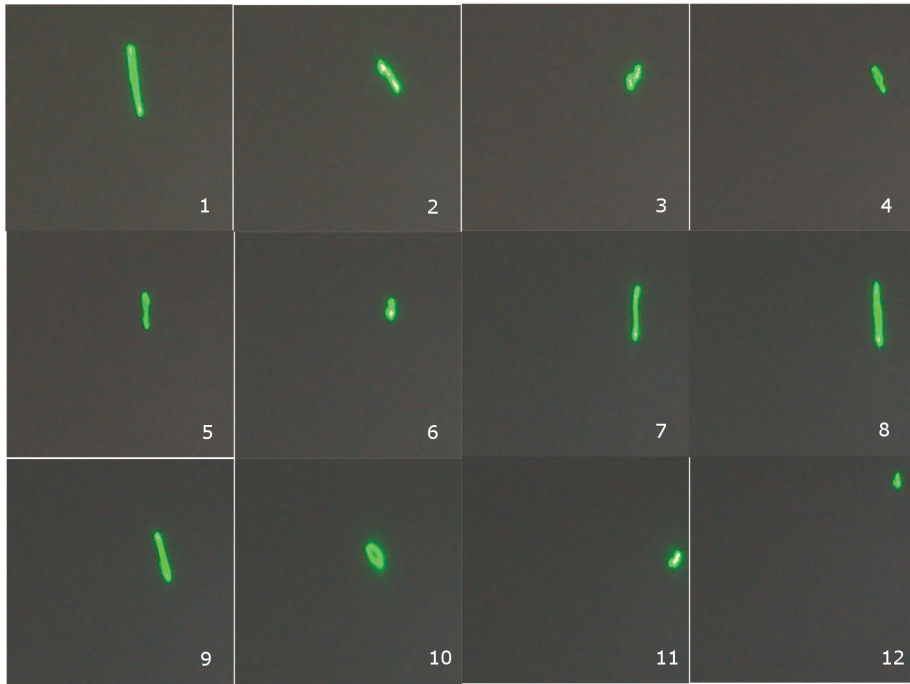
### 3.8 Diskuze o výsledcích měření

Při porovnání vyfocených trajektorií s vypočtenými plyne, že se nám nepodařilo eliminovat vliv odražených vln od okrajů kádě. Započtením odražených vln se funkce  $\Psi$  změní, a proto i polohy fázových singularit se budou nacházet v jiných místech. To je jedním z principiálních důvodů nesouhlasu experimentu s teoretickým výpočtem. Chyba měření veličin potřebných k výpočtu trajektorie stopy laseru způsobuje, že teoretický výpočet probíhá pro jiný bod, než na který ve skutečnosti laserem svítíme. Tato chyba by se měla výrazněji projevit při menších vlnových délkách.

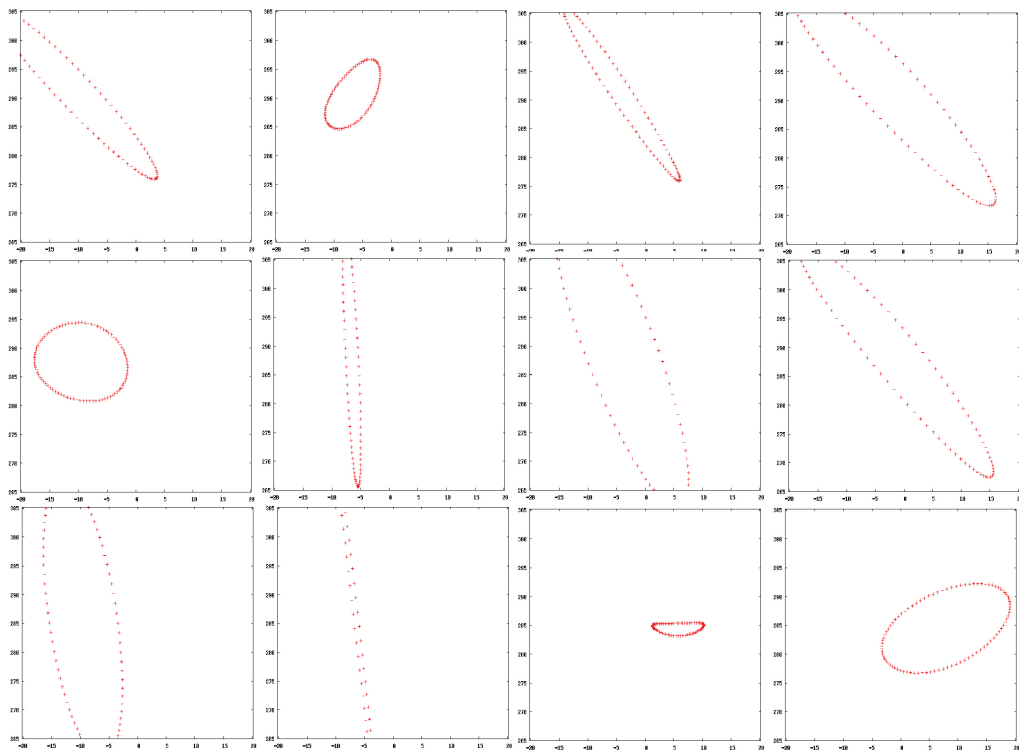
Použitou metodou, jak se zdá, nelze určit, jestli se jedná o fázovou singularitu či nikoli, pokud se teoretický výpočet neshoduje s experimentálním. Mysleli jsme si, že dokážeme najít singularitu touto metodou i bez znalosti její polohy, podle toho, že se v okolí singularity chová hladina jako otáčející se rovina. Při experimentech se však ukázalo, že daná metoda není dostatečně průkazná.

$f$ [Hz]	fotka	$x$ [cm]	$y$ [cm]	fotka	$x$ [cm]	$y$ [cm]	fotka	$x$ [cm]	$y$ [cm]
3	1	8.3	8.8	6	21.4	8.8			
	2	9.3	8.8	7	22.4	8.8			
	3	7.3	8.8	8	20.4	8.8			
	4	8.3	9.8	9	21.4	7.8			
	5	8.3	7.8	10	21.4	9.8			
4	1	11.1	8.7	6	18.8	8.7	11	6.5	10
	2	12.1	8.7	7	19.8	8.7	12	7.5	10
	3	10.1	8.7	8	17.8	8.7	13	5.5	10
	4	11.1	9.7	9	18.8	9.7	14	6.5	11
	5	11.1	7.7	10	18.8	7.7	15	6.5	9
5	1	9	13.5	6	20.3	9.2	11	12.4	8.7
	2	10	13.5	7	21.3	9.2	12	13.4	8.7
	3	8	13.5	8	19.3	9.2	13	11.4	8.7
	4	9	14.5	9	20.3	10.2	14	12.4	9.7
	5	9	12.5	10	20.3	8.2	15	12.4	7.7
6	1	14	10.3	6	9.9	10.6	11	7.7	11.1
	2	14.5	10.3	7	10.4	10.6	12	8.2	11.1
	3	13.5	10.3	8	9.4	10.6	13	7.2	11.1
	4	14	10.8	9	9.9	11.1	14	7.7	11.6
	5	14	9.8	10	9.9	10.1	15	7.7	10.6
7	1	5.9	10.9	6	8.9	9.1	11	8.2	8.7
	2	6.4	10.9	7	9.4	9.1	12	8.7	8.7
	3	5.4	10.9	8	8.4	9.1	13	7.7	8.7
	4	5.9	11.4	9	8.9	9.6	14	8.2	9.2
	5	5.9	10.4	10	8.9	8.6	15	8.2	8.2
8	1	8.6	9.3	6	6.2	10.4	11	17.4	8.8
	2	9.1	9.3	7	6.7	10.4	12	17.9	8.8
	3	8.1	9.3	8	5.7	10.4	13	16.9	8.8
	4	8.6	9.8	9	6.7	10.9	14	17.4	9.3
	5	8.6	8.8	10	6.7	9.9	15	17.4	8.3

Tabulka 3.4: Naměřené singularity a jejich okolí při druhém měření

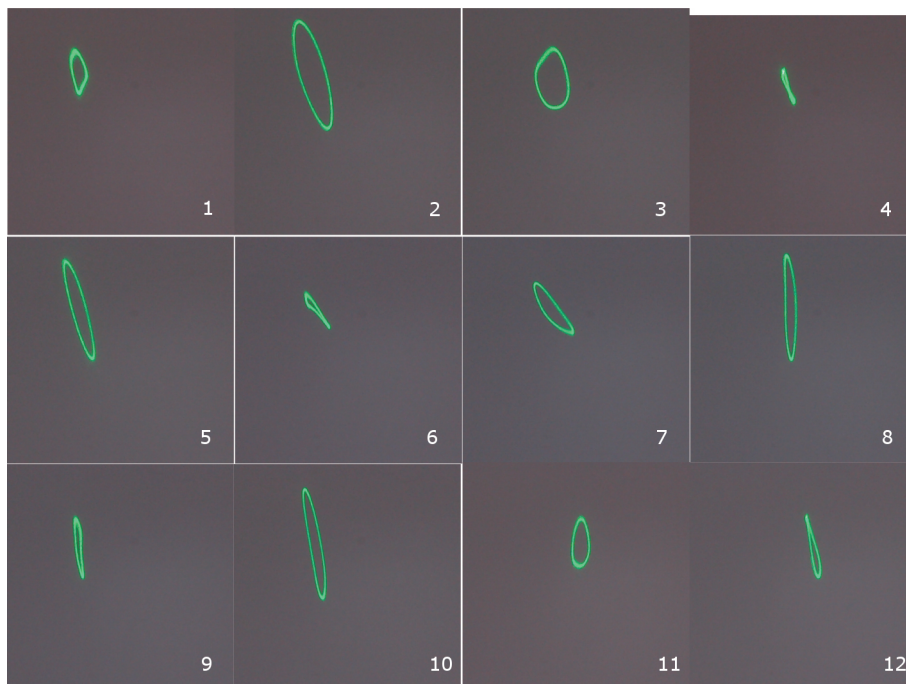


Obrázek 3.6: První měření pro  $f=3$  Hz

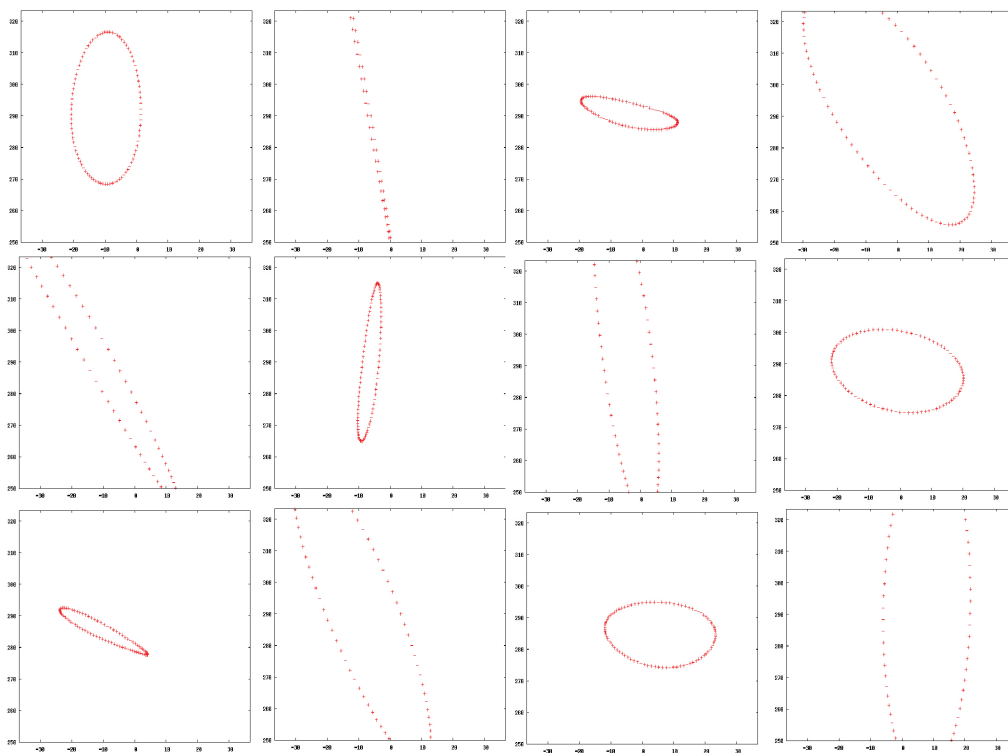


Obrázek 3.7: Výpočet pro  $f=3$  Hz

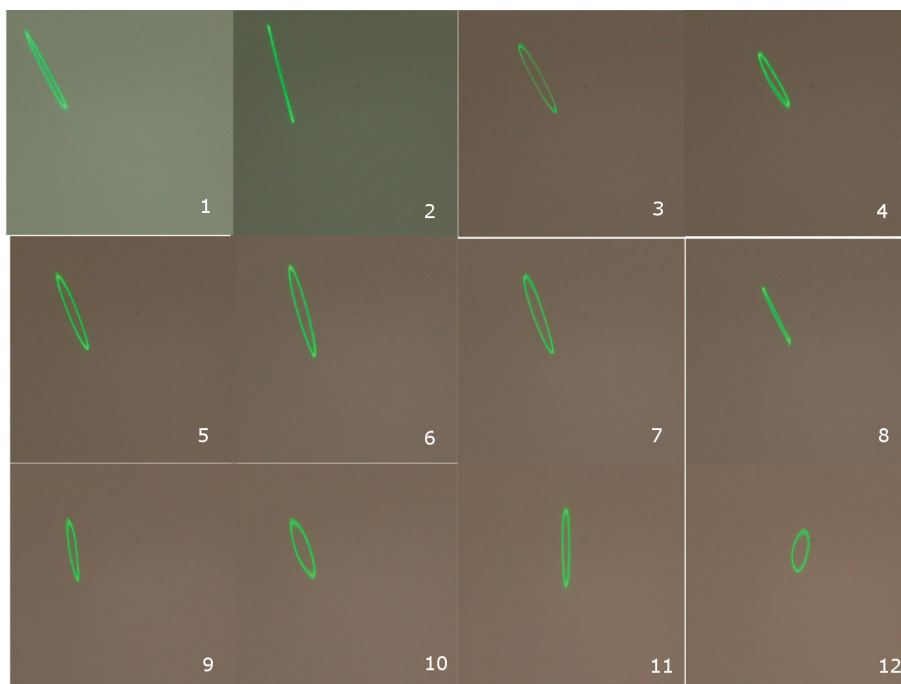




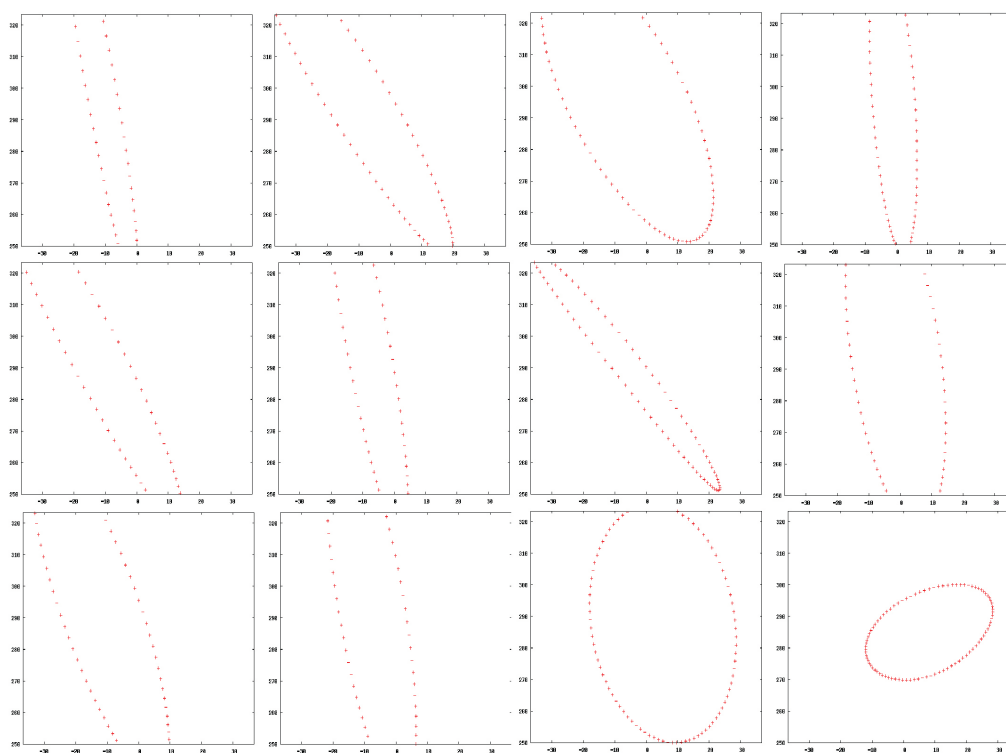
Obrázek 3.8: První měření pro  $f=5$  Hz



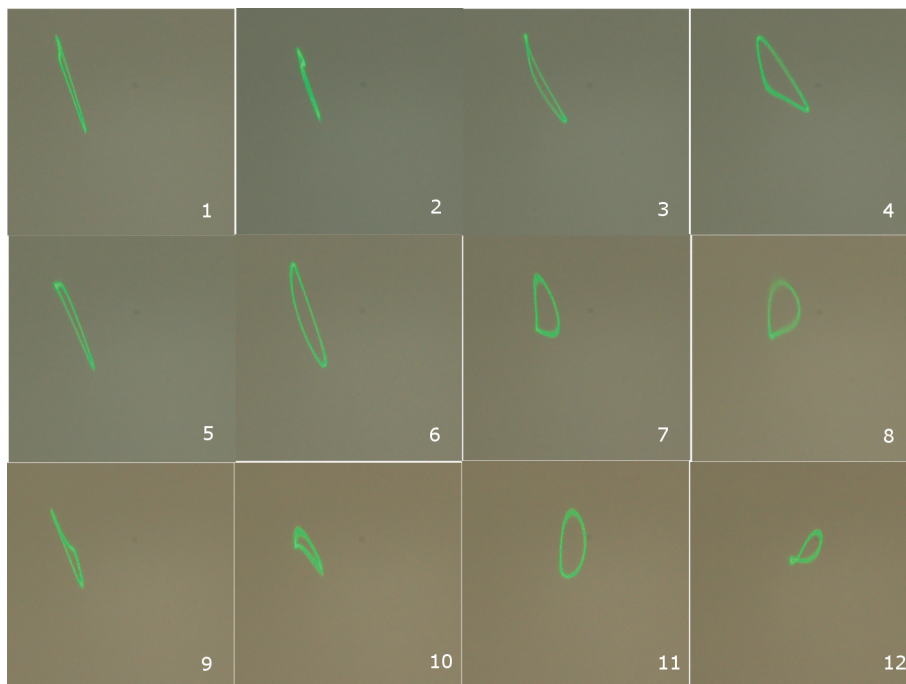
Obrázek 3.9: Výpočet pro  $f=5$  Hz



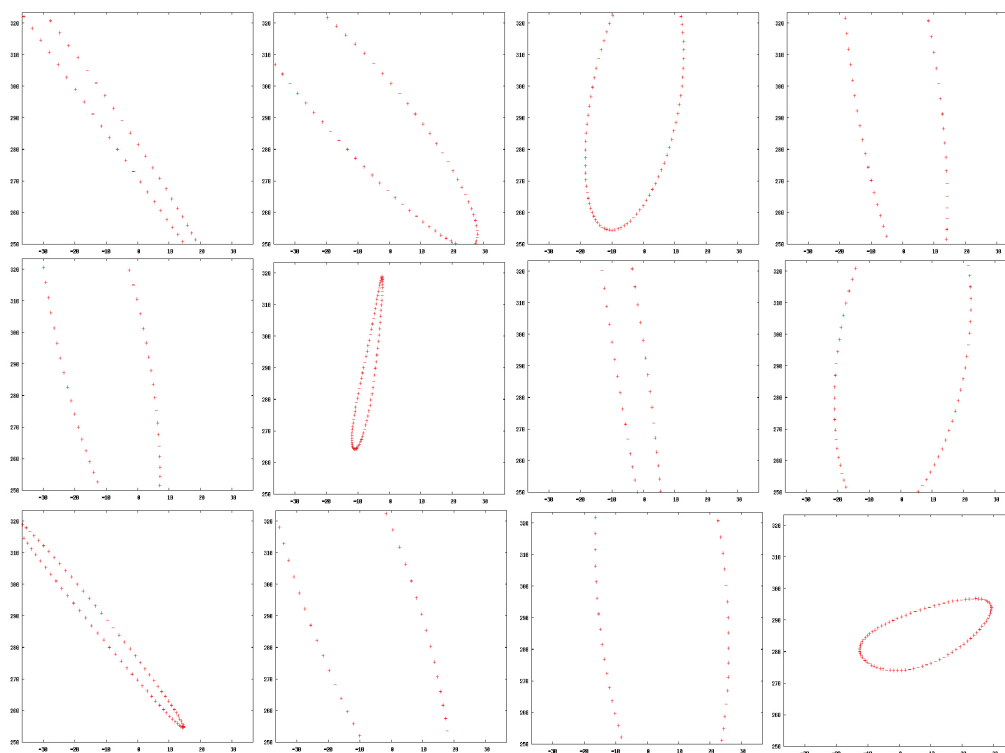
Obrázek 3.10: První měření pro  $f=8$  Hz



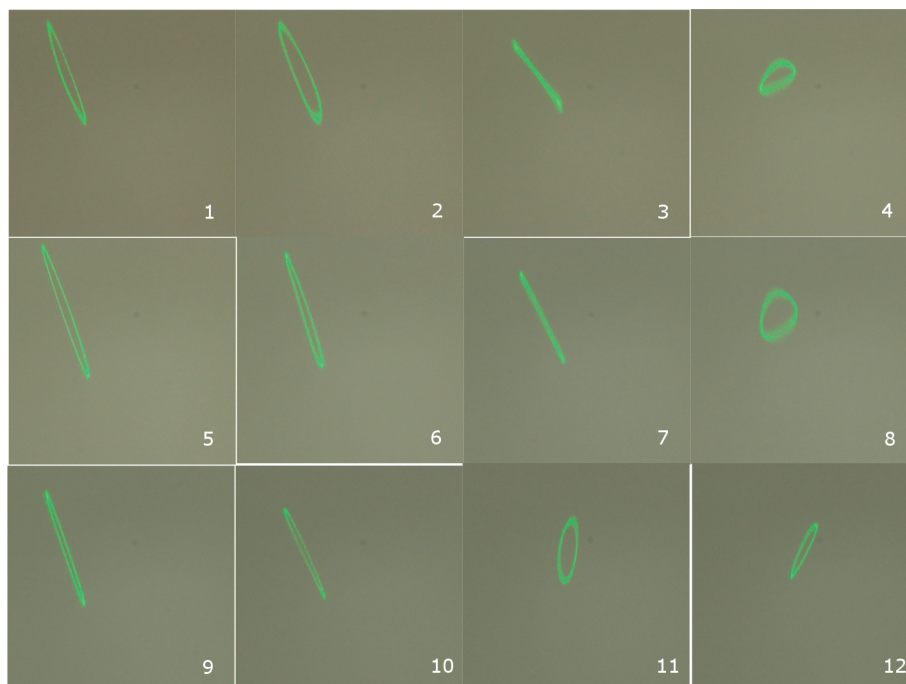
Obrázek 3.11: Výpočet pro  $f=8$  Hz



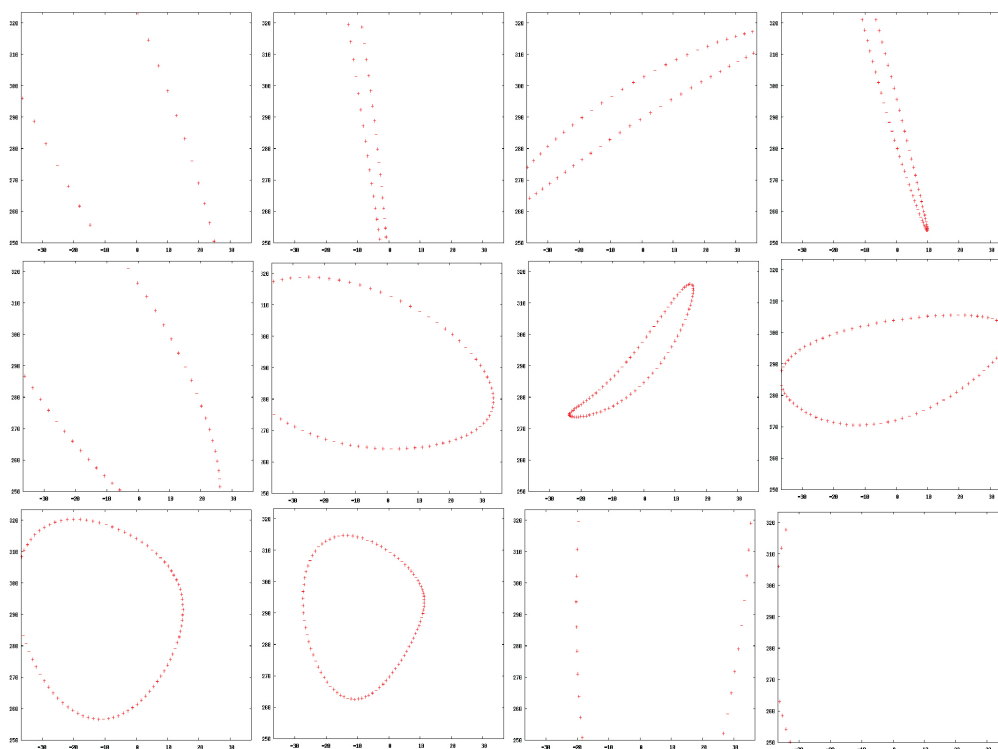
Obrázek 3.12: První měření pro  $f=10$  Hz



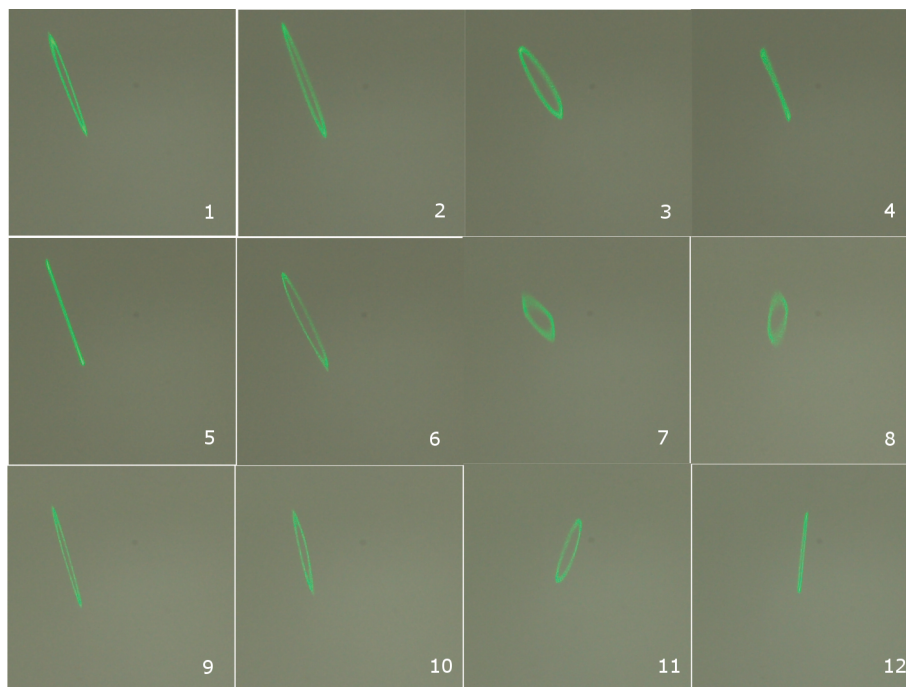
Obrázek 3.13: Výpočet pro  $f=10$  Hz



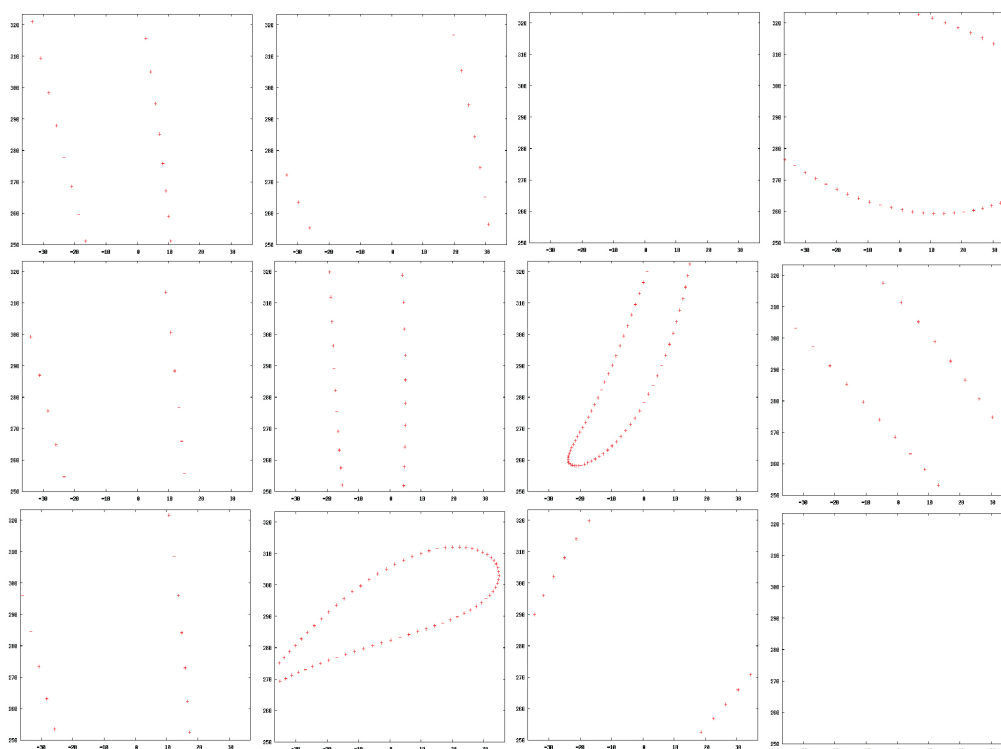
Obrázek 3.14: První měření pro  $f=15$  Hz



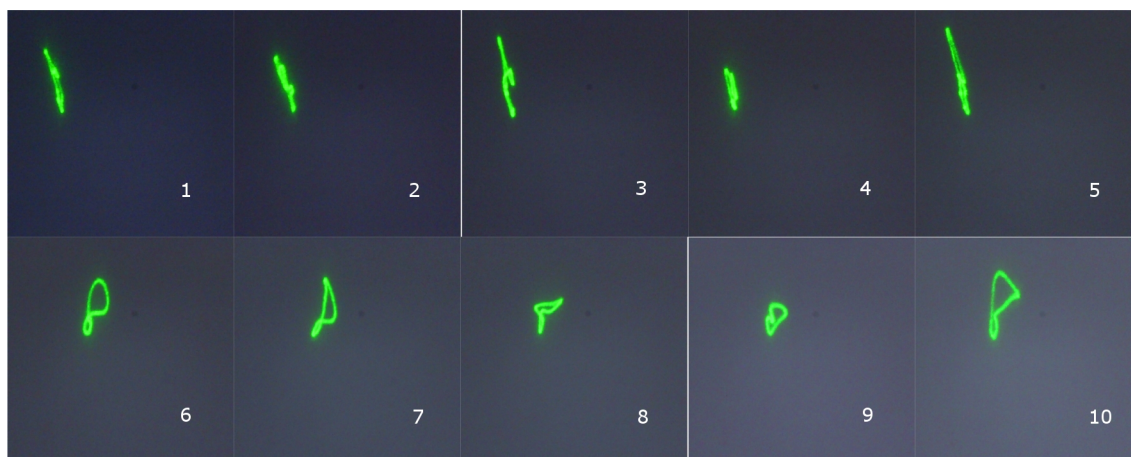
Obrázek 3.15: Výpočet pro  $f=15$  Hz



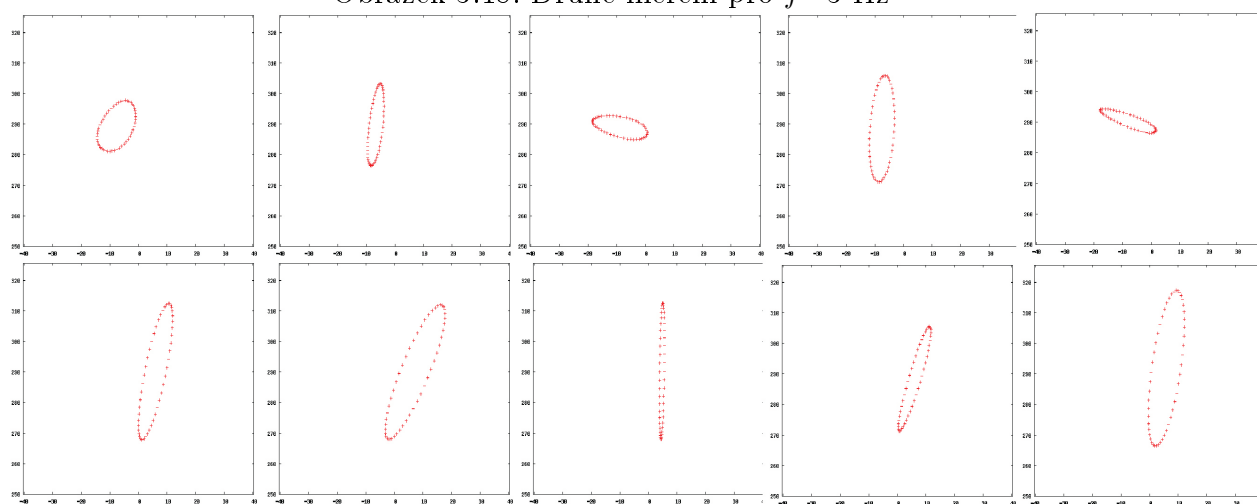
Obrázek 3.16: První měření pro  $f=20$  Hz



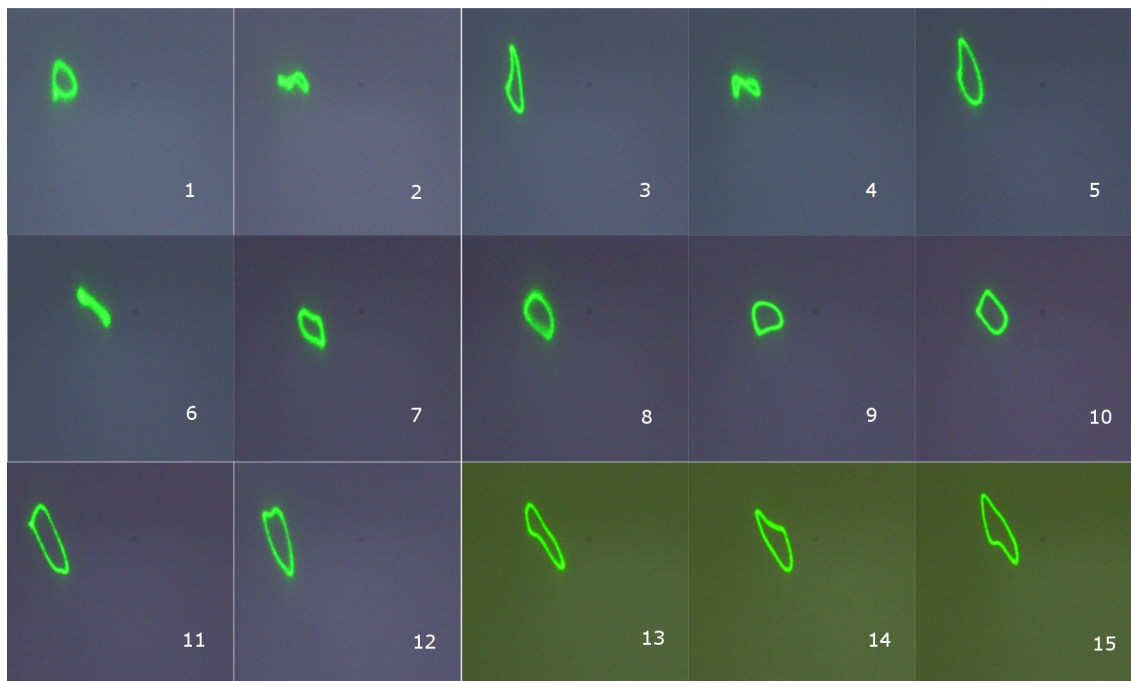
Obrázek 3.17: Výpočet pro  $f=20$  Hz



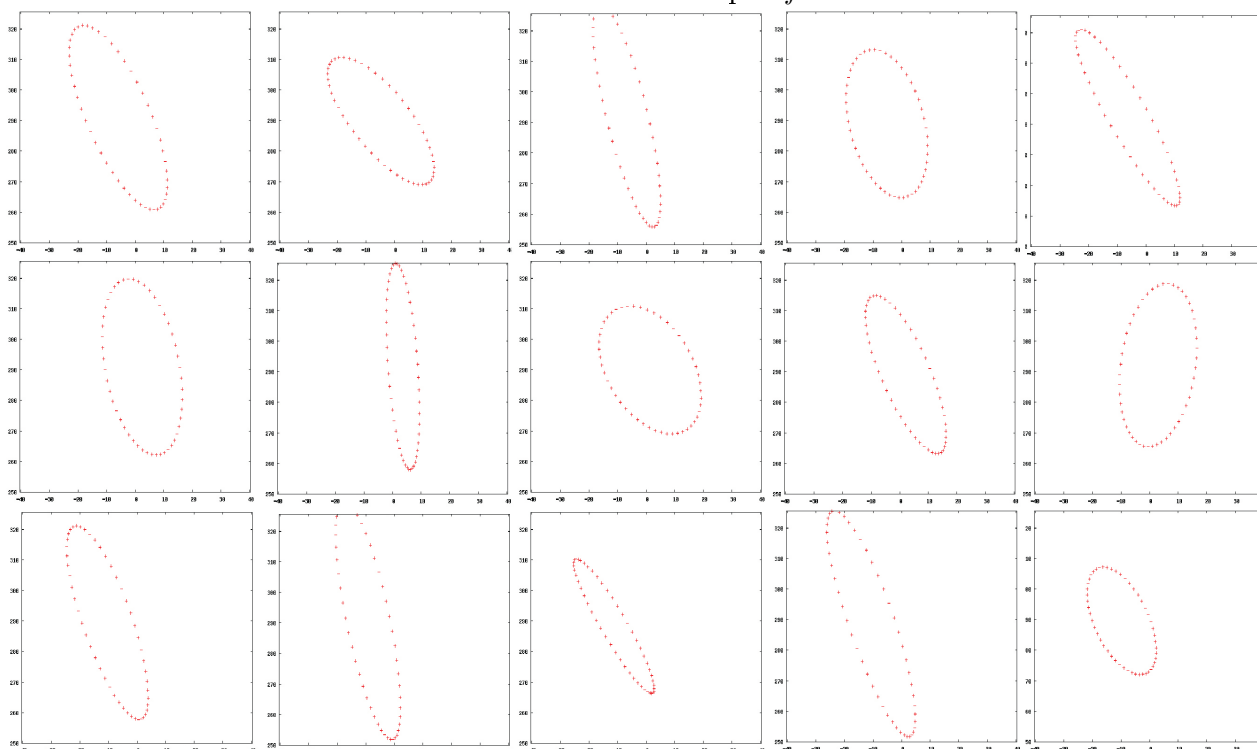
Obrázek 3.18: Druhé měření pro  $f=3$  Hz



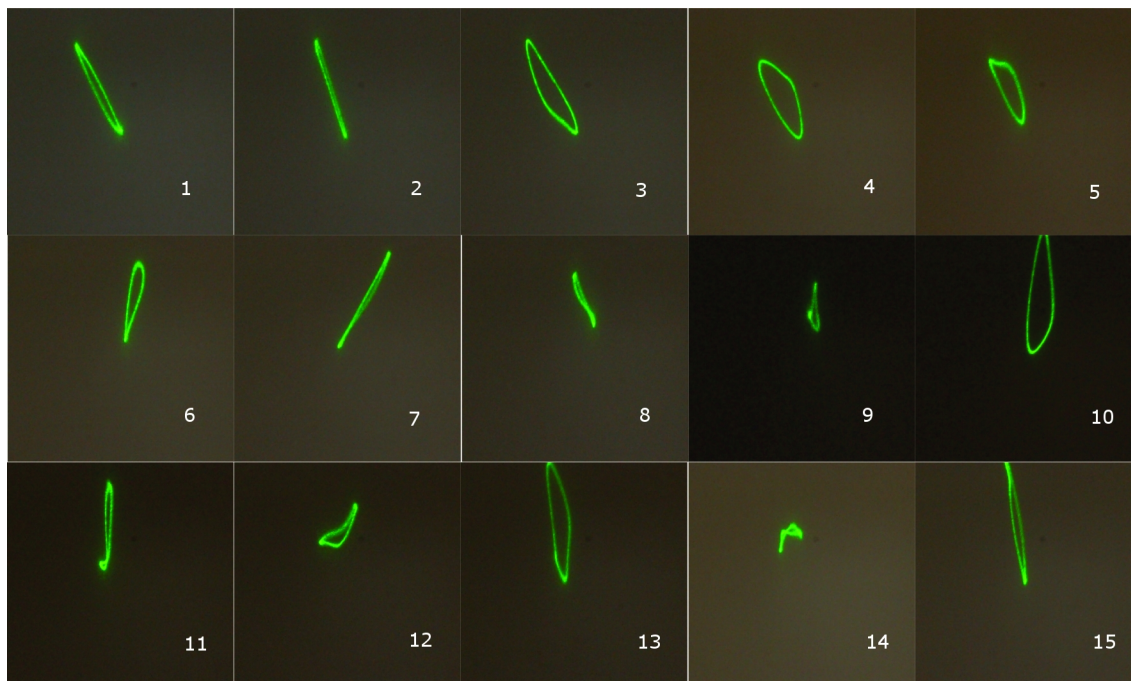
Obrázek 3.19: Výpočet pro  $f=3$  Hz



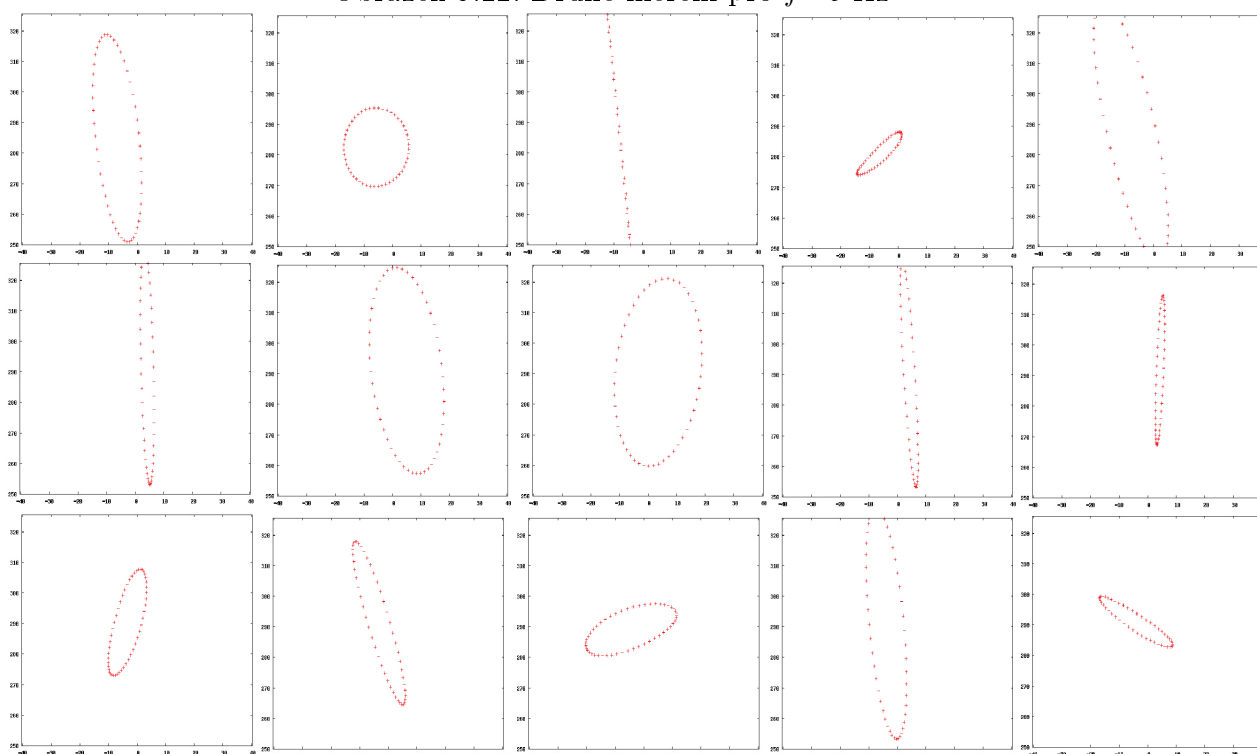
Obrázek 3.20: Druhé měření pro  $f=4$  Hz



Obrázek 3.21: Výpočet pro  $f=4$  Hz

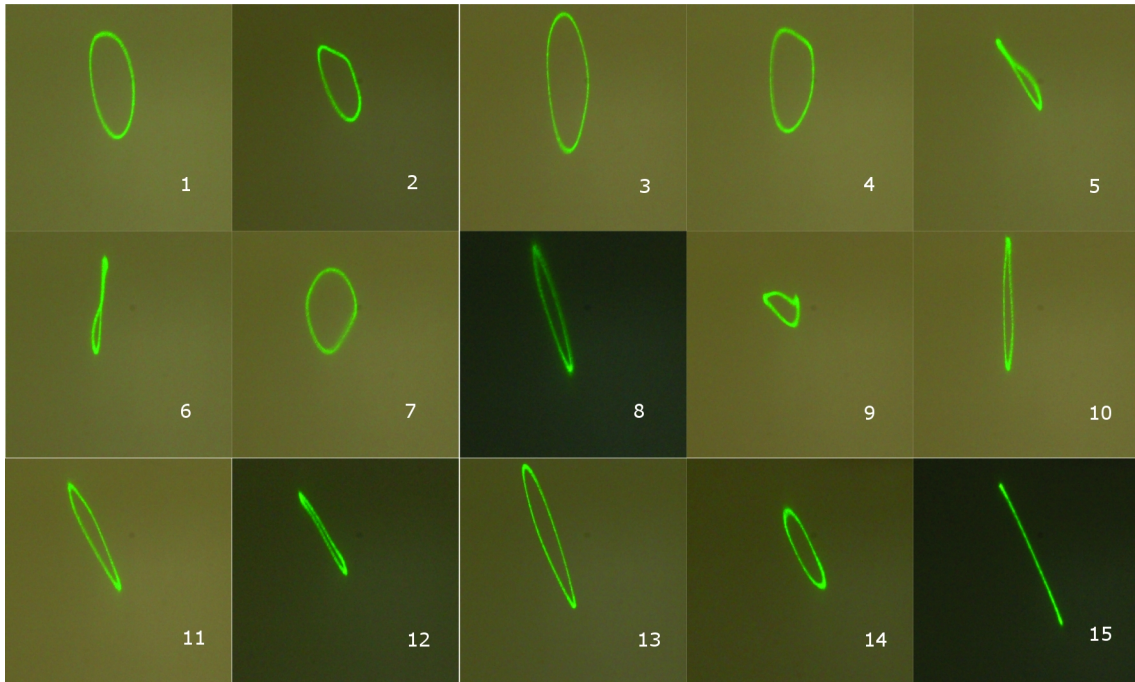


Obrázek 3.22: Druhé měření pro  $f=5$  Hz

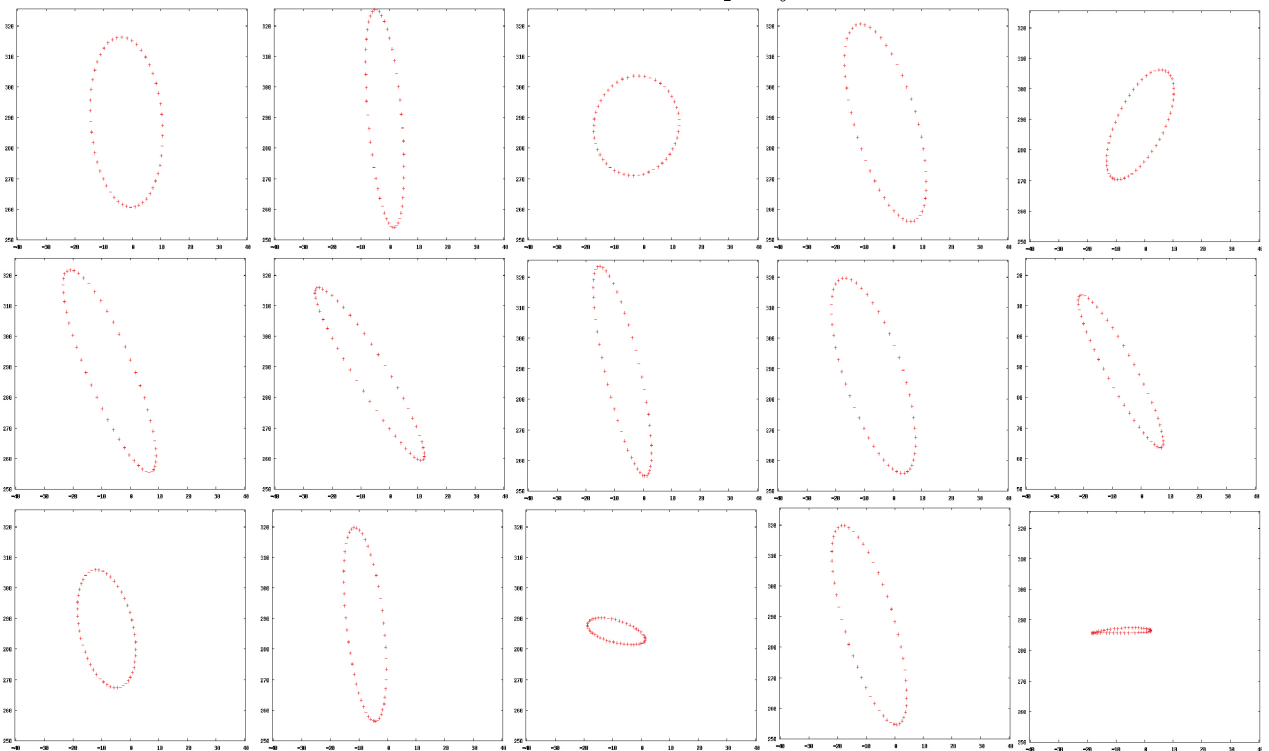


Obrázek 3.23: Výpočet pro  $f=5$  Hz

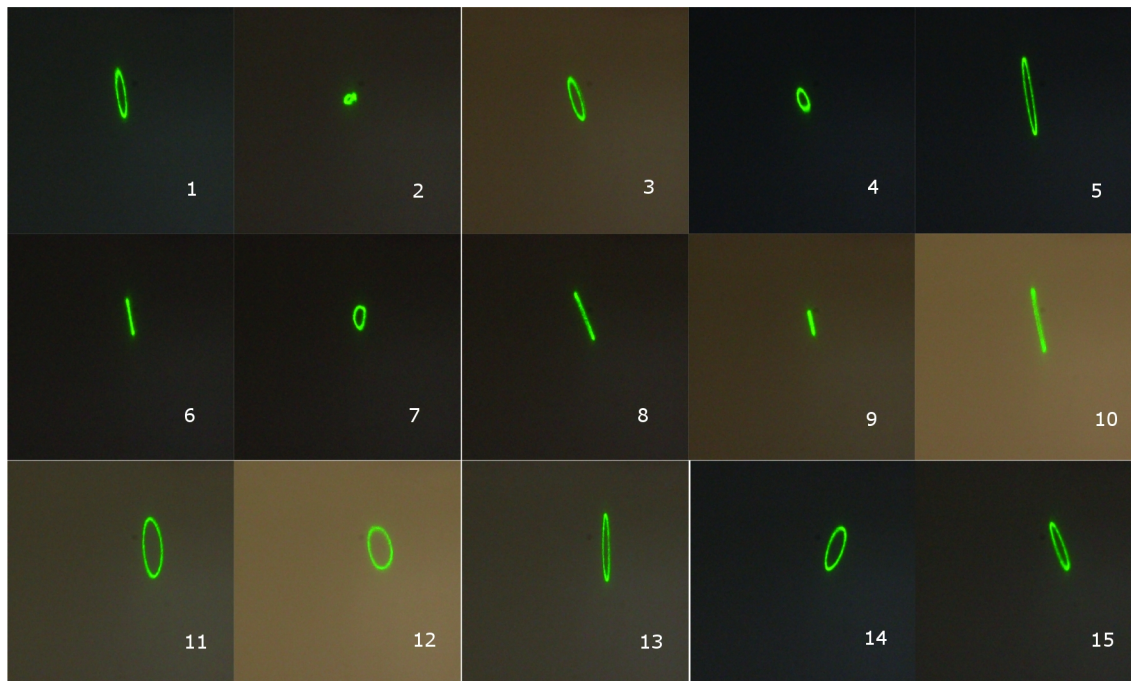




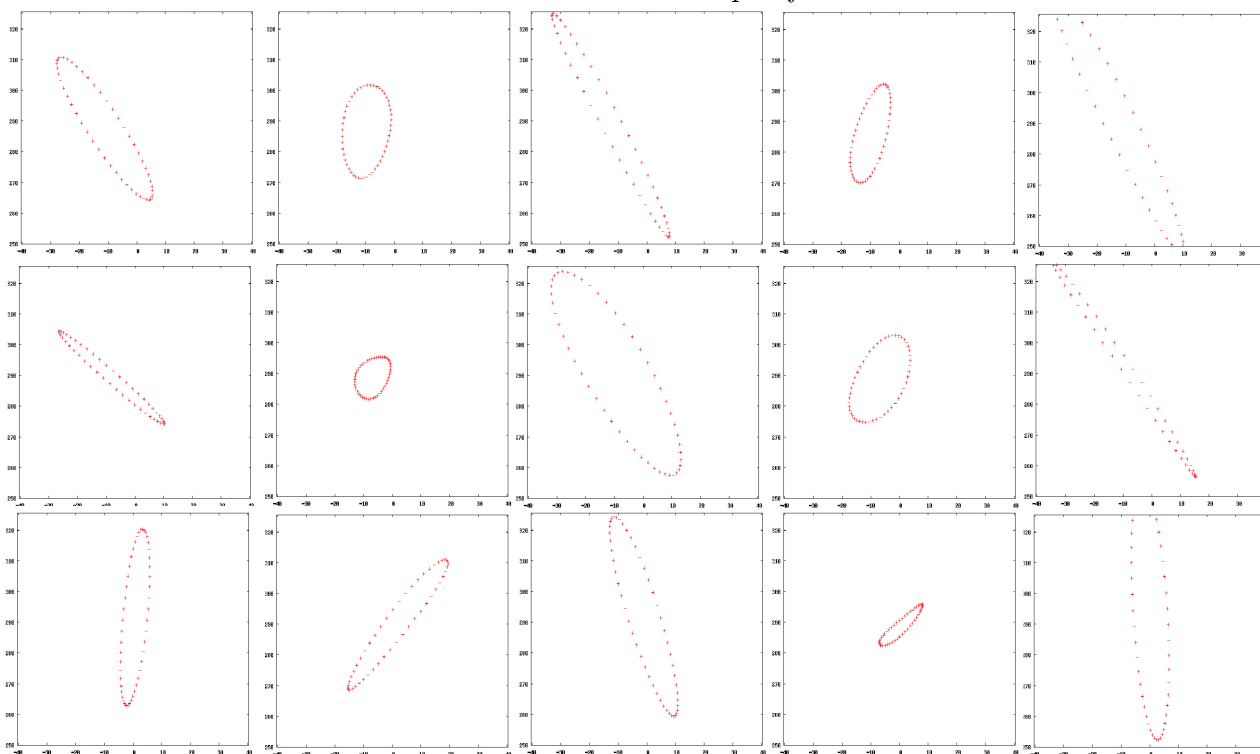
Obrázek 3.24: Druhé měření pro  $f=6$  Hz



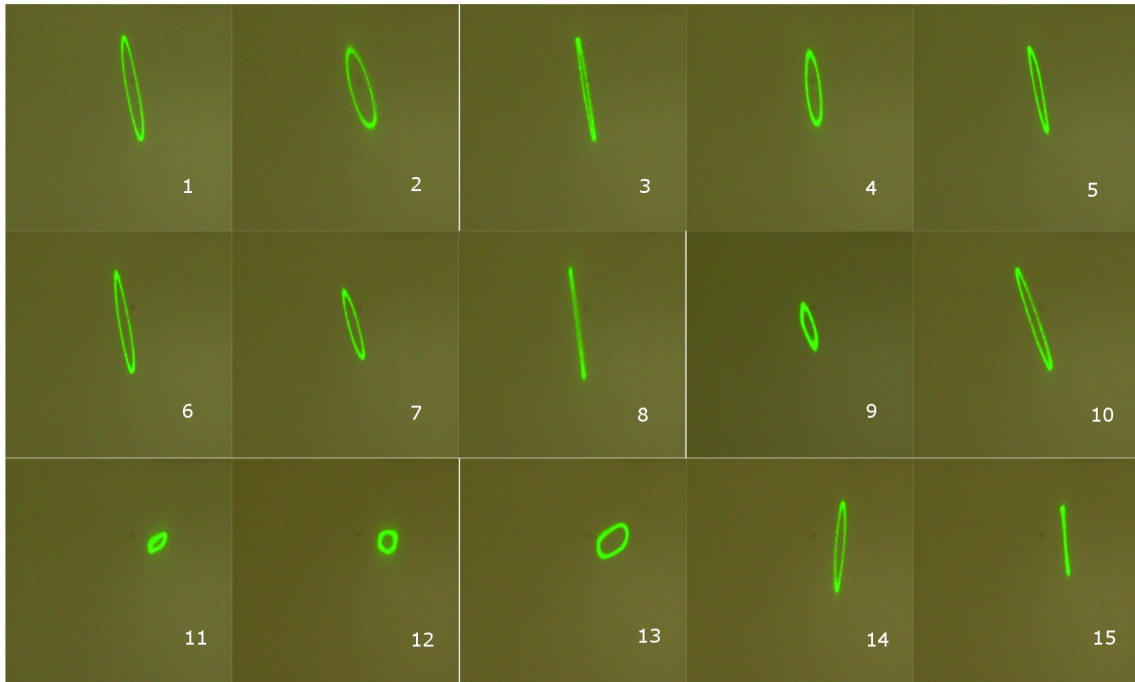
Obrázek 3.25: Výpočet pro  $f=6$  Hz



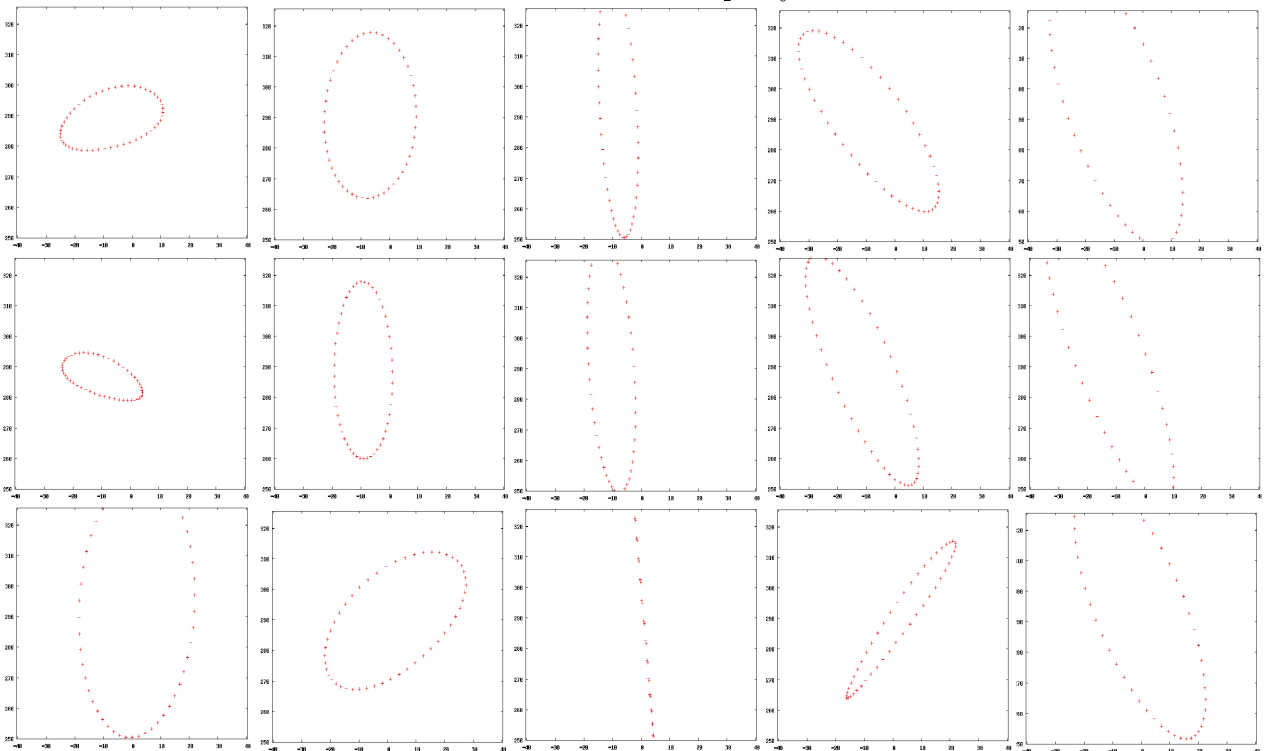
Obrázek 3.26: Druhé měření pro  $f=7$  Hz



Obrázek 3.27: Výpočet pro  $f=7$  Hz



Obrázek 3.28: Druhé měření pro  $f=8$  Hz



Obrázek 3.29: Výpočet pro  $f=8$  Hz

# Kapitola 4

## Maxwellovo rybí oko

### 4.1 Co je to Maxwellovo rybí oko

Ze vztahu (2.38) vidíme, že fázovou rychlost povrchových vln na vodě můžeme ovlivňovat pomocí hloubky. Proto by bylo zajímavé, kdyby se nám podařilo sestrojít takový profil dna, který by měl fokusační vlastnost. To znamená, že by se vlnoplochy ze zdroje zakřivovaly tak, že paprsky (to jsou kolmice k vlnoplochám) by se střetly v bodě, který je obrazem zdroje. V tomto místě bychom pak pozorovali velkou výchylku. K takovému profilu dna se pokusíme dojít pomocí analogické situace v optice, budeme se zabývat Maxwellovým rybím okem. Maxwellovým rybím okem se nazývá speciální optické médium [3], pro které má index lomu závislost

$$n(r) = \frac{c}{v(r)} = \frac{2}{1 + \frac{r^2}{R_0^2}}, \quad (4.1)$$

kde  $c$  je rychlost světla ve vakuu,  $v$  velikost fázové rychlosti světla v optickém prostředí,  $r$  velikost polohového vektoru a  $R_0$  je konstanta, která udává poloměr kružnice, na kterém je roven index lomu 1. Takové optické médium má výjimečné vlastnosti, jedná se totiž o dokonalou čočku. Pokud by se v prostoru nacházel bodový zdroj světla, tak by se paprsky jdoucí v různých směrech soustředily do jednoho bodu.

### 4.2 Vlastnosti Maxwellova rybího oka

Nejprve se pokusíme ukázat, že Maxwellovo rybí oko je dokonalou čočkou. Použijeme k tomu tzv. transformační optiku [7], [11]. Ta vychází z Fermatova principu, který nám říká, že světlo se šíří po takové trajektorii, při které je čas extrémní. To lze matematicky vyjádřit tak, že variace optické dráhy je nulová

$$\delta \int n(\vec{r}) dl = 0, \quad (4.2)$$

$n$  je index lomu,  $dl$  délkový element trajektorie. Dále zavádíme dva prostory *virtuální*, ten označme  $W$  a body z něj  $w$ , *fyzikální*, ten označme  $Z$  a body z něj  $z$ , a zobrazení  $F$ , které

přiřadí každému bodu  $z$  virtuálního prostoru bod  $z$  prostoru fyzikálního. Předpokládejme, že známe rozložení indexu lomu  $n(z)$  ve virtuálním prostoru. Tím pádem pak máme v tomto prostoru určeny trajektorie světla. Nyní si položíme otázku, zda by šlo navrhnout takové rozložení indexu lomu ve fyzikálním prostoru, při kterém by trajektorie světla byly obrazy trajektorií světla v imaginárním prostoru určené pomocí zobrazení  $F$ . Ukazuje se, že takové rozložení lze sestavit. Uvažujme bod  $w_0$  ve virtuálním prostoru a nějaké posunutí  $dl$ , nyní zobrazíme pomocí  $F$  bod  $w_0$  na bod  $z_0$  a posunutí nám přejde na  $dL$ . Pak se musí integrandy ve výrazu (4.2) v obou prostorech rovnat

$$n(w_0) dl = n(z_0) dL. \quad (4.3)$$

Je jasné, že uvedená podmínka musí platit pro všechny body  $z$ ,  $w$  a všechny směry. Pro index lomu ve fyzikálním prostoru pak dostáváme vztah

$$n(z_0) = n(w_0) \frac{dl}{dL}. \quad (4.4)$$

Pokud budeme uvažovat nějaké obecné zobrazení, které bude zobrazovat virtuální prostor se skalárním indexem lomu, výsledkem bude fyzikální prostor s indexem lomu, který může záviset na směru a lze ho pak popsat tenzorem. Velmi důležitou třídou zobrazení jsou taková, která zachovávají izotropnost indexu lomu. Takovou vlastnost mají konformní zobrazení, která zachovávají úhly. Příkladem konformního zobrazení je například stereografická projekce.

Transformační optika nám umožňuje elegantní řešení problémů s šířením paprsků světla. Předpokládejme, že ve virtuálním prostoru máme nějaké rozložení indexu lomu, u kterého známe trajektorie paprsků. Ve fyzikálním prostoru máme nějaké optické médium, u kterého známe rozložení indexu lomu, ale nedaří se nám určit trajektorie paprsků. Pokud se nám podaří nalézt takové zobrazení  $F$ , pomocí kterého lze převést index lomu virtuálního prostoru na index lomu fyzikálního prostoru, pak trajektorie světla ve fyzikálním prostoru jsou jednoduše obrazy trajektorií světla v prostoru virtuálním.

Vzhledem k tomu, že budeme řešit dvourozměrný problém, mohlo by se zdát, že pro výpočet Maxwellova rybího oka nám bude stačit zobrazení mezi rovinami, ovšem tak jednoduché to nebude. Náš virtuální prostor v případě Maxwellova rybího oka bude neeuklidovský povrch a budeme předpokládat, že na tomto povrchu je index lomu konstantní, rovný 1, a proto můžeme z integrálu v (4.2) vytknout index lomu. Tím pádem budeme extremalizovat dráhu, a proto se světlo bude šířit po geodetikách na daném povrchu. Je ukázáno v [11], jak ze známého indexu lomu sestavit daný neeuklidovský povrch, a také, že pro Maxwellovo rybí oko je virtuálním povrchem sféra s poloměrem  $R_0$  a zobrazením stereografická projekce. Pokusíme se tedy z těchto faktů a vztahu (4.4) dojít k rovnici (4.1). Pro vyjádření délkového elementu neeuklidovského povrchu zavedme válcové souřadnice  $(R, \theta, Z)$ , přičemž předpokládáme závislost  $Z = Z(R)$  (uvažujeme pouze o závislosti  $n(r)$ , při které by měl být povrch osově symetrický podél osy  $Z$ ). Pak dostáváme

$$dl^2 = dR^2 + R^2 d\theta^2 + dZ^2 = dR^2 + R^2 d\theta^2 + \left(\frac{dZ}{dR}\right)^2 dR^2. \quad (4.5)$$

Ještě upravíme na výsledný tvar

$$dl^2 = \left[ 1 + \left( \frac{dZ}{dR} \right)^2 \right] dR^2 + R^2 d\theta^2. \quad (4.6)$$

Pro element optické dráhy ve fyzikálním prostoru dostáváme (použijeme polární souřadnice)

$$dL^2 = n^2 (dr^2 + r^2 d\varphi^2). \quad (4.7)$$

Pomocí stereografické projekce získáme vztahy mezi virtuálním povrchem a fyzikální rovinou

$$Z = \frac{R_0 (r^2 - R_0^2)}{R_0^2 + r^2}, \quad R = \frac{2R_0^2 r}{R_0^2 + r^2}, \quad \theta = \varphi. \quad (4.8)$$

Pomocí vztahů (4.8) lze přepsat element délky virtuálního povrchu

$$dl^2 = \left[ \left( \frac{dZ}{dr} \right)^2 + \left( \frac{dR}{dr} \right)^2 \right] dr^2 + R(r)^2 d\varphi^2. \quad (4.9)$$

Využijeme tedy vztah (4.3) a dostaneme

$$\begin{aligned} dL^2 = n^2 (dr^2 + r^2 d\varphi^2) &= \left[ \left( \frac{dZ}{dr} \right)^2 + \left( \frac{dR}{dr} \right)^2 \right] dr^2 + R(r)^2 d\varphi^2 \\ &= \frac{4R_0^4}{(R_0^2 + r^2)^2} dr^2 + \frac{4R_0^4 r^2}{(R_0^2 + r^2)^2} d\varphi^2. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Z rovnice (4.10) tak získáváme index lomu pro Maxwellovo rybí oko.

Z výše uvedených vlastností plyne, že Maxwellovo rybí oko je dokonalou čočkou. Je známo, že geodetiky jsou na povrchu koule hlavní kružnice, které vzniknou jako průnik povrchu koule s rovinami procházejícími středem koule. Uvažujme, že na povrchu koule máme bodový zdroj, z něhož se šíří světlo do všech směrů. Důsledkem symetrie sféry je, že všechny paprsky se znovu protnou a to na bodě sféry, který je protilehlý bodu zdroje. Proto se i po zobrazení stereografickou projekcí ve fyzikálním prostoru všechny paprsky jdoucí z bodového zdroje setkají v jiném bodě, který je obrazem bodu původního.

### 4.3 Maxwellovo rybí oko pro vlny na vodě

Rozložení indexu lomu pro optické Maxwellovo rybí oko je dáno vztahem (4.1). Pokud by se nám podařilo nalézt takový profil dna nádoby, který by dával stejné rozložení indexu lomu i pro vlny na vodě, dostali bychom Maxwellovo rybí oko pro vlny na vodě. Jediným rozdílem vůči vztahu (4.1) by bylo to, že  $c$  by značilo fázovou rychlost referenční vlny, proto, aby nedošlo k omylu, ji budeme značit  $c_{ref}$ . Potom dostáváme analogický vztah pro vlny na vodě

$$n(r) = \frac{c_{ref}}{v(r)} = \frac{2}{1 + \frac{r^2}{R_0^2}}. \quad (4.11)$$

Z rovnice (4.11) můžeme vyjádřit fázovou rychlost  $v$  v závislosti na vzdálenosti od počátku a ta by se měla rovnat fázové rychlosti vlny vyjádřené podle vztahu (2.38)

$$\frac{c_{ref}}{2} \left( 1 + \frac{r^2}{R_0^2} \right) = \sqrt{\tanh(kl) \left( \frac{g}{k} + \frac{\sigma}{\rho} g k \right)}. \quad (4.12)$$

V tuto chvíli jsme dostali potřebnou závislost hloubky dna na vzdálenosti od osy symetrie. Výsledek (4.12) ještě upravíme na tvar

$$l = \frac{1}{k} \operatorname{arctanh} \left( \frac{c_{ref}^2 k \rho \left( 1 + \frac{r^2}{R_0^2} \right)^2}{4(g \rho + \sigma g k^2)} \right). \quad (4.13)$$

Maxwellovo rybí oko pro svoji fokusační vlastnost využívá celou rovinu. Z experimentálního hlediska je ovšem nemožné uvažovat o nekonečném poloměru nádoby. Ukazuje se však, že chybějící oblast rybiho oka nám nahradí odrazy vln od stěny nádoby v případě, že poloměr rybiho oka bude právě  $R_0$ . O tom, že to takto bude fungovat, se můžeme přesvědčit tím, že si představíme zrcadlo, které se nachází v rovině  $xy$  vložené do sféry virtuální povrchu Maxwellova rybiho oka. Tedy paprsky se budou odrážet od tohoto zrcadla (tento postup je umožněn tím, že stereografická projekce je konformní zobrazení), a proto se nedostanou do původního obrazu zdroje  $B$ , ale do bodu, který dostaneme zrcadlením bodu  $B$  podle roviny  $xy$ . Při odrazu vln od stěny nádoby nedochází ke změně fáze vlny, proto z uvedených argumentů plyne, že fokusační vlastnost zůstane zachována.

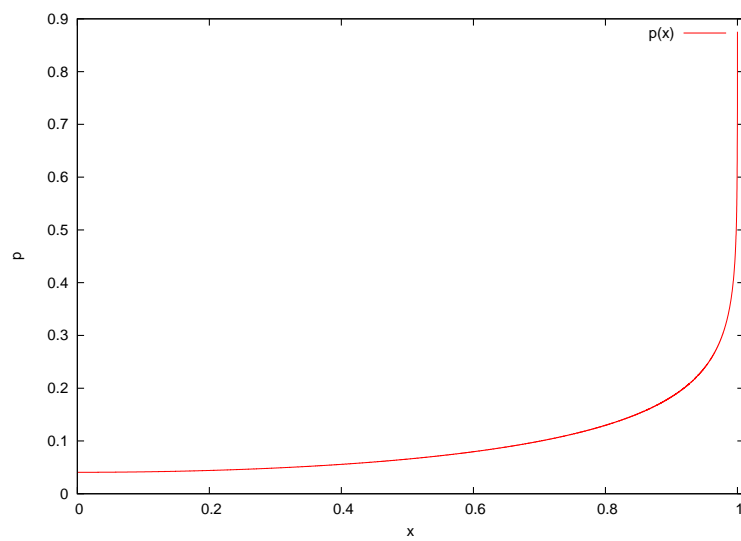
Nyní se vraťme k diskuzi o tvaru profilu nádoby pro Maxwellovo rybí oko. Vztah (4.13) upravíme do trošku jiné podoby, určíme poměr hloubky dna ku vlnové délce  $\lambda$ . Dostáváme pak vztah

$$p = \frac{l}{\lambda} = \frac{1}{2\pi} \operatorname{arctanh} \left( \frac{c_{ref}^2 k \rho \left( 1 + \frac{r^2}{R_0^2} \right)^2}{4(g \rho + \sigma g k^2)} \right). \quad (4.14)$$

Pokud by byl poměr  $p$  malý ve velkém rozsahu rybiho oka, vlny by se silně tlumily a fokusační efekt by byl nepozorovatelný. Předpokládejme, že bychom tedy chtěli sestavit profil podle vztahu (4.13) při daném vlnovém čísle  $k$  a poloměru  $R_0$ . V takovém případě existuje jediný parametr,  $c_{ref}$ , kterým lze měnit profil dna. Pokusíme se tedy určit parametr  $c_{ref}$  tak, aby poměr  $p$  byl co největší. Funkce  $\operatorname{arctanh}$  je definována na intervalu  $(-1, 1)$ , přičemž  $\lim_{x \rightarrow \pm 1} \operatorname{arctanh}(x) = \pm \infty$ . Z uvedených vlastností funkce  $\operatorname{arctanh}$  dostáváme podmínku na velikost rychlosti referenční vlny. Musí totiž platit:

$$\frac{c_{ref}^2 k \rho}{g \rho + \sigma g k^2} \leq 1. \quad (4.15)$$

Pro případ rovnosti ve vztahu (4.15) dostáváme limitní situaci, kdy na okraji nádoby je hloubka dna nekonečná. Zároveň je také  $p$  nejvyšší možné. Na obrázku 4.1 je zobrazena funkce  $p$  pro tento případ. Vidíme, že bude docházet k poměrně velkému tlumení. Pro situaci, kdy bude hloubka konečná ve všech místech rybiho oka, pak musí plynout stejný závěr jako pro limitní případ. Proto experimentální realizace Maxwellova rybiho oka pro vlny na vodě bohužel možná není.



Obrázek 4.1: Průběh funkce  $p$ ,  $x$  zde značí poměr  $r/R_0$ .



# Kapitola 5

## Závěr

V této práci jsme se zabývali dvěma tématy, které souvisely s vlnami na vodě. Prvním z nich bylo studium fázových singularit na vodní hladině. Ke vzniku fázových singularit jsme využili interferenci tří válcových vln. Jako jedním z klíčových problémů bylo nalezení metody pro hledání fázových singularit, to znamená, zjistit či se dané místo vychyluje či nikoli. Takovou metodu se nám bohužel nepodařilo nalézt. Jediné, co nás napadlo, bylo zkoumat vlny na vodě pomocí odrazu laserového paprsku od vodní hladiny. Zajímala nás trajektorie stopy laseru, která se vytvoří po odrazu od vodní hladiny na zdi. Sestrojili jsme tedy experimentální aparaturu potřebnou k této metodě. V teoretickém řešení problému jsme zanedbali odrazy vln od stěn kádě. Numerickým výpočtem jsme hledali polohy fázových singularit a dále trajektorii stopy laseru na zdi. V experimentální části jsme se nejprve pokusili naměřit několik vybraných míst pro různé frekvence a porovnat je s výpočtem. Dále jsme se pokusili proměřit okolí fázových singularit. Výsledky byly znovu porovnány s numerickým výpočtem. Při porovnávání se ukázalo, že teoretický model je nedostatečný. Bylo potřeba započítat i odražené vlny, které velmi ovlivní polohy singularit i tvar vodní hladiny. Ukázalo se, že použitá metoda není dostatečně průkazná pro nalezení fázových singularit. K dalším pokusům s fázovými singularitami zřejmě bude nutné nalézt jinou metodu.

Druhým tématem bylo nalezení profilu dna nádoby, kterému by odpovídalo Maxwellovo rybí oko pro vlny na vodě. Nejprve jsme pomocí transformační optiky ukázali, že rybí oko je opravdu dokonalou čočkou. Pak jsme našli hledaný profil dna nádoby. Bohužel se ukázalo, že by hloubka dna ve většině nádoby byla velmi malá ku vlnové délce. Docházelo by k velkému tlumení. Proto experimentálně realizovat Maxwellovo rybí oko není možné.

# Kapitola 6

## Dodatky

### 6.1 Besselovy funkce

Besselovými funkcemi [1], [6], [12] nazýváme řešení Besselovy diferenciální rovnice, která má tvar

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - \alpha^2) y = 0, \quad (6.1)$$

kde  $\alpha$  je komplexní nebo reálný parametr. Besselovu funkci prvního druhu můžeme definovat pomocí Taylorovy řady v  $x = 0$  jako

$$J_\alpha(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! \Gamma(m + \alpha + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\alpha}. \quad (6.2)$$

Besselova funkce druhého druhu  $Y_\alpha$  spolu s Besselovou funkcí  $J_\alpha$  tvoří lineárně nezávislá řešení rovnice (4.1). Pro  $\alpha$ , které není přirozeným číslem, dostáváme

$$Y_\alpha(x) = \frac{J_\alpha(x) \cos(\alpha\pi) - J_{-\alpha}(x)}{\sin(\alpha\pi)}. \quad (6.3)$$

Pro přirozené  $\alpha$  lze Besselovu funkci druhého druhu definovat pomocí limity takto:

$$Y_n(x) = \lim_{\alpha \rightarrow n} Y_\alpha(x). \quad (6.4)$$

Další důležitou dvojicí lineárně nezávislých řešení rovnice (4.1) jsou Hankelovy funkce. Ty lze vyjádřit pomocí  $J_\alpha$  a  $Y_\alpha$  jako

$$H_\alpha^1(x) = J_\alpha^1(x) + iY_\alpha^1(x) \quad (6.5)$$

$$H_\alpha^2(x) = J_\alpha^1(x) - iY_\alpha^1(x) \quad (6.6)$$

Pro nás bude důležitá následující identita

$$\frac{d}{dx} [x^\alpha H_\alpha^1(x)] = x^\alpha H_{\alpha-1}^1. \quad (6.7)$$

## 6.2 Skripty

Skripty byly napsány pro program GNU Octave [14]. Cílem skriptu `kalibrace.m` je ze zadané frekvence pomocí vztahu (2.38) určit vlnové číslo a vlnovou délku. Následuje zadání dvojnásobné amplitudy podle níž pak určíme kalibrační konstanty, které pak používají další skripty.

```
kalibrace.m
s = 0.072; %povrchove napeti
g = 9.81; %tihove zrycheleni
l = 0.4; %hloubka kade
r = 1000; %hustota
f = input("Frekvence: "); %nacte frekvenci
g = inline('[sqrt((g * x + s * x**3 / r) * tanh(x * l))] - f * 2*pi','x'); %zadavame funkci,ze ktere
spocitame vlnove cislo
[x,j,info] = fsolve(g,[0]); %resi predeslou rovnici
delka = (2*pi / x) * 100 %vlnova delka v cm
k = x / 100 %vlnove cislo v cm
r = [1.37,1.385,1.43]; %polomery valcovych trubicek
d = input("Delka cary: "); %nacte dvojnásobnou amplitudu
a = d / (2 * abs(besselh(0,1,k * (r(1) / 2)))) %kalibracni konstatnta a
b = d / (2 * abs(besselh(0,1,k * (r(2)/2)))) %kalibracni konstatnta b
c = d / (2 * abs(besselh(0,1,k*(r(3) / 2)))) %kalibracni konstatnta c
```

Skript `singularita.m`, jak již z názvu vyplývá, má za úkol najít fázové singularity v předepsané oblasti pomocí podmínky (2.13). Jelikož procedura `fsolve`, která řeší potřebnou nelineární rovnici, potřebuje zadat počáteční bod výpočtu, musíme předepsanou oblast procházet dvěma for cykly, které mění počáteční bod výpočtu. Vzhledem k tomu, že pro blízké body může řešení konvergovat ke stejným výsledkům, je nutné ještě vybrat pouze různá řešení. Poslední fáze výpočtu přiřazuje nalezeným singularitám odpovídající polohu laseru tak, aby laser na ni právě svítil.

```
singularita.m
K = [];
P = [];
pocatek = [0,0]; %udava polohu obdelniku ve kterem nas budou zajimat singularity
delka = [30,30]; %delka stran obdelniku
deleni = [20,20]; %pocet dilku, na ktere rozdělíme x a y stranu obdelniku
e = 2; %skalovací konstanta velikosti trojuhelniku
scitac = 1;
for m = 0 : deleni(1)
    q = pocatek(1) + delka(1) / deleni(1) * m; %x souradnice pocatecni hodnoty pro vypocet
    for n = 0 : deleni(2)
        w = pocatek(2) + delka(2) / deleni(2) * n; %y souradnice pocatecni hodnoty pro vypocet
        f = inline ('[y = abs((besselh(0,1,k * sqrt(x(1) ** 2 + x(2) ** 2)) + ko2 * besselh(0,1,k * sqrt(x(2)
** 2 + (x(1) - e * 15) ** 2)) + ko3 * besselh(0,1,k * sqrt((x(2) - e * 12.990381) ** 2 + (x(1) - e * 7.5) ** 2))),
y = abs((besselh(0,1,k * sqrt(x(1) ** 2 + x(2) ** 2)) + ko2 * besselh(0,1,k * sqrt(x(2) ** 2 + (x(1) - e * 15)
** 2)) + ko3 * besselh(0,1,k * sqrt((x(2) - e * 12.990381) ** 2 + (x(1) - e * 7.5) ** 2))))]', 'x'); %absolutni
hodnota souctu beselovych funkci
        [x,j,info] = fsolve(f,[q,w]) %resi predeslou rovnici pro pocatecni body
        if (info == 1 & x(1) <= (pocatek(1) + delka(1)) & x(1) >= pocatek(1) & x(2) <= (pocatek(2)+delka(2))
& x(2) >= pocatek(2)) %podminka konvergentnosti reseni a velikosti zkoumane plochy
            K(scitac,1) = x(1); %nacte x slozku reseni do matice
            K(scitac,2) = x(2); %nacte y slozku do matice
            scitac = scitac + 1;
        endif
    endfor
endfor
endfor
D = size(K);
```

```

if (D(1)>1)
    for n = 1 : (D(1) - 1) %tento cyklus projizdi matici reseni a hleda stejna reseni
        for m = (n + 1) : D(1)
            if (abs(K(n,1) - K(m,1)) < 0.001 & abs(K(n,2) - K(m,2)) < 0.001)%pokud jsou reseni stejna ulozi do
radku cisla 12345
                K(m,1) = 12345;
                K(m,2) = 12345;
            endif
        endfor
    endfor
endif
[radky,sloupce] = find(K == 12345); %ziskame polohy cisel 12345 v matici
B = size(radky)(1) / 2;
scitac = 0;
for n = 1 : B %tento for cyklus maze radky s cilem 12345
    v = radky(n) - scitac;
    K(v,:) = [];
    scitac = scitac + 1;
endfor
h = size(K)(1);
for n = 1 : h %urci polohu laseru pro vypoctene singularity
    smer = [-1.4,17.1,-25.3]; %smer laseru
    rovina = 29.84; %vzdalenost od hladiny
    posun = [33.9,6.3]; %posun souradnicovych systemu
    t = rovina / smer(3);
    poloha = [t * smer(1) + K(n,1),t * smer(2) + K(n,2)];
    polohalaseru = poloha + posun; %poloha laseru
    P(n,:) = polohalaseru; %nacte polohu laseru do matice
endfor

```

Poslední skript `odraz.m` ukazuje příklad výpočtu trajektorie stopy laseru na zdi. Využívá rovnic popsanych podrobně v oddílu 2.4.

```

odraz.m
Q = [];
scitaci = 1;
polohadrzaku = [42,45,48,51,42,45,48,51,42,45,57,59;-6,-6,-6,-6,-4,-4,-4,-4,-2,-2,-2,-2,];
for n = 1 : 12 %cyklus pro vypocet polohy dopadu laseru na nevychlenou hladinu
    smer = [-1.4,17.1,-25.3]; %smer laseru
    posun = [33.7,6.3]; %posun souradnych soustav
    poloha = [polohadrzaku(1,n),polohadrzaku(2,n)] - posun;
    t = - 29.84 / smer(3);
    q = t * smer(1) + poloha(1); %x poloha dopadu laseru
    o = t * smer(2) + poloha(2); %y poloha dopadu laseru
    scitac = 1;
    delenicasu = 1 / (50 * f);%
    w = 2 * pi * f;%uhlova frekvence
    for t = 0 : delenicasu : (1/ f) %cyklus,ktery pro dany cas spocita polohu stopy laseru na zdi
        g = inline ('[y = real((a * besselh(0,1,k * sqrt(x(1) ** 2 + x(2) ** 2)) + b * besselh(0,1,k * sqrt(x(2)
** 2 + (x(1)-e*15) ** 2)) + c * besselh(0,1,k * sqrt((x(2)-e*12.990381) ** 2 + (x(1)-e*7.5) ** 2))) * exp(-i *
w * t)) - smer(3) * x(3), y = x(2) - smer(2) * x(3) - o,y = x(1) - smer(1) * x(3) - q]', 'x');%rovnice pro vypocet
mista dopadu
        [x,j,info] = fsolve(g,[q,o,0]);%resi predeslou rovnici
        if (info == 1) %podminka konvergentnosti reseni
            P(1) = x(1); %x souradnice mista dopadu laseru na hladine
            P(2) = x(2); %y souradnice mista dopadu laseru na hladine
            P(3) = smer(3) * x(3); %z souradnice mista dopadu laseru na hladine
            px = inline ('[y = real((k * x(1) / sqrt(x(1) ** 2 + x(2) ** 2) * a * besselh(-1,1,k * sqrt(x(1) ** 2
+ x(2) ** 2)) + k * (x(1) - e * 15) / sqrt(x(2) ** 2 + (x(1)-e*15) ** 2) * b * besselh(-1,1,k * sqrt(x(2) ** 2
+ (x(1) - e * 15) ** 2)) + k * (x(1) - e * 7.5) / sqrt((x(2) - e * 12.990381) ** 2 + (x(1) - e * 7.5) ** 2) *
c * besselh(-1,1,k * sqrt((x(2) - e * 12.990381) ** 2 + (x(1) - e * 7.5) ** 2))) * exp(- i * w * t))]', 'x');
            %parialni derivace podle x
            py = inline ('[y = real((k * x(2) / sqrt(x(1) ** 2 + x(2) ** 2) * a * besselh(-1,1,k * sqrt(x(1) ** 2
+ x(2) ** 2)) + k * x(2) / sqrt(x(2) ** 2 + (x(1) - e * 15) ** 2) * b * besselh(-1,1,k * sqrt(x(2) ** 2 + (x(1)

```

```

- e * 15) ** 2)) + k * (x(2) - e * 12.990381) / sqrt((x(2) - e * 12.990381) ** 2 + (x(1) - e * 7.5) ** 2) * c
* besselh(-1,1,k * sqrt((x(2) - e * 12.990381) ** 2 + (x(1) - e * 7.5) ** 2))) * exp(- i * w * t)]', 'x');
%parcialni derivate podle y
N(1) = - px([P(1),P(2)]); %slozka x normaloveho vektoru
N(2) = - py([P(1),P(2)]); %slozka y normaloveho vektoru
N(3)=1; %slozka z normaloveho vektoru
odraz = smer - N * 2 * (smer(1) * N(1) + smer(2) * N(2) + smer(3) * N(3)) / (N(1) ** 2 + N(2) ** 2 + N(3)
** 2);%vypocet odrazeneho paprsku
vzdalenostzdi = 204;
m = (vzdalenostzdi - x(2)) / odraz(2);
if (m > 0)
Q(scitac,scitac1) = m * odraz(1) + P(1); %ulozi x souradnici stopy laseru na zdi do matice
Q(scitac,scitac1+1) = m * odraz(3) + P(3); %ulozi z souradnici stopy laseru na zdi do matice
scitac = scitac+1;
endif
endif
endfor
save -ascii "Q.dat" Q;%ulozeni vypoctenych poloch stopy laseru do souboru
scitac1 = scitac1+2;
endfor

```

# Literatura

- [1] Arfken G. B., Weber H. J.: *Mathematical Methods for Physicists*, Elsevier Academic Press, London, 2005.
- [2] Berry M. V.: *Singularities in Waves and Rays*, Les Houches Lecture Series Session XXXV, eds. R. Balian, M. Kléman and J. P. Poirier, North-Holland: Amsterdam, 453-543, 1981
- [3] Born M., Wolf E.: *Principles of Optics*, Pergamon Press, Oxford, 1980.
- [4] Brdička M., Samek L., Sopko B.: *Mechanika kontinua*, Academia, Praha, 2005.
- [5] Dennis M. R.: *Topological Singularities in Wave Fields*, dizertační práce, Bristol, 2001.
- [6] Lebedev N. N.: *Specials Functions & Their Applications*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1965.
- [7] Leonhardt U., Philbin T. G.: *Transformation Optics and the Geometry of Light*, <http://arxiv.org/abs/0805.4778>
- [8] Nye J. F., Berry M. V.: *Dislocations in wave trains*, Proc. R. Soc. A 336, 165-90, 1974.
- [9] Šarbort M.: *Studium povrchového napětí*, bakalářská práce, Brno, 2007.
- [10] Šarbort M.: *Studium koherenční zrnitosti*, diplomová práce, Brno, 2009.
- [11] Tyc T.: *Tom's notes on transmutation of potentials, surfaces representing non-Euclidean optics, and focusing potentials*, nepublikováno, 2009.
- [12] [http://en.wikipedia.org/wiki/Bessel\\_function](http://en.wikipedia.org/wiki/Bessel_function)
- [13] <http://en.wikipedia.org/wiki/Tide>
- [14] <http://www.gnu.org/software/octave/>
- [15] <http://www.nch.com.au/tonegen/index.html>