

MASARYKOVA UNIVERZITA
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Studium vířivých proudů



Vedoucí bakalářské práce:
Mgr. Tomáš Tyc, Ph.D.
Rok odevzdání: 2006

Vypracoval:
Martin Plöschner
FY, III. ročník

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem vytvořil tuto bakalářskou práci samostatně za vedení odborného asistenta Mgr. Tomáše Tyce, Ph.D., a že jsem v seznamu použité literatury uvedl všechny zdroje použité při zpracování práce.

V Brně dne 11. května 2006

Poděkování

Rád bych na tomto místě poděkoval vedoucímu diplomové práce odbornému asistentu Tomáši Tycovi a konzultantu Ondřeji Příbylovi za čas, který věnovali konzultacím, za jejich cenné a důležité připomínky při vzniku této práce. Mimořádný dík patří také RNDr. Pavlu Konečnému, CSc. za jeho obětavou výpomoc při přípravě experimentálního zařízení.

Obsah

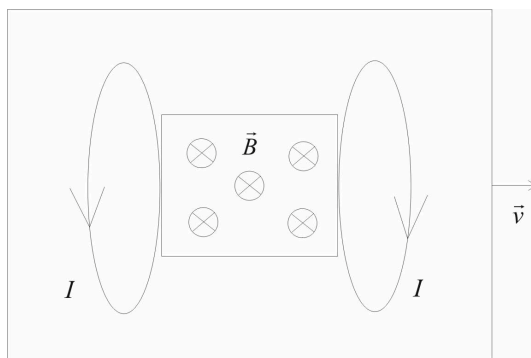
1	Úvod	5
2	Matematický popis vířivých proudů	7
2.1	Seznamovací model	7
2.2	Dipólový model	10
2.2.1	Nedostatky předchozího modelu	10
2.2.2	Zahrnutí pole \vec{E}	11
2.2.3	Vyhodnocení nového modelu	13
2.2.4	Delta magnetky	16
2.2.5	Čtvercový magnet - metoda skalárních potenciálů	18
2.2.6	Důkaz dipólového charakteru pole proudů	20
2.2.7	Vířivé proudy čtvercového magnetu	22
2.2.8	Pole proudů od kruhové oblasti	24
2.3	Meze platnosti dipólového modelu	26
2.3.1	Vířivé proudy v případě $\sigma \rightarrow \infty$	26
2.3.2	Vliv konečné velikosti desky	32
2.3.3	Proudy sekundární a vyšších řádů a jejich magnetická pole	33
3	Řešení pomocí Maxwellových rovnic	39
3.1	Rovnice difúze pro magnetické pole	40
3.2	Řešení rovnice difúze pro magnetické pole	42
3.3	Krokový pohyb magnetu	45
3.4	Srovnání starého a nového modelu	48
3.4.1	Pole proudů pro malé rychlosti (vodivosti)	48
3.4.2	Pole proudů pro velké rychlosti (vodivosti)	51
3.5	Vzorec pro brzdou sílu	52
4	Experimentální část	55
4.1	Aparatura použitá při měření	56
4.2	Postup při měření a způsob analýzy dat	57
4.2.1	Postup	57
4.2.2	Určení úhlové frekvence rotujícího disku	57
4.2.3	Zpracování měření brzdové a normálové síly	58

4.3	Výsledky měření	60
4.3.1	Výsledky měření pro brzdnou sílu	60
4.3.2	Výsledky měření pro normálovou sílu	62
4.4	Závěr měření	64
5	Závěr	65

Kapitola 1

Úvod

Vířivé proudy jsou zajímavým fyzikálním jevem, který se objevuje ve vodiči, umístěném v proměnném magnetickém poli, jako důsledek Faradayova zákona elektromagnetické indukce. Princip je zobrazen na obr. 1.1. Na tomto obrázku se pohybuje vodivá deska v magnetickém poli, které je homogenní v oblasti magnetu zobrazeného obdélníkem. Při pohybu desky doprava, dochází v oblasti napravo od magnetu k zmenšení magnetického toku deskou a podle Lenzova zákona musejí ve vodivé desce vzniknout proudy, které budou bránit této změně, tedy budou cirkulovat ve směru hodinových ručiček. V oblasti nalevo od magnetu se bude magnetický tok deskou naopak zvětšovat a podle Lenzova zákona budou tedy proudy cirkulovat proti směru hodinových ručiček. Můžeme se snadno přesvědčit, že



Obrázek 1.1: Vznik vířivých proudů

magnetické pole magnetu bude silově působit na proudy v desce takovým způsobem, že jí bude zpomalovat, což se v inerciální soustavě spojené z deskou bude jevit jako zpomalování magnetu.

Vířivé proudy mají bohaté využití v praxi a jejich dobrá teoretická znalost umožňuje výrazně snížit například ztráty energie v transformátorech, kde se s cílem, co nejvíce omezit disipaci energie konstruují jádra z materiálů majících nízkou elektrickou vodivost, ale na druhou stranu vysokou permeabilitu a jádro je laminováno, což se v důsledku projevuje

snížením změny toku magnetického pole jednotlivými vrstvami a tedy omezením vířivých proudů.

Asynchronní motory také využívají vířivých proudů. Otáčející se magnetické pole indukuje v rotoru vířivé proudy, které jsou silově ovlivňovány přítomným polem a rotor se díky těmto silám roztáčí. Asynchronní se nazývá z toho důvodu, že při zatížení (ne nutně přímo, ale k disipaci energie dochází vždy) je frekvence otáčení nižší než frekvence točivého magnetického pole.

Další oblastí využití je nedestruktivní kontrola materiálů. Měnicím se magnetickým polem indukujeme v materiálu vířivé proudy, které budou v místě materiálové vady vytvářet snadno detekovatelné poruchy.

Existuje mnoho dalších zařízení pracujících na podobných principech. Za všechny jmenujme například detektor kovů. Ten se skládá z aktivní části generující elektromagnetické pole indukující v kovu vířivé proudy a z pasivní části, která registruje pole od vířivých proudů vzniklých v kovu. Vířivé proudy tedy zachránily také nemálo lidských životů nalezením smrtících min. V poslední době se také rozmáhá prodej indukčních sporáků, které v první řadě šetří energii, jelikož při ohřevu není nutná žádná kontaktní plocha, jako například u elektrických kamen, kde z důvodu přítomnosti vzduchových mezer dochází k velkému poklesu účinnosti ohřevu. Indukční brzda je dalším zařízením využívajícím vířivých proudů. Její výhoda spočívá v bezkontaktnosti a tudíž minimalizaci opotřebení a navíc je mnohem přesnější než konvenční brzdy. Tento typ brzd se používá například v některých typech horských drah. V poslední řadě jmenujme supravodiče, které při přiložení magnetického pole v sobě indukují proudy, jejichž magnetické pole přesně kompenzuje pole přiložené. Tohoto principu se využívá k magnetické levitaci celých vlakových souprav.

Tato práce je zaměřena na studium pohybu magnetu nad vodivou deskou, konkrétně na matematický popis polí vířivých proudů a analýzu sil působících na magnet v důsledku přítomnosti vířivých proudů v desce. Studium vířivých proudů začneme kapitolou *Matematický popis vířivých proudů*, která nám umožní vhled do problematiky díky podkapitole *Seznamovací model*, kde si ukážeme některé obecné rysy pohybu magnetu nad deskou. Hlavní část kapitoly bude ovšem věnována dipólovému modelu, který je přesným řešením problému pohybu idealizovaného magnetu nad deskou pro malé rychlosti, případně vodivosti. Ukážeme si, jakým způsobem se dá tohoto řešení využít k popisu vířivých proudů vzniklých v důsledku pohybu magnetů zcela obecných tvarů. Na úplný závěr kapitoly si ukážeme, že dipólový model selhává v případě, kdy je rychlost magnetu, popřípadě vodivosti desky velká. V těchto limitních případech již totiž není možné zanedbávat tzv. sekundární vířivé proudy a proudy vyšších řádů, které v desce vznikají díky změnám nikoli magnetického pole od magnetu, nýbrž díky změnám magnetického pole od primárních vířivých proudů (pro proudy vyšších řádů pak díky změnám magnetického pole od sekundárních proudů atd.). V další kapitole nazvané *Řešení pomocí Maxwellových rovnic* se seznámíme s jiným postupem při řešení problému, který tento problém úspěšně odstraňuje. Postup je založen na difúzní rovnici pro magnetické pole a na tzv. krokování magnetů nad deskou. V závěrečné kapitole nazvané *Experimentální část* poté provedeme srovnání experimentu s teoretickými výpočty.

Kapitola 2

Matematický popis vířivých proudů

Při studiu vířivých proudů bychom mohli rovnou vyjít z Maxwellových rovnic, ovšem tento postup je velice neprůhledný a nedává příliš velkou možnost vhledu do fyzikálních principů. Pro lepší pochopení toho, co se ve skutečnosti děje, jsem se proto rozhodl vydat se cestou od jednoduchého modelu se spoustou větších či menších aproximací, k modelu, který již zohledňuje všechny jevy v problému se vyskytující. V této kapitole se pokusíme vytvořit obecně použitelné metody pro popis vířivých proudů v případě pohybu magnetu po vodivé desce a na základě těchto znalostí určit silové působení vzniklých proudů na pohybující se magnet. Cílem je fyzikální model, jehož výsledky budou korespondovat s experimentem a bude použitelný na jakýkoliv tvar magnetu a libovolnou vodivou desku.

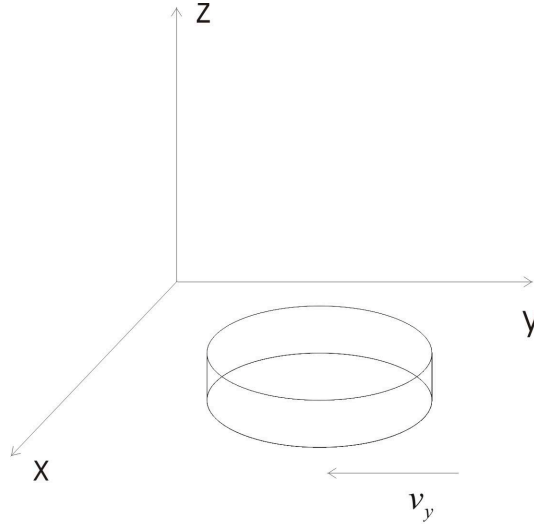
2.1. Seznamovací model

V následujících úvahách budeme vycházet ze situace zobrazené na obr. 2.1. V prostoru je umístěn magnet tvaru válce, pod nímž se pohybuje nekonečně velká vodivá deska rychlostí \vec{v}_y . Tato situace je ekvivalentní klidné desce a pohybujícímu se magnetu se stejnou velikostí rychlosti, ale opačného směru. Magnetické pole magnetu aproximujeme následovně. Magnetická indukce magnetu má velikost $\vec{B} = -B\hat{z}$ v oblasti magnetu, kterou označíme Ω_1 , a vně této oblasti, kterou označíme Ω_2 , je magnetická indukce nulová. Dále se pro větší názornost držíme představy pohybující se desky a statického magnetu. Matematicky se dají proudy v desce popsat Ohmovým zákonem $\vec{j} = \sigma\vec{E}'$, kde E' je elektrická intenzita v soustavě spojené s pohybující se deskou. Jak vypadá E' ? Její tvar nejsnadněji nahlédneme, pokud vyjdeme ze soustavy spojené s magnetem, ve které je přítomno magnetické pole a dále elektrické pole, jehož existenci vysvětlíme později. Transformací polí přejdeme k soustavě spojené s deskou, která se vůči soustavě magnetu pohybuje rychlostí v . Z elektrodynamiky je známo, že složky elektrického a magnetického pole jsou spolu úzce spjaty a obě jsou složkami jediné struktury - antisymetrického tenzoru elektromagnetického pole, který

má následující tvar:

$$F^{ik} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{E_x}{c} & -\frac{E_y}{c} & -\frac{E_z}{c} \\ \frac{E_x}{c} & 0 & -B_z & B_y \\ \frac{E_y}{c} & B_z & 0 & -B_x \\ \frac{E_z}{c} & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

Lorentzova grupa, do níž patří tenzor elektromagnetického pole, má několik transformací



Obrázek 2.1: Deska pohybující se pod magnetem

invariance. Zmiňme například klasické otočení kolem nějaké osy. Pro nás však bude důležitá jiná transformace invariance, která se dá také chápat jako otočení, ovšem už ne v klasickém slova smyslu, ale otočením v Minkowského prostoročase. Máme na mysli speciální Lorentzovy transformaci. Matice speciální Lorentzovy transformace vypadá následovně:

$$\Lambda_k^i = \begin{pmatrix} \gamma & -\frac{v}{c}\gamma & 0 & 0 \\ -\frac{v}{c}\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

kde $\gamma = 1/\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$. Pro transformaci tenzoru elektromagnetického pole potom platí:

$$F'^{ik} = \Lambda_m^i \Lambda_n^k F^{mn} \quad (2.3)$$

Jednoduchým, i když poněkud zdoluhavým výpočtem se můžeme přesvědčit o platnosti následujících relací:

$$E'_x = E_x, \quad E'_y = \gamma(E_y - vB_z) \quad E'_z = \gamma(E_z + vB_y) \quad (2.4)$$

$$B'_x = B_x, \quad B'_y = \gamma(B'_y + \frac{v}{c^2}E_z), \quad B'_z = \gamma(B'_z - \frac{v}{c^2}E_y) \quad (2.5)$$

Za předpokladu $v \ll c$ se předcházející rovnice dají přepsat do tvaru :

$$\vec{E}' = \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}, \quad \vec{B}' = \vec{B} \quad (2.6)$$

Ohmův zákon pro desku nyní můžeme vyjádřit pomocí polí v soustavě spojené s magnetem. Dostáváme:

$$\vec{j} = \sigma(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (2.7)$$

Za proudy v desce jsou tedy zodpovědná dvě pole. Jedním je magnetické pole magnetu, které působí na pohybující se elektrony, které mají stejnou rychlost jako deska (samozřejmě zanedbáváme tepelný pohyb elektronů). Dále pak elektrické pole, jehož existence v soustavě spojené s magnetem je podrobně diskutována v kapitole (2.2.1). V našem seznamovacím modelu toto pole z našich úvah vyloučíme (což je velice hrubá aproximace, protože toto pole je pro popis proudů naprosto klíčové). Ohmův zákon pro pole proudů v desce můžeme tedy v obecném tvaru napsat následovně:

$$\vec{j} = \sigma(\vec{E}_q + \vec{E}_B) \quad (2.8)$$

\vec{E}_B značí vtištěnou elektromotorickou intenzitu původem od magnetického pole. Jestliže prozatím zanedbáme pole E_q , dostaneme:

$$\vec{j} = \sigma(\vec{v} \times \vec{B}) \quad (2.9)$$

Nyní tedy máme výraz pro proud ve vodivé desce a tento proud bude silově ovlivňován magnetickým polem magnetu. Je výhodné použít vztah pro objemovou hustotu síly, který se dá odvodit z obecného výrazu pro Lorentzovu sílu. Pokud bereme elektrické pole \vec{E}_q nulové, dostáváme pro objemovou hustotu síly následující výraz:

$$\vec{f} = \vec{j} \times \vec{B} \quad (2.10)$$

Nyní provedeme integraci přes celý objem desky, který je ovlivňován magnetickým polem, a dostaneme celkovou sílu působící na desku:

$$\vec{F}_c = \int_V \vec{f} = \sigma v_y B^2 \pi R^2 d \hat{y}, \quad (2.11)$$

kde \hat{y} je jednotkový vektor ve směru osy y . Při výpočtu jsme využili ortogonalitu všech vektorů vystupujících ve vztazích (2.9) a (2.10). Dále d označuje tloušťku vodivé desky a R je poloměr magnetu. Je vidět, že výsledná síla působí proti směru pohybu desky. Deska tedy bude zpomalovat a v ekvivalentním pohledu pohybujícího se magnetu bude bržděn magnet.

Tento jednoduchý model nám poskytuje kvantitativní představu o závislosti pohybu na několika veličinách, například na tloušťce desky, na rychlosti a na druhé mocnině velikosti

magnetické indukce. Uvažujme nejdříve, proč by měla síla brzdící magnet záviset na druhé mocnině magnetické indukce a ne například na první nebo na třetí. Pokud magnet pouštíme po vodivé desce, je vždy bržděn nehledě na to, jakým pólem ho k desce přiložíme. Ostatně toto plyne přímo z termodynamických úvah. Magnet nemůže být urychlován, jelikož v desce v důsledku přítomnosti indukovaných proudů dochází k disipaci energie. Mechanická energie magnetu se transformuje na tepelnou a magnet je zpomalován. Tudíž při změně orientace magnetického pole by nemělo docházet ke změně směru síly. A to nám právě zaručuje druhá mocnina ve výrazu pro brzdnou sílu. Na tloušťce desky musí síla záviset ze zřejmého důvodu. Čím více objemu pohybující se desky je v oblasti magnetického pole, tím více je v oblasti nositelů proudu, které jsou silově ovlivňovány magnetickým polem, což při větším počtu nositelů vede k výraznějšímu zpomalování. Závislost na první mocnině rychlosti se dá pochopit následující úvahou. Pouštíme-li magnet po desce, vždy je bržděn, takže při změně směru rychlosti dochází ke změně směru síly a toto nám zajišťuje první mocnina rychlosti ve výrazu. Náš seznamovací model tedy alespoň v hrubých rysech odpovídá skutečnosti. S jeho nedostatky se seznámíme v následující sekci.

2.2. Dipólový model

2.2.1. Nedostatky předchozího modelu

Nedostatky předchozího modelu jsou více než zřejmé. V první řadě jsme v modelu zanedbali pole \vec{E}_q , které je pro popis pohybu naprosto klíčové. Toto pole vzniká v důsledku pohybu desky. Elektronů, které můžeme považovat za nehybné v soustavě spojené s deskou (tepelná rychlost elektronů není důležitá), se pohybují rychlostí v vůči magnetu (jelikož deska se vůči magnetu pohybuje rychlostí v), a jeho magnetické pole na elektrony působí silou úměrnou $\vec{v} \times \vec{B}$. Jakmile elektrony dospějí k hranicím oblasti Ω_1 , nemají důvod pokračovat dále, jelikož vně oblasti není žádná síla, která by na ně působila (to že mají na hranici určitou rychlost, získanou v oblasti Ω_1 , sice vede k tomu, že se pohybují dále, ovšem brzy se tento pohyb vytratí příčinou srážek s kmity krystalové mřížky, takže opravdu můžeme s velkou přesností říci, že za hranici oblasti Ω_1 se elektrony nepohybují). To, že se elektrony nepohybují za hranici Ω_1 můžeme také pochopit z Ohmova zákona. Tento vzorec nemá žádný paměťový charakter, takže proudy v oblasti bez intenzity nemohou být. Důsledkem těchto úvah je hromadění náboje na hranici oblasti Ω_1 a toto nahromadění náboje je dále zdrojem elektrického pole, které nyní musíme zahrnout do diferenciálního tvaru Ohmova zákona (2.7).

Předtím, než se pustíme do samotného řešení proudů vznikajících ve vodiči v této nové situaci, zmiňme několik dalších nedostatků našeho seznamovacího modelu. Například pole magnetu určitě nemá skokovitý charakter, který jsme použili v předchozím odstavci. Řešením tohoto problému se budeme zabývat v kapitole *Delta magnetky*, kde využijeme poznatků získaných v této stati. Dále je třeba mít na paměti, že samotné proudy ve vodiči jsou zdrojem sekundárního magnetického pole, které zpětně bude vytvářet další proudy, které opět budou zdrojem magnetického pole a tak stále dokola. Geometrie desky bude hrát

také velmi významnou roli a to zejména její tloušťka a při opuštění našeho předpokladu nekonečné velikosti desky také musíme vzít v úvahu její konečnou velikost.

2.2.2. Zahrnutí pole \vec{E}

Nyní tedy zahrňme do našich výpočtů Coulombovské pole od nábojů nahromaděných na hranici Ω_1 . Ohmův zákon tedy vypadá následovně:

$$\vec{j} = \sigma \left(\vec{E}_q + \vec{v} \times \vec{B} \right) \quad (2.12)$$

Velice nepříjemnou skutečností je fakt, že neznáme tvar pole \vec{E}_q , takže vlastně nevíme nic ani o proudech. Můžeme však využít následující úvahy. Náboje se na hranici Ω_1 dostanou velice rychle. Jakmile na hranici jednou jsou, prakticky tam setrvávají. Můžeme si to představit tak, že proud sice k hranici a také od ní teče, ale jakoby jen mívá oblasti s akumulovaným nábojem. Přesněji řečeno, některé elektrony z přitékajícího proudu zůstanou na hranici a na druhé straně některé elektrony původně akumulované na hranici oblast opustí jako proud tekoucí do Ω_2 . Akumulované náboje vytvářejí Coulombovské pole, které nyní chceme zahrnout do výpočtů. Pole vytvářené od těchto nábojů můžeme napsat jako gradient nějaké skalární funkce. Dalším krokem bude použití vektorové identity $\mathbf{rot} \mathbf{grad} \phi = \vec{0}$. Pokud tedy použijeme operaci rotace na obě strany rovnice (2.12) a zároveň využijeme vztahu $\vec{E}_q = -\mathbf{grad} \phi$ a vektorové identity uvedené výše, dostaneme následující výraz:

$$\mathbf{rot} \vec{j} = \sigma \cdot \mathbf{rot} \left(\vec{v} \times \vec{B} \right) \quad (2.13)$$

Pro úpravu pravé strany dále použijeme následující vektorovou identitu:

$$\mathbf{rot} \vec{j} = \sigma \left[\left(\vec{B} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{v} - \left(\vec{v} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{B} + \vec{v} \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{B} \right) - \vec{B} \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{v} \right) \right] \quad (2.14)$$

Třetí člen je nulový, protože platí $\mathbf{div} \vec{B} = 0$. Čtvrtý člen je také nulový, jelikož rychlost není závislá na souřadnicích a první člen je také nulový a to ze stejných důvodů. Nakonec tedy dospíváme k výrazu:

$$\mathbf{rot} \vec{j} = -\sigma \left(\vec{v} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{B} \quad (2.15)$$

Pro náš konkrétní příklad znázorněný na obr. 2.1, můžeme rovnici (2.15) v polárních souřadnicích přepsat do tvaru (za použití $\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$):

$$\mathbf{rot} \vec{j} = -\sigma \left(-v_y \hat{y} \cdot \hat{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) (-B \hat{z}) \quad (2.16)$$

Derivace podle ϕ a z jsou nulové, protože nikde v prostoru nedochází ke změně magnetické indukce podle těchto souřadnic. Jediný skok se nachází na hranici Ω_1 ve vzdálenosti R od středu magnetu. V tomto místě musí být derivace magnetické indukce podle r nekonečná (na tomto místě se dá lehce udělat chyba, vytknutím – z derivace podle r a se zafixovanou

představou nekonečné hodnoty delta funkce člověk snadno přehlédne, že tato derivace je ve skutečnosti nekonečně záporná). Jinde je tato derivace nulová. Tuto závislost můžeme popsat Diracovou delta distribucí. Radiální jednotkový vektor má následující vztah ke kartézským souřadnicím $\hat{r} = \cos \phi \hat{x} + \sin \phi \hat{y}$. Nyní tedy dostáváme následující rovnici:

$$\mathbf{rot} \vec{j} = \sigma v_y \sin \phi \delta(r - R) B \hat{z} \quad (2.17)$$

Toto je velice zajímavý vztah. Říká nám totiž, že rotace proudu je všude nulová s výjimkou hranice Ω_1 . Vztah ještě raději přepíšme do tvaru, kterého by nabýval, pokud by se magnet pohyboval v záporném směru osy x (bude to výhodnější pro vzhled do obrázků, které budou následovat).

$$\mathbf{rot} \vec{j} = -\sigma v_x \cos \phi \delta(r - R) B \hat{z} \quad (2.18)$$

Ve výrazu vystupuje $\cos \phi$, což znamená, že nespojitost je největší na hranici Ω_1 ve směru pohybu magnetu. Proč tomu tak je? Právě ve směru pohybu dochází k největším změnám magnetického toku. Můžeme si představit, že se v oblasti hranice tvoří malé proudové smyčky. Zatímco v oblasti Ω_1 tečou proudy ve směru osy y , vně této oblasti tečou opačným směrem a to je důvod nenulovosti rotace. Ve směru kolmém k pohybu tato nespojitost úplně vymizí. Vysvětlení je analogické předchozímu.

Nabízí se využít nulovosti rotace v celé oblasti vyjma hranice Ω_1 . V každé oblasti Ω_1 , Ω_2 můžeme proud napsat jako gradient nějaké skalární funkce.

$$\begin{cases} \vec{j} = \mathbf{grad} \psi_1 & \text{v } \Omega_1 \\ \vec{j} = \mathbf{grad} \psi_2 & \text{v } \Omega_2 \end{cases} \quad (2.19)$$

Dále určitě platí rovnice kontinuity $\mathbf{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$. Jelikož se v žádném místě, kromě hranice oblasti, nemění s časem nábojová hustota, můžeme rovnici kontinuity přepsat do tvaru $\mathbf{div} \vec{j} = 0$. Ve své podstatě platí tato rovnice i pro hranici oblasti. Akumulovaný náboj je totiž velice malý (viz rovnice 2.35 odvozená dále) a proto i časová změna bude zanedbatelná. Spojíme-li tento výsledek z výrazy (2.19) dostáváme něco velice překvapujícího - Laplaceovy rovnice pro jednotlivé oblasti Ω_1 , Ω_2 :

$$\begin{cases} \Delta \psi_1 = 0 & \text{v } \Omega_1 \\ \Delta \psi_2 = 0 & \text{v } \Omega_2 \end{cases} \quad (2.20)$$

Toto je standartní Dirichletův problém pro kruh. Pro jednoznačné řešení úlohy je nutné ještě najít okrajové podmínky na hranici. Z rovnice kontinuity plyne, že složky proudu kolmé k hranici jsou spojité a tečné složky mají na hranici nespojitost, která je determinována výrazem (2.18). Zároveň víme, že proudy jsou gradientem skalárních funkcí. Podmínky na hranici tedy můžeme zapsat následujícím způsobem:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \phi} \psi_2 - \frac{\partial}{\partial \phi} \psi_1 = -\sigma v_x B R \cos \phi \\ \frac{\partial}{\partial r} \psi_2 - \frac{\partial}{\partial r} \psi_1 = 0 \end{cases} \quad (2.21)$$

Řešení hledejme ve tvaru lineární kombinace jednoduchých harmonických funkcí. Z okrajových podmínek se dá odhadnout tvar skalárních funkcí. Ve vnější oblasti musíme volit

harmonické funkce ve tvaru $\frac{1}{r}$, jelikož jinak by řešení divergovalo. Napišme předpokládané řešení následovně:

$$\psi_1(r, \phi) = K_1 + Ar \cos \phi + Br \sin \phi \quad (2.22)$$

$$\psi_2(r, \phi) = K_2 + \frac{C}{r} \cos \phi + \frac{D}{r} \sin \phi \quad (2.23)$$

Toto po dosazení do okrajových podmínek a vyjádření konstant A, B, C, D dává následující výrazy pro skalární funkce v jednotlivých oblastech:

$$\psi_1(r, \phi) = K_1 + \frac{1}{2} \sigma v_x r B \sin \phi \quad (2.24)$$

$$\psi_2(r, \phi) = K_2 - \frac{1}{2} \sigma \frac{R^2}{r} v_x B \sin \phi \quad (2.25)$$

K vyjádření proudů už zbývá jediný krok. Udělat gradient těchto skalárních funkcí. Pro vnitřní oblast dostáváme v polárních souřadnicích výraz:

$$\vec{j}_1 = \frac{1}{2} \sigma v_x B (\sin \phi, \cos \phi) \quad (2.26)$$

V tomto tvaru se z něj však nedá nic zajímavého vypočítat. Avšak pro jednotkové vektory platí $\hat{r} = \cos \phi \hat{x} + \sin \phi \hat{y}$, $\hat{\phi} = -\sin \phi \hat{x} + \cos \phi \hat{y}$. Náš vektor je tvaru $\sin \phi \hat{r} + \cos \phi \hat{\phi}$. Po dosazení vyjádření polárních jednotkových vektorů obdržíme jednoduše jednotkový vektor \hat{y} . Výraz pro proud v oblasti Ω_1 se tím stává mnohem přehlednější:

$$\vec{j}_1 = \left(0, \frac{1}{2} \sigma v_x B \right) \quad (2.27)$$

A pro vnější oblast obdobně aplikací gradientu v polárních souřadnicích:

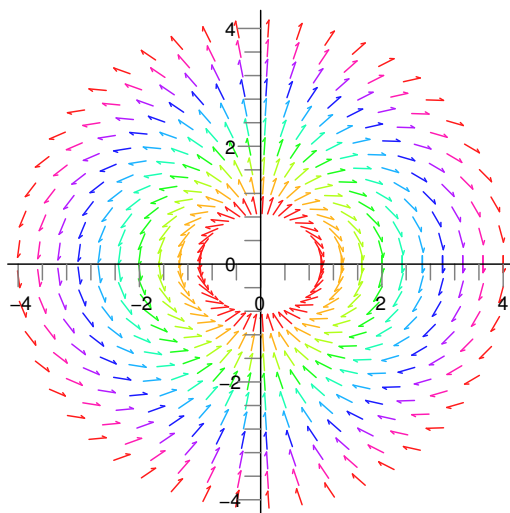
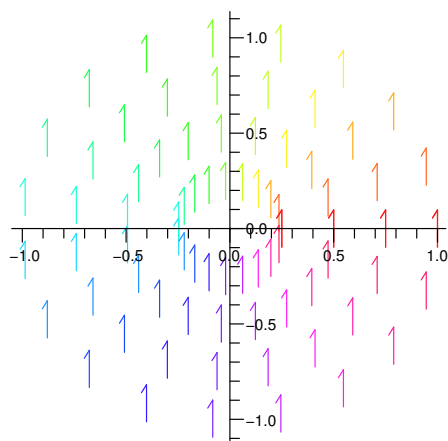
$$\vec{j}_2 = \left(\frac{1}{2} \sigma v_x B \frac{R^2}{r^2} \sin \phi, -\frac{1}{2} \sigma v_x B \frac{R^2}{r^2} \cos \phi \right) \quad (2.28)$$

Průběh těchto vektorových polí je znázorněn na obrázcích 2.2 a 2.3. Pro zdůraznění průběhu tvaru pole jsem zafixoval velikost vektorů vynášených v oblasti Ω_2 , jelikož pole klesá s kvadrátem vzdálenosti a graf by tudíž nebyl moc přehledný.

2.2.3. Vyhodnocení nového modelu

Řešení, které jsme obdrželi má velice zajímavý průběh. V oblasti Ω_1 je pole proudů konstantní a směřuje ve směru osy y . V oblasti Ω_2 má pole proudů dipólový charakter, což bude dokázáno v některé z následujících kapitol.

Vypočteme nyní brzdnou sílu v tomto novém modelu. Můžeme opět použít vztahu pro objemovou hustotu síly (2.10), kam nyní dosadíme námi vypočtené pole proudů v oblasti Ω_1 . Toto pole proudů má přesně poloviční velikost, než pole proudů v seznamovacím

Obrázek 2.2: Vektorové pole proudů v oblasti Ω_2 Obrázek 2.3: Vektorové pole proudů v oblasti Ω_1

modelu, kde byla jeho velikost dána vztahem (2.9). Dosadíme-li novou objemovou hustotu síly do vztahu (2.11), ihned dostáváme:

$$\vec{F}_c = \frac{1}{2} \sigma v_y B^2 \pi R^2 d \hat{y} \quad (2.29)$$

Tedy i brzdná síla má poloviční velikost. Je tedy vidět, že pole \vec{E}_q hraje skutečně významnou roli v celém problému. Pole \vec{E}_q , vzniklé nahromaděním náboje na hranici, působí na elektrony silou opačného směru než pole magnetické a způsobuje pokles proudu v oblasti Ω_1 na polovinu a v důsledku toho také snížení brzdné síly na polovinu. Jelikož je toto pole tak významné podívejme se trochu podrobněji na způsob rozmístění náboje na hranici. Vydeme z Gaussova zákona:

$$\mathbf{div} \vec{E}_q = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (2.30)$$

kde ρ značí plošnou hustotu náboje. Na první pohled by se mohlo zdát, že stále neznáme pole \vec{E}_q , ovšem tím, že jsme spočítali pole proudů v oblastech Ω_1 a Ω_2 , jsme také určili elektrické pole v obou z těchto oblastí. Ze vztahu (2.12) můžeme vyjádřit tvary elektrických polí v jednotlivých oblastech:

$$\vec{E}_{\Omega_2} = \frac{\vec{j}_2}{\sigma} - \overbrace{\vec{v} \times \vec{B}_{\Omega_2}}^0 \quad (2.31)$$

$$\vec{E}_{\Omega_1} = \frac{\vec{j}_1}{\sigma} - \vec{v} \times \vec{B}_{\Omega_1} \quad (2.32)$$

Vztah (2.30) nám dává do spojitosti normálové složky pole na hranici. Pokud by na hranici žádný náboj nebyl, potom by normálové složky měly být spojité. My však na hranicích určitý náboj máme a tento náboj by měl být roven nespojitosti normálových složek elektrického pole:

$$\rho = \epsilon_0 \left(\vec{E}_{\Omega_2} - \vec{E}_{\Omega_1} \right) \cdot \hat{r} \quad (2.33)$$

Je vidět, že příspěvky k normálovým složkám elektrického pole od proudů se vyruší a zbude nám pouze člen $\vec{v} \times \vec{B}_{\Omega_1}$. Po rozepsání vhodném pro úpravy dostáváme s upomenutím se na výraz $\hat{r} = \cos \phi \hat{x} + \sin \phi \hat{y}$:

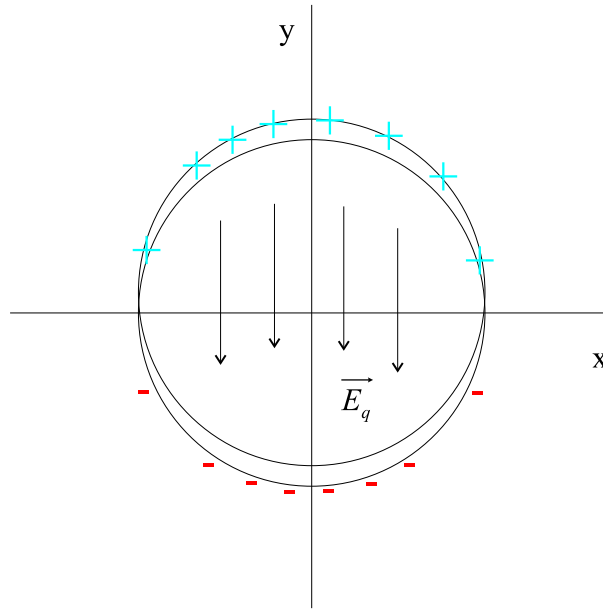
$$\rho = \epsilon_0 (v_x \hat{x}) \times (-B \hat{z}) \cdot [\cos \phi \hat{x} + \sin \phi \hat{y}] \quad (2.34)$$

Jelikož $\hat{x} \times \hat{z} = -\hat{y}$, dostáváme konečně výraz pro nábojovou hustotu na hranici:

$$\rho = \epsilon_0 v_x B \sin \phi \quad (2.35)$$

Na obr. 2.4 konečně vidíme příčinu zmenšení proudu ve směru osy y . Na horní hranici kruhu se totiž hromadí kladný náboj, na spodní potom náboj záporný, a toto rozložení náboje je zodpovědné za elektrické pole snižující proud v oblasti Ω_1 a naopak v oblasti Ω_2 zapříčiňuje tok proudu mimo oblast magnetu.

Nyní tedy máme přesné řešení primárních vířivých proudů kolem oblasti s konstantním magnetickým polem. Problém je, že pole magnetů takto určitě nevypadá. Dobrou zprávou



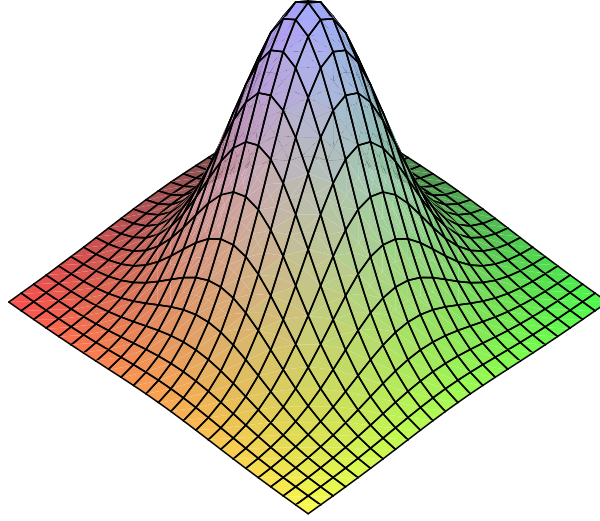
Obrázek 2.4: Rozmístění nábojů na hranici vyšetřované oblasti

je, že právě získané řešení nám dává neuvěřitelně účinný nástroj, pomocí něhož jsme schopni vypočítat pole primárních proudů okolo oblastí libovolného tvaru a s libovolně se měnící magnetickou indukcí.

2.2.4. Delta magnetky

Řešení, které jsme získali v kapitole (2.2.2) pro kruhovou oblast, můžeme výhodně použít k nalezení vířivých proudů kolem obecnějších tvarů magnetů s realističtějším modelem magnetického pole kolem nich. Princip spočívá ve zmenšení naší kruhové oblasti na infinitesimalní plochu, kterou dále budeme nazývat delta magnetkem. Tyto delta magnetky můžeme následně použít k vyplnění oblasti například tvaru čtverce a získat tak pole proudů okolo magnetu zcela odlišného tvaru. Pokud navíc naši oblast budeme zaplňovat delta magnetky, které budou mít různou magnetickou indukci, můžeme dospět k sofistikovanějšímu modelu magnetického pole. Vyjádřeme nyní toto skládání řečí matematiky. Vyjděme z obecného rozložení magnetické indukce, které je znázorněno na obr. 2.5. Jakým způsobem bychom mohli vyjádřit takovýto průběh magnetické indukce pomocí delta magnetků? Vzpomeňme si na pojem konvoluce funkcí, který se formálně definuje takto:

$$[f * g](t) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t - \tau)d\tau \quad (2.36)$$

Obrázek 2.5: $B(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$

a vyjadřuje zjednodušeně řečeno rozmazání jedné funkce druhou. Vezmeme-li jako speciální případ funkci g jako Diracovu delta distribuci, potom platí následující známý vztah:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta(t - \tau)d\tau \quad (2.37)$$

Zobecněním vztahu do více dimenzí a jeho aplikací na náš konkrétní příklad dostáváme:

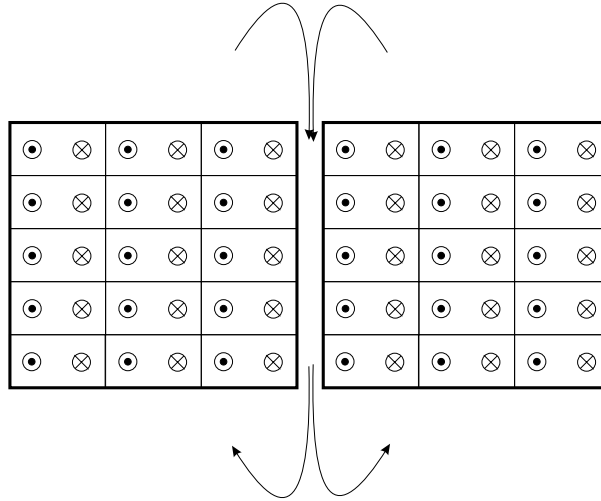
$$B(x, y) = \int_{\mathbb{R}^2} \delta(x - \xi, y - \eta)B(\xi, \eta)d\xi d\eta \quad (2.38)$$

Nyní se nám tedy podařilo z delta magnetků vystavět poměrně obecný průběh magnetické indukce v dané oblasti. Naším cílem je však zjistit pole proudů. Každý delta magnetek kolem sebe vytváří vlastní pole proudů. Zajímáme-li se o proudy sestavené z mnoha takových delta magnetků, musíme nějakým způsobem sečíst příspěvky od všech a zároveň musíme vzít v potaz, že některé delta magnetky okolo sebe vytvářejí silnější pole proudů (např. delta magnetky zodpovědné za maximum na obr. 2.5). Jako velice výhodné se ukazuje zavést delta magnetky s jednotkovým magnetickým tokem $\pi R^2 B_\delta = 1$. Tyto delta magnetky teď můžeme vynásobit stejnou váhovou funkcí jako v rovnici (2.38) a zohlednit tak jejich různou "sílu". Pro proudy v obecném bodě potom můžeme psát:

$$\vec{j}(x, y) = \int_{\mathbb{R}^2} \vec{j}_{\delta(\xi, \eta)}(x, y)B(\xi, \eta)d\xi d\eta \quad (2.39)$$

kde $\vec{j}_{\delta(\xi, \eta)}(x, y)$ značí delta magnetek umístěný v bodě ξ, η , jenž je zdrojem proudu v bodě x, y .

V souvislosti s tímto postupem vyvstává několik otázek. Především naše delta magnetky mají různý tvar proudových polí vně a uvnitř kruhové oblasti. Pokud počítáme pole proudů v bodě, ve kterém se nevyskytuje žádný delta magnetek, potom bude proud v tomto místě dán nejspíše pouze příspěvkem od vnějších průběhů proudových polí všech delta magnetků. Jakmile ovšem budeme počítat pole v bodě, ve kterém je umístěn delta magnetek, musíme se nutně ptát, zdali je nezbytné zahrnout do konečného proudového pole také příspěvek od vnitřního pole tohoto delta magnetku. Abychom mohli odpovědět na otázku zda-li zahrnout



Obrázek 2.6: Pole proudů v mezeře mezi čtverci

i vnitřní proudové pole, podívejme se na obr. 2.6. Jestliže z delta magnetků vytvoříme dvě čtvercové oblasti a ty následně budeme přibližovat těsně k sobě, zjistíme, že nehledě na blízkost přiblížení, v mezeře, oddělující dvě čtvercové oblasti, je směr proudů opačný než bychom očekávali. Je zřejmé, že pole proudů obdélníku složeného ze dvou čtverců bude ve vnitřní oblasti určitě směřovat v kladném směru osy y . Touto jednoduchou úvahou tedy dospíváme k závěru, že vnitřní proudové pole delta magnetků je nutno do výpočtů zahrnout.

2.2.5. Čtvercový magnet - metoda skalárních potenciálů

Ukažme si nyní na konkrétním příkladu výpočet pole okolo čtvercové oblasti s konstantní magnetickou indukcí. Na tomto příkladu navíc pochopíme, do jakých nesnází se dostaneme při výpočtech. Proudů okolo čtvercového magnetu bude výhodně počítat ze vztahu (2.25). Konstantu můžeme volit libovolně a přejdeme-li ke kartézským souřadnicím, dostáváme:

$$\psi_2(x, y) = -\frac{y - y_i}{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2} \quad (2.40)$$

přičemž jsme zvolili $\frac{1}{2}\sigma R^2 v_x B \equiv 1$ pro usnadnění zápisu. Umístíme v počátku čtvercovou oblast o straně dvou jednotek, v níž požadujeme konstantní magnetickou indukcí. Tuto

oblast nyní poskládejme z delta magnetků. Potenciál v nějakém bodě vně magnetu (v oblasti magnetu nemůžeme problém analyticky spočítat, jelikož integrujeme přes body, v nichž se kromě příspěvků k celkovému potenciálu od ostatních delta magnetků objevuje také příspěvek samotného delta magnetku. Neexistuje žádná metoda, jak tuto ambivalenci zahrnout do analytického výpočtu) poté můžeme spočítat následujícím integrálem:

$$\psi_c(x, y) = - \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{y - y_i}{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2} dx_i dy_i \quad (2.41)$$

Výpočet tohoto integrálu vede k výsledku:

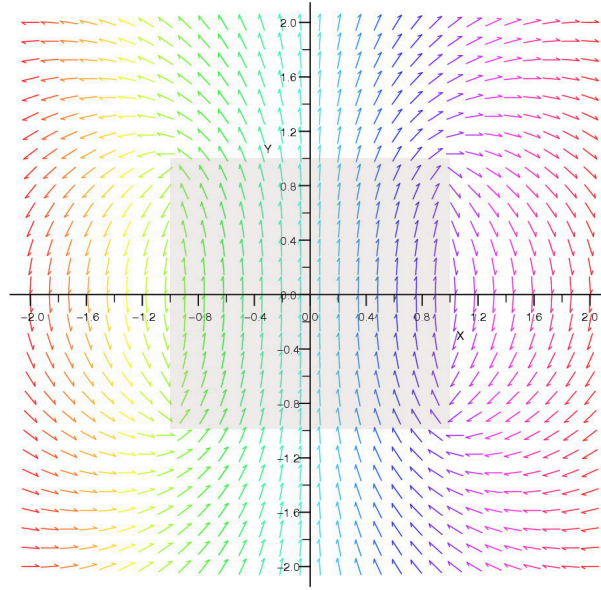
$$\begin{aligned} \psi_c = & -\frac{1}{2} (x + 1) \ln (y^2 + 2 + 2y + 2x + x^2) + \frac{1}{2} (x - 1) \ln (y^2 + 2 + 2y - 2x + x^2) + \\ & + \frac{1}{2} (x + 1) \ln (y^2 + 2 - 2y + 2x + x^2) + \frac{1}{2} (1 - x) \ln (y^2 + 2 - 2y - 2x + x^2) - \\ & - \arctan \left(\frac{x + 1}{y - 1} \right) - y \arctan \left(\frac{y + 1}{x - 1} \right) + y \arctan \left(\frac{y + 1}{x + 1} \right) + \arctan \left(\frac{x - 1}{y + 1} \right) - \\ & - y \arctan \left(\frac{y - 1}{x + 1} \right) + \arctan \left(\frac{x - 1}{y - 1} \right) - \arctan \left(\frac{x + 1}{y + 1} \right) + y \arctan \left(\frac{y - 1}{x - 1} \right) \end{aligned}$$

Aplikací gradientu konečně dostáváme složky proudu ve tvaru:

$$\begin{aligned} j_x(x, y) = & 1/2 \ln (x^2 - 2x + 2 + y^2 + 2y) - 1/2 \ln (x^2 + 2x + 2 + y^2 + 2y) - \\ & - 1/2 \ln (x^2 - 2x + 2 + y^2 - 2y) + 1/2 \ln (x^2 + 2x + 2 + y^2 - 2y) \end{aligned}$$

$$j_y(x, y) = \arctan \left(\frac{y + 1}{x - 1} \right) - \arctan \left(\frac{y - 1}{x - 1} \right) + \arctan \left(\frac{y - 1}{x + 1} \right) - \arctan \left(\frac{y + 1}{x + 1} \right)$$

Toto vektorové pole je vyobrazeno na obr. 2.7. Vyvstává otázka, zda-li je řešení získané za předpokladu, že pole zjišťujeme ve vnější oblasti čtverce, platné také v oblasti uvnitř. Na tomto místě můžeme použít pojem z funkcí komplexní proměnné - analytické prodloužení. Tento nádherný závěr funkcí komplexní proměnné nám říká, že známe-li vyjádření určité funkce v definované oblasti, můžeme, za jistých okolností, určit hodnoty funkce i mimo tuto oblast. Okolnosti, které nám zajišťují existenci analytického prodloužení funkce můžeme nalézt například v ([8], str. 322). Hlavní myšlenka spočívá v následujícím. Chceme-li analyticky prodloužit funkci definovanou v okolí bodu z_0 do vzdáleného bodu z_n , potom musí existovat konečná sekvence okolí bodů, ležících na křivce γ , po které chceme funkci analyticky prodloužit. Označme $\gamma(a_i)$ body na křivce. Jestliže má být sekvence okolí bodů křivkou γ spojena, potom musí obraz $\gamma([a_i, a_{i+1}])$ ležet celý v okolí bodu $\gamma(a_i)$. Jestliže je funkce analytická v okolí $\gamma(a_0) = z_0$ a existuje sekvence okolí bodů, splňující výše zmíněné podmínky, můžeme ji analyticky prodloužit do bodu z_n . Zároveň je toto prodloužení jednoznačné, tzn. že neexistuje více analytických prodloužení. Na horní a dolní hranici čtverce není žádná nespojitost a tudíž tudíž určitě můžeme analyticky prodloužit řešení pro vnější oblast do oblasti vnitřní. (Naše zdůvodnění není samozřejmě dostačující. Neprovedli jsme žádný matematicky korektní důkaz, pouze jsme na analogii s funkcí komplexní proměnné ukázali možnost, jak k problému přistoupit, ovšem závěry kapitoly (2.2.7) nás utvrzují v matematické korektnosti použitých postupů.)



Obrázek 2.7: Průběh vektorového pole vířivých proudů pro čtvercový magnet

2.2.6. Důkaz dipólového charakteru pole proudů

Z výrazů (2.27) a (2.28) není úplně zřejmé, že má pole dipólový průběh. Dipól v rovině totiž není to samé jako dipól v trojrozměrném prostoru. Při našem důkazu vyjdeme ze dvojice vodičů s proudy opačného směru. Vektorový potenciál jednotlivých vodičů můžeme poměrně snadno vypočítat pomocí užití analogie s elektrostatikou. Užitím vektorového potenciálu přechází řešení magnetostatických úloh na otázku nalezení řešení tří Poissonových rovnic pro jednotlivé složky tohoto vektoru. A protože stejné rovnice mají stejná řešení, můžeme od známého vztahu pro výpočet skalárního potenciálu jednoduše přejít ke vztahu pro složky vektorového potenciálu:

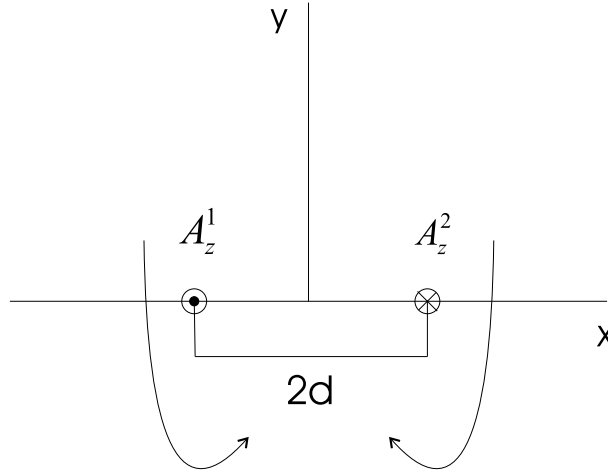
$$\phi(\vec{R}_0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r})}{|\vec{R}_0 - \vec{r}|} dV \quad \Rightarrow \quad A_z(\vec{R}_0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \int_V \frac{j_z(\vec{r})}{|\vec{R}_0 - \vec{r}|} dV \quad (2.42)$$

Nyní můžeme jednoduše použít Gaussův zákon elektrostatiky k výpočtu potenciálu od nekonečného vodiče s délkovou hustotou náboje τ . Snadný výpočet dává:

$$\phi = -\frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln r \quad (2.43)$$

Uvědomíme si, že $\tau = \pi R^2 \rho$, kde R je poloměr vodiče. Porovnáme-li Poissonovy rovnice elektrostatiky a magnetostatiky zjistíme, že $\rho = \frac{j_z}{c^2}$. Výraz pro vektorový potenciál tedy musí vypadat takto:

$$A_z = -\frac{\pi R^2 j_z}{2\pi\epsilon_0 c^2} \ln r = -\frac{I}{2\pi\epsilon_0 c^2} \ln r \quad (2.44)$$



Obrázek 2.8: Dvojice vodičů s proudy opačných směrů

Nyní pracujme s konkrétním případem podle obr. 2.8. Podle tohoto obrázku vypadá vektorový potenciál od prvního a druhého vodiče následovně:

$$A_z^1 = -\frac{I}{2\pi\epsilon_0 c^2} \ln \sqrt{(x+d)^2 + y^2} \quad (2.45)$$

$$A_z^2 = +\frac{I}{2\pi\epsilon_0 c^2} \ln \sqrt{(x-d)^2 + y^2} \quad (2.46)$$

Vektorový potenciál od obou poté můžeme napsat takto:

$$A_z = -\frac{I}{2\pi\epsilon_0 c^2} \ln \frac{\sqrt{(x+d)^2 + y^2}}{\sqrt{(x-d)^2 + y^2}} \quad (2.47)$$

Magnetický dipól v rovině dostaneme, pokud tyto dva vodiče začneme k sobě přibližovat a současně zvětšujeme I takovým způsobem, aby součin $I \cdot d$ zůstal zachován. Pro $d \rightarrow 0$ můžeme při zanedbání členů d^2 psát:

$$A_z = -\frac{I}{2\pi\epsilon_0 c^2} \ln \frac{1 + \frac{xd}{r^2}}{1 - \frac{xd}{r^2}} \quad (2.48)$$

kde jsme použili rozvoj $\sqrt{1+x}$ a opět zanedbali členy s d^2 a vyšší. Nakonec ještě můžeme využít rozvoje $\ln \frac{1+x}{1-x} = 2 \cdot \left(x + \frac{x^3}{3} + \dots \right)$ a dostáváme:

$$A_z = -\frac{I}{\pi\epsilon_0 c^2} \frac{xd}{r^2} \quad (2.49)$$

nebo v polárních souřadnicích:

$$A_z = -\frac{I}{\pi\epsilon_0 c^2} \frac{d \cos \phi}{r} \quad (2.50)$$

Rotací tohoto potenciálu v cylindrických souřadnicích dostaneme průběh magnetického pole okolo dipólu a toto pole by mělo mít analogický průběh jako pole proudů v (2.28). Rotace v cylindrických souřadnicích vypadá následovně:

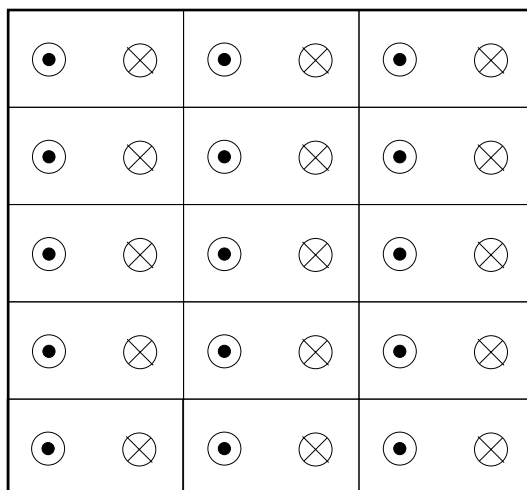
$$\mathbf{rot}\vec{A} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z}, \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial(rA_\phi)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} \right) \quad (2.51)$$

Jednoduchým výpočtem se můžeme přesvědčit, že platí:

$$\vec{B} = \left(\frac{Id \sin \phi}{\pi \epsilon_0 c^2 r^2}, -\frac{Id \cos \phi}{\pi \epsilon_0 c^2 r^2} \right) \quad (2.52)$$

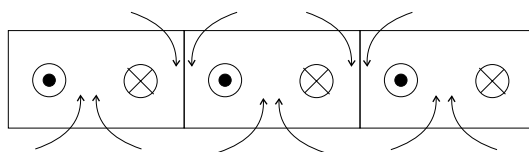
což je výsledek se stejným průběhem jako pole proudů ve vztahu (2.28).

2.2.7. Vířivé proudy čtvercového magnetu



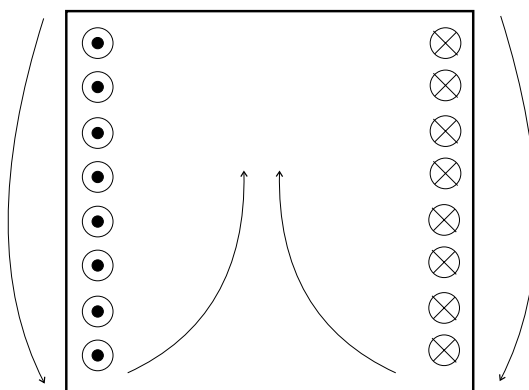
Obrázek 2.9: Skládání čtverce z buněk s dvojicí vodičů s opačnými proudy

Využijme nyní předchozího výsledku k výpočtu pole vířivých proudů kolem čtvercové oblasti s konstantní magnetickou indukcí. Pro lepší orientaci ve výpočtu pracujme s pojmy, se kterými jsme se seznámili v magnetostatice. Fakt, že okolo dvojice vodičů s proudy opačného směru nacházíme stejný tvar pole jako v případě delta magnetků, můžeme využít následujícím způsobem. Představme si náš čtverec sestavený z delta magnetků. Stejně dobře si tuto situaci můžeme představit tak jak ukazuje obr. 2.9. Zde celou oblast sestavíme z buněk, které se skládají vždy z dvojice vodičů s proudy opačného směru. Obr. 2.10 ukazuje, co se děje v jedné vrstvě takto uspořádaných buněk. Toky magnetické indukce směřují v buňce kladným směrem, avšak na hranici buňky směrem opačným. Zdá se tedy, že se příspěvky k toku magnetického pole sousedních buněk vzájemně vyruší. Celá situace se tak značně zjednoduší, jelikož celý problém bude determinován vodiči, které jsou na hranici



Obrázek 2.10: Vzájemné rušení příspěvků od jednotlivých buněk

celého čtverce. Tuto situaci znázorňuje obr. 2.11. Jedná se o obyčejný problém magnetostatiky, kdy je naším úkolem zjistit magnetickou indukci okolo dvou desek, v nichž jsou proudy opačného směru. Nyní můžeme využít našeho výsledku pro dvojici vodičů vzdálených o $2d$.



Obrázek 2.11: K magnetickému poli přispívají pouze proudy na hranici

Hranici našeho čtverce složenou ve své podstatě ze dvou desek s proudy opačného směru poskládáme posouváním dvojice vodičů o infinitesimální vzdálenost ve směru osy y . Vektorový potenciál od dvojice vodičů posunutých o vzdálenost k od počátku můžeme napsat následovně:

$$A_z = -\frac{I}{2\pi\epsilon_0 c^2} \ln \frac{\sqrt{(x+d)^2 + (y-k)^2}}{\sqrt{(x-d)^2 + (y-k)^2}} \quad (2.53)$$

Vektorový potenciál takto poskládané hranice můžeme spočítat následovně:

$$A_z = -\frac{I}{2\pi\epsilon_0 c^2} \int_{-d}^d \ln \frac{\sqrt{(x+d)^2 + (y-k)^2}}{\sqrt{(x-d)^2 + (y-k)^2}} dk \quad (2.54)$$

Pro konkrétní velikost čtverce 2×2 , jehož střed je umístěn v počátku, dostaneme integrací následující tvar vektorového potenciálu (pro zkrácení výrazu jsme vynechali konstantu

$-\frac{I}{2\pi\epsilon_0 c^2}$, jelikož výrazy jsou i bez ní velice nepřehledné):

$$\begin{aligned} A_z = & \frac{1}{2}(y+1) \ln \left(\frac{x^2 + 2x + 2 + y^2 + 2y}{x^2 - 2x + 2 + y^2 + 2y} \right) + \frac{1}{2}(1-y) \ln \left(\frac{x^2 + 2x + 2 + y^2 - 2y}{x^2 - 2x + 2 + y^2 - 2y} \right) + \\ & +(x-1) \left(\arctan \left(\frac{y-1}{x-1} \right) - \arctan \left(\frac{y+1}{x-1} \right) \right) - \\ & -(x+1) \left(\arctan \left(\frac{y-1}{x+1} \right) - \arctan \left(\frac{y+1}{x+1} \right) \right) \end{aligned}$$

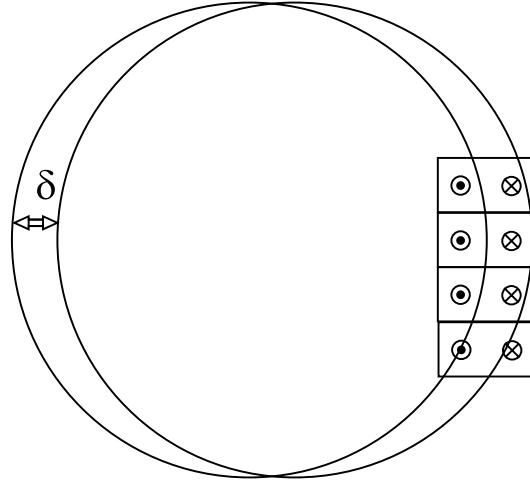
Aplikací rotace dostáváme složky magnetického pole:

$$\begin{aligned} B_x = & -1/2 \ln(x^2 - 2x + 2 + y^2 + 2y) + 1/2 \ln(x^2 + 2x + 2 + y^2 + 2y) + \\ & + 1/2 \ln(x^2 - 2x + 2 + y^2 - 2y) - 1/2 \ln(x^2 + 2x + 2 + y^2 - 2y) \\ B_y = & -\arctan\left(\frac{y+1}{x-1}\right) + \arctan\left(\frac{y-1}{x-1}\right) - \arctan\left(\frac{y-1}{x+1}\right) + \arctan\left(\frac{y+1}{x+1}\right) \end{aligned}$$

Nesmíme zapomenout, že vynechaná konstanta je záporná a proto vypočtené složky mají opačné znamení. Průběh magnetického pole je totožný s tím, které jsme získali pro pole proudů okolo čtvercového magnetu metodou skalárních potenciálů (obr. 2.7). Aplikujme nyní tuto metodu ještě na výpočet pole kolem kruhového magnetu, jelikož výsledek již známe a bude to pro nás potvrzení správnosti předchozích úvah.

2.2.8. Pole proudů od kruhové oblasti

Abychom mohli spočítat vektorový potenciál od vodičů umístěných na hranici kruhu, musíme si uvědomit, že situace není tak zcela jednoduchá jako v případě čtvercového magnetu, kde nám zůstaly na pravé a levé hranici desky, v nichž tekly konstantní proudy opačného směru. U kruhu se velikost proudu bude měnit v závislosti na polárním úhlu. To na první pohled možná není úplně zřejmé, jelikož pokud opět začneme kruh vyplňovat buňkami s dvojicí vodičů opačného směru, tak zákonitě musíme dospět ke schématu, kdy nám na hranici zůstanou vodiče s naprosto identickou velikostí proudu (s opačnými směry v levém a pravém oblouku). Proč tedy bude proud závislý na polárním úhlu? Nejnázornější je představit si dva válce, které opět poskládáme z buněk, v nichž jsou vodiče. Tentokrát však budou buňky v jednom válci složeny pouze z vodičů s proudy s jedním směrem a v druhém válci poté z vodičů s proudy opačného směru. Umístíme nyní tyto dva válce tak, aby se úplně překrývaly. V této konfiguraci neteče tedy žádný proud, jelikož se příspěvky obou válců k proudům zruší. Nyní posuňme jeden z válců nepatrně vůči druhému. Dostaneme tak konfiguraci ekvivalentní postupnému skládání kruhového magnetu z buněk s vodiči opačného směru. Z obr. 2.12 je nyní poměrně zřejmé proč velikost proudů se zvětšujícím se úhlem klesá. Ohraničující křivka nám totiž hrubě řečeno "uřízne" část vodiče s proudem. Pokud navíc přejdeme k válcům, které již nejsou tvořeny velkým množstvím diskrétních vodičů, ale proud v nich teče spojitě, což je ekvivalentní velkému zmenšení našich generujících buněk, je situace naprosto průhledná, jelikož je jasně vidět, jak se plocha, kde



Obrázek 2.12: Velikost proudů klesá se vrůstajícím polárním úhlem

se proudy vzájemně neruší, zmenšuje s rostoucím úhlem. Nyní bychom samozřejmě mohli provést detailní výpočet analogický postupu u čtvercové oblasti. Provedme však jen kvantitativní analýzu, která nám dá potřebné informace o funkčnosti modelu. Zjistíme nejdříve, jak vypadá magnetické pole od těchto vůči sobě posunutých válců uvnitř oblasti. Pro každý válec zvlášť můžeme použít Ampérova zákona. Magnetické pole roste směrem od osy, protože integrační křivka obepíná stále větší množství proudu. V kartézských souřadnicích dostáváme pro magnetické pole uvnitř válců tyto vztahy (konstantu vztahující se k velikosti proudu ve válcích pro jednoduchost zápisu označme C):

$$\vec{B}_{\otimes} = -C(-y, x - \delta); \quad \vec{B}_{\odot} = C(-y, x) \quad (2.55)$$

kde jsme o vzdálenost δ v kladném směru osy x posunuli válec, v němž proudy tečou v záporném směru osy z . Jestliže nyní sečteme magnetické pole od obou válců, dostaneme:

$$\vec{B}_c = C(\vec{B}_{\otimes} + \vec{B}_{\odot}) = C(0, \delta) \quad (2.56)$$

což je v plném souladu s naším očekáváním. Pole proudů kruhového magnetu v oblasti Ω_1 totiž také vycházelo konstantní v kladném směru osy y . Jak to dopadne ve vnější oblasti? Vně také platí Ampérův zákon, nyní však magnetické pole klesá se vzdáleností od osy válce. Magnetické pole posunutých válců (opět s vynecháním konstant) můžeme napsat takto (tentokrát si každý posuneme o $\delta/2$ opačnými směry - nic to nezmění na výsledku):

$$\vec{B}_{\otimes} = -C\left(-\frac{y}{(x - \frac{\delta}{2})^2 + y^2}, \frac{x - \frac{\delta}{2}}{(x - \frac{\delta}{2})^2 + y^2}\right) \quad (2.57)$$

$$\vec{B}_{\odot} = C\left(-\frac{y}{(x + \frac{\delta}{2})^2 + y^2}, \frac{x + \frac{\delta}{2}}{(x + \frac{\delta}{2})^2 + y^2}\right) \quad (2.58)$$

pro malé δ potom pro magnetické pole dostáváme výraz:

$$\vec{B}_c = C \left(\frac{2xy\delta}{(x^2 + y^2)^2}, -\frac{(x^2 - y^2)\delta}{(x^2 + y^2)^2} \right) \quad (2.59)$$

což je pole dipólu. Dosáhli jsme tedy kvantitavní shody s výpočtem v sekci (2.2.2). Zároveň jsme docílili hlubšího vhledu do řešení. Z řešení uvedeného v sekci (2.2.2) nebylo vůbec jasné, odkud se dipólový charakter pole vířivých proudů vzal. Nová metoda nám ukazuje jasný původ tohoto charakteru pole proudů.

2.3. Meze platnosti dipólového modelu

(Ve všech úvahách této kapitoly budeme předpokládat velice tenkou vodivou desku)¹

Pokud aplikujeme výsledky dipólového modelu na desku tvořenou ideálním vodičem, dostaneme nesprávné závěry. To ovšem znamená, že předchozí model má své meze platnosti a není tedy zcela dostatečný k popisu magnetu nad vodivou deskou. Při hledání důvodů, proč dipólový model v případě ideálního vodiče naprosto selhává, se velice rychle dostáváme k odpovědi. Za nesprávnost modelu v limitě velkých vodivostí můžou sekundární vířivé proudy a proudy vyšších řádů, které vznikají jako důsledek změn magnetického pole pocházejícího od primárních vířivých proudů. Při malých vodivostech jsou tyto sekundární proudy velice slabé, jak si za chvíli ukážeme, a ve výsledku se tedy příliš neprojeví, ovšem při velkých vodivostech, již nelze jejich přítomnost přehlížet a je nutné, je do modelu nějakým způsobem zahrnout. Následující podkapitola nám poskytne k řešení tohoto problému velice účinný nástroj.

2.3.1. Vířivé proudy v případě $\sigma \rightarrow \infty$

Ze vztahu (2.29) plyne lineární závislost brzdné síly na vodivosti desky. Nabízí se otázka, co se stane, pokud by deskou byl supravodič². V tomto případě by totiž vodivost desky byla nekonečná a tím pádem by byla nekonečná i brzdná síla, což není zrovna fyzikální. Představme si nejdříve, že máme v prostoru pouze supravodivou desku. Měrný odpor této desky je nulový. Z Ohmova zákona tedy plyne (pokud je proudová hustota v desce konečná, což musí být), že i elektrické pole je všude v desce nulové, potažmo i jeho rotace. Z Faradayova zákona potom dostáváme:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \quad (2.60)$$

Z čehož plyne, že je-li magnetické pole nulové na začátku, pak musí být nulové stále. Přejděme nyní k následující počáteční konfiguraci. Pro názornost si představme, že máme

¹Tato kapitola byla vypracována nezávisle na [11], ovšem po nalezení uvedeného článku, jsem některé formulace podle [11] upravil.

²Ve skutečnosti supravodičem myslíme ideální vodič s nekonečnou vodivostí. U supravodiče dochází ještě k dalším efektům.

supravodivou desku ³ a na ní kruhový magnet, opět s konstantní magnetickou indukcí v záporném směru osy z . Zatím je soustava dejme tomu při pokojové teplotě. Nyní začneme teplotu snižovat a jakmile dosáhneme teploty, kdy se deska stává supravodivou, nastane Meissnerův jev, tzn. magnetické pole bude z desky vypuzeno (tím, že si deska vytvoří proudy, které budou přesně kompenzovat mag. pole kruhového magnetu). Proudů nejsou nekonečné - jejich velikost je taková, aby kompenzovaly přiložené pole. Na místě proudů v desce si můžeme představovat i kruhový magnet opačně orientovaný, než náš přiložený - zrcadlový magnet. Jakou práci musíme vykonat k přesunutí magnetu mezi dvěma body? Energie se nikam neztrácí. Disipace energie v desce žádná není, protože je supravodivá. Při přesunu tedy nekonáme žádnou práci, z čehož plyne, že brzdící síla je nulová. To je překvapující, protože z našich předchozích výsledků plyne, že s rostoucí vodivostí brzdící síla roste, ale v nekonečné limitě dostáváme nulovou brzdící sílu. Raději se ještě podrobněji zamysleme nad tím, jestli se energie opravdu někam nevytrácí. Představme si, že přiložený magnet postupně vzdalujeme od desky (berme trochu realističtější model magnetu, u kterého se mění magnetická indukce se vzdáleností od desky - takový případ nás ostatně zajímá). Jak se magnet bude vzdalovat, bude se indukovat podle Lenzova zákona elektrické pole, které bude zpomalovat původní proud v desce. Čili proud v desce bude mizet. Jakmile bude vzdalující se magnet dostatečně daleko (řekněme v nekonečnu), proudy v desce úplně vymizí. Nyní magnet v nekonečnu posuňme o malé δ ve směru požadovaného pohybu magnetu. Nyní ho opět začneme posunovat zpátky k desce. V desce se zase bude vytvářet proud kompenzující přikládané magnetické pole. Změny energie při vzdalování a přibližování se vzájemně zruší a posunutí v nekonečnu o malé δ také žádné změny v energetické bilanci nezpůsobí. Celý výše uvedený postup je tedy ve své podstatě ekvivalentní posouvání dvojice fixovaných magnetů ve volném prostoru. A energie k přesunu tedy skutečně zapotřebí žádná není. To možná trochu odporuje naší zažitě představě, že proudy v supravodivém materiálu nemizí - v našem případě se totiž "epicentrum" proudů přesouvá spolu s přiloženým magnetem a proudy na místě, kde již není magnetická indukce, prostě vymizí. Toto zmizení proudů ovšem není důsledkem srážek elektronů s kmity krystalové mřížky, ale je způsobeno změnou magnetického pole v daném místě. Tam, kde mizí magnetické pole, se totiž indukuje pole elektrické a to je zodpovědné za ubrždění proudů. Kruhový magnet, ani žádný jiný (zcela libovolný), tedy opravdu není nad supravodivou deskou vůbec brzděn.

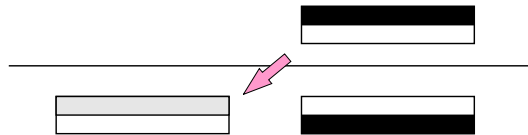
Poprvé se setkáváme se silou, která je jiného charakteru než brzdícího - normálovou silou působící na magnet, která rozhodně nebude přítomna pouze v limitním případě. Současně se nabízí další velice zajímavá otázka. Proč brzdící síla roste se zvyšující se vodivostí, ale pro nekonečnou vodivost je brzdící síla nulová? Proč brzdící síla roste s rostoucí vodivostí je zřejmé z toho, že velikost náboje rozmístěného na hranici není závislá na vodivosti. Protože tento náboj je zodpovědný za elektrické pole, které pohání proudy, tak z Ohmova zákona dostáváme lineární závislost síly na vodivosti. V limitě nekonečné

³Ideální vodič samozřejmě nebude vykazovat Meissnerův jev, ovšem při spontánním vytvoření magnetu nad deskou, se v ideálním vodiči vytvoří zrcadlový obraz magnetu analogicky jako při přechodu supravodiče do supravodivého stavu. Supravodič a Meissnerův jev zmiňují pouze proto, abych ilustroval, že i v ideálním tenkém vodiči se bude tvořit zrcadlový obraz magnetu nad ním.

vodivosti však zřejmě velikost indukovaných proudů nezáleží na vodivosti, ale spíše odráží změnu magnetického pole. Výkonové ztráty v desce $P = RI^2$ zapsané v integrálním tvaru

$$P = \frac{1}{\sigma} \int_V |\vec{j}|^2 dV \quad (2.61)$$

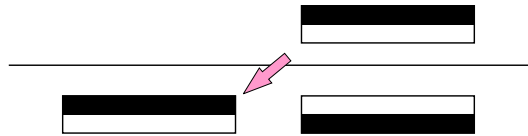
potom za předpokladu nezávislosti proudů na vodivosti v nekonečné limitě dávají nulu. A nulové ztráty znamenají nulovou brzdnu sílu. Stále však chybí jakýsi mezičlánek spojující řešení pro běžné vodivosti a limitní případ, kdy proudy pod magnetem víří dokola. Zkusme se tedy na pohyb magnetu podívat z trochu jiného úhlu. Vytvořme (velice rychle ho k desce z nekonečna přiblížme) nad supravodivou deskou magnet. Následkem této akce se v supravodivé desce indukují proudy, které jsou ekvivalentní zrcadlovému magnetu. Jak simulovat pohyb magnetu? Co zkusit za nějaký čas Δt vytvořit současně následující - na místě původního magnetu magnet zrcadlový a v nějakém místě posunutém o Δx magnet stejný jako ten, co jsme vytvořili první? Co to bude mít za následek? Zrcadlový magnet vytvořený v původním místě zruší původní magnet a zároveň také zruší zrcadlový obraz původního magnetu v supravodivé desce. Magnet vytvořený na novém místě zase vytvoří zrcadlový obraz v supravodivé desce pod sebou, takže jsme se dostali k počáteční situaci, pouze posunutí o Δt v čase a Δx v prostoru. Opakováním těchto kroků dosáhneme požadovaného pohybu magnetu. Nyní opakujme celý myšlenkový experiment, tentokrát ovšem s deskou, která již nemá nekonečnou vodivost (vodivost berme stále velmi velkou, ale konečnou). Zase vytvořme magnet nad deskou. V desce se vytvoří zrcadlový magnet. Ovšem je tu jeden rozdíl. Zrcadlový magnet začne ihned slábnout. Proč? Protože jsme řekli, že zrcadlový magnet je ekvivalentní proudům, které se vytvoří v důsledku změny magnetického pole. Tyto proudy však v desce, která má konečnou vodivost, postupně slábnou a s nimi tedy musí slábnout i zrcadlový magnet. Pokračujme v našem myšlenkovém experimentu. Za nějaký čas Δt vytvořme opět na původním místě zrcadlový magnet, než byl ten původní. To bude doprovázeno vytvořením zrcadlového magnetu v desce (který bude stejný jako magnet na původním místě). Zrcadlové magnety v desce se však tentokrát nezruší. Původní zrcadlový magnet totiž za čas Δt zeslábl a v desce v čase $t_0 + \Delta t$ zůstane magnet, který je stejný, pouze mnohem slabší než magnet, který jsme nad deskou vytvořili v čase t_0 . Magnet vytvořený v místě $x_0 + \Delta x$ v čase $t_0 + \Delta t$ (stejně orientovaný jako magnet vytvořený nad deskou v čase t_0) zase vytvoří zrcadlový magnet v desce. Dejme tomu (pro názornost – díky superpozici zůstane vše v platnosti i v případě překryvu), že Δx je větší než průměr magnetu. Pak máme v čase $t_0 + \Delta t$ situaci, která je znázorněna na obr. 2.13. Z obrázku je vidět, že se skutečně objeví síla, která působí proti směru pohybu. K ujištění



Obrázek 2.13: Situace v čase $t_0 + \Delta t$ pro desku s konečnou vodivostí

ještě můžeme použít energetických úvah. Existence situace v čase $t_0 + \Delta t$ zjevně vyžaduje dodání energie, protože slabý magnet "musel být z něčeho vytvořen" a v původní situaci nebyl. Jinými slovy chceme-li mít rovnoměrný pohyb (tak byl myšlenkový experiment zkonstruován) musíme dodávat energii. A pokud ji nedodáváme, musí magnet zpomalovat. Co se stane, když vodivost ještě o něco snížíme? Celá situace bude vypadat obdobně, ovšem slabý magnet, na pozici původního zrcadlového, bude nyní o něco silnější, protože původní zrcadlový magnet za čas Δt více zeslábně. Z toho plyne, že brzdná síla bude růst při snižování vodivosti z nekonečných hodnot.

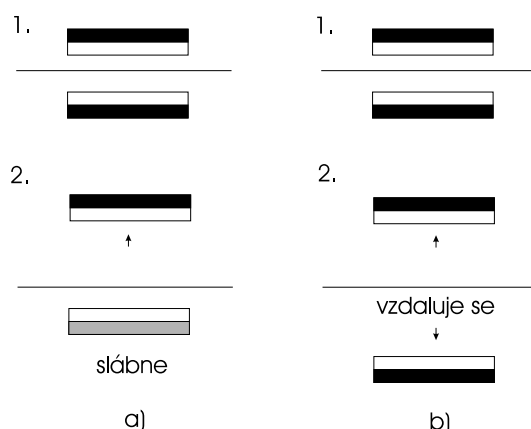
Shrňme si naši situaci. Když vodivost pomalu zvyšujeme z malých hodnot, brzdná síla roste. V případě, že vodivost snižujeme z nekonečné hodnoty, brzdná síla také roste. Předpokládáme-li spojitou závislost brzdě síly na vodivosti desky, tak musí existovat nějaké maximum brzdě síly. Pro zajímavost se můžeme zeptat, jak myšlenkový experiment dopadne, budeme-li se blížit k nulové vodivosti? V tomto případě bude situace vypadat jako obr. 2.14. Na první pohled se může zdát, že brzdná síla je docela velká, ale musíme



Obrázek 2.14: Situace v čase $t_0 + \Delta t$ pro desku s téměř nulovou vodivostí

si uvědomit, že magnet vlevo v desce je tam pouze zanedbatelně krátkou dobu (při nulové vodivosti tam pak vůbec není) a tudíž silově působí pouze velice krátce. Pokud bychom sílu zprůměrovali přes celý časový úsek Δt , po který nový magnet setrvává na místě $x_0 + \Delta x$, byla by naprosto zanedbatelná.

Pro úplnost nyní stručně popišme, co se děje při postupném zvyšování vodivosti z nulové hodnoty. Pivovní dvojice magnetů za sebou zanechává něco jako stopy ve sněhu - této analogie se držme, protože je poměrně názorná. Pro malé vodivosti desky jsou stopy hluboké, ale vítr fouká hrozně rychle a stopy brzy zavane. Pro vodivosti ani příliš malé ani příliš velké jsou stopy mělké a vítr fouká pomaleji. Pro vodivost jdoucí k nekonečnu jsou stopy infinitezimálně mělké, ale vítr v podstatě nefouká. Je to sice pěkná analogie, ale nedává nám žádné konkrétní kvantitativní výsledky. Pro pokročení dále si musíme trochu jiným způsobem představit slábnutí magnetických stop v desce. Nemohli bychom slábnutí magnetických stop ztotožnit s jejich vzdalováním od povrchu desky? Pokud se totiž vrátíme k situaci, kdy nad vodivou deskou vytvoříme magnet a v desce se vytvoří jeho zrcadlový obraz a začneme se s magnetem nad deskou vzdalovat, dojde ke slábnutí zrcadlového magnetu. Vzdalující se magnet má stále stejné magnetické pole kolem sebe, ale jeho zrcadlový obraz slábně. Tato situace musí být analogická situaci, kdy se od rozhraní desky vzdalují oba magnety zároveň. Nejlépe je to vidět z obr. 2.15. Můžeme tedy zavést jakousi charakteristickou rychlost vzdalování zrcadlových magnetů (již předpokládáme, že výše uvedené úvahy se dá využít v situacích, kdy deska nemá nekonečnou vodivost a zrcadlové magnety tudíž během Δt slábnou a nebo se tedy analogicky vzdalují charakteristickou rychlostí).



Obrázek 2.15: Dvě naprosto identické situace z různých úhlů pohledu

Označme tuto rychlost v_m . Již nyní můžeme odhadnout, jakým způsobem bude tato rychlost záviset na vodivosti desky - měla by být vodivosti nepřímo úměrná, jelikož při větší vodivosti slábnou (vzdalují se) zrcadlové magnety pomaleji. Nyní se můžeme pustit do celkem pěkné analýzy. Už víme, že na náš magnet při jeho pohybu působí jednak normálová síla a jednak brzdná síla. Předpokládejme, že na zpomalující se magnet budeme působit takovou silou, která právě bude vyrovnávat brždění (tedy silou opačného směru a stejné velikosti jakou má síla brzdná). Výkon, který dodáváme, je roven:

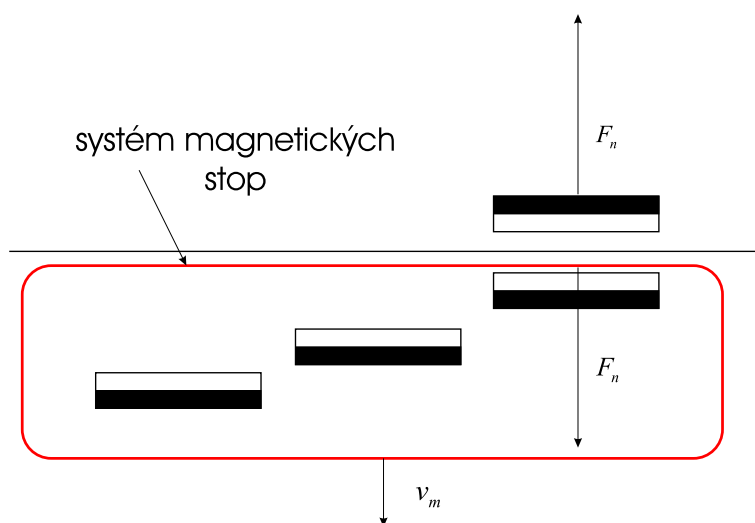
$$P = F_b \cdot v \quad (2.62)$$

kde F_b je brzdná síla a v je rychlost magnetu. Tento výkon se spotřebovává na ztráty vířivých proudů v desce. Předtím, než postoupíme dále, zdůrazněme, že v našem modelu "kroků po Δx " se magnet nad deskou ve vertikálním směru nepohybuje. Z toho by plynulo, že výkon normálové síly je nulový, ovšem nesmíme dělat příliš unáhlené závěry. Záleží totiž opět na úhlu pohledu. Podívejme se na obr. 2.16. Z něj je vidět, že na magnet nad deskou působí normálová síla F_n od systému magnetických stop. Tato síla nekoná žádnou práci, protože magnet nad deskou se nepohybuje ve vertikálním směru. Ovšem ke každé akci existuje reakce, tudíž na systém magnetických stop musí působit síla stejné velikosti, ale opačného směru než F_n . Protože se systém magnetů jako celek pohybuje rychlostí v_m , působící síla F_n koná práci a jí příslušný výkon je:

$$P = F_n \cdot v_m \quad (2.63)$$

Na první pohled se může zdát, že jsme nic zajímavého nedostali, ovšem když si uvědomíme, že výkon, který dodáváme magnetu k tomu, abychom ho udrželi při konstantní rychlosti pohybu, se ztrácí v disipaci energie vířivými proudy, což modelujeme vzdalujícími se magnetickými stopami, dospíváme k tomu, že dva výše spočítané výkony jsou si rovny. Musí tedy platit:

$$F_n \cdot v_m = F_b \cdot v \quad (2.64)$$

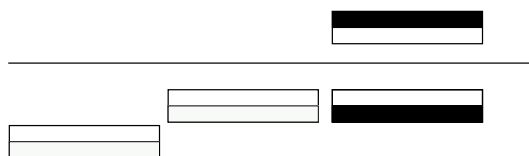


Obrázek 2.16: Síla působící na systém stop od magnetu je reakcí na sílu od systému magnetických stop na referenční magnet nad deskou

Již jsme zjistili, že brzdná síla je pro malé rychlosti úměrná lineárně rychlosti. Použijeme-li právě získané rovnice a uvědomíme si, že v_m je charakteristická konstanta materiálu, dospíváme okamžitě k závěru, že pro malé rychlosti platí:

$$F_n \sim v^2, \quad (2.65)$$

což je rozumný výsledek, protože normálová síla by určitě neměla měnit směr, pokud otočíme směr pohybu magnetu, a toto nám zajišťuje právě druhá mocnina. Toto však není jediný výsledek, který můžeme jednoduše získat. Pro velké rychlosti magnetu nad deskou se bude zmenšovat interval Δt mezi jednotlivými kroky. To bude mít za následek, že zrcadlový magnet příliš nezslábne během Δt a poté, co v čase $t_0 + \Delta t$ umístíme do tohoto místa magnet opačně orientovaný (stejný způsob jaký jsme již jednou použili k simulaci krokovaného pohybu magnetu), budeme v situaci, kdy na místě x_0 je velmi slabý magnet. Situace je znázorněna na obr. 2.17. Použili jsme kombinaci zeslabování na místě



Obrázek 2.17: Systém vzdalujících se magnetických stop bude tvořen velmi slabými magnety

pro první stopu a poté vzdalování pro ostatní magnetické stopy. Tímto způsobem je situace

nejprůhlednější. Z obr. 2.17 je nyní jasně vidět, že největší příspěvek k normálové síle bude mít magnet pod ním. Z toho dále plyne, že normálová síla není pro velké rychlosti na rychlosti v podstatě závislá, protože za normálovou sílu je zodpovědný magnet, který se pohybuje simultánně s magnetem nad deskou. Z rovnice (2.64) nyní plyne závěr:

$$F_b \sim \frac{1}{v} \quad (2.66)$$

Tento vztah ověříme nepřímou úvahou. Jistě jste si již povšimnuli, že normálová síla pro velkou rychlost a vysokou vodivost na těchto veličinách nezávisí. Pro malé rychlosti zase brzdná síla roste lineárně s rychlostí i s vodivostí. Je to náhoda? Není. Náš model totiž vypadá stejně pro rostoucí vodivost i rychlost. Tím, že zvýším rychlost, zkrátím interval Δt mezi jednotlivými kroky, což je ovšem analogické zvýšení vodivosti při nezměněném kroku Δt . Zvyšování rychlosti je tedy analogické zvyšování vodivosti a samozřejmě to platí i naopak. Pro lepší představu se ještě vraťme k naší analogii se stopami ve sněhu. Zpočátku jdu nějakou rychlostí ve sněhu a vítr za mnou zavanuje stopy. Zrychlím-li krok a vítr vane stále stejnou rychlostí, zůstává za mnou větší počet viditelných stop. Co když ovšem půjdu stále stejnou rychlostí jako na začátku a naopak se zmenší rychlost větru (to se rovná zvýšení vodivosti)? Pak za mnou bude opět zůstávat více stop. Je tedy vidět, že brzdná a normálová síla budou mít stejný průběh pro rychlosti i vodivosti. Můžeme tedy ihned psát následující vztahy:

$$F_b \sim \frac{1}{\sigma} \quad (2.67)$$

pro velká σ a

$$F_n \sim \sigma^2 \quad (2.68)$$

pro malé vodivosti. Vztah (2.67) plyne ze vztahu (2.61) a vztah (2.68) plyne z platnosti vztahu (2.65). Ověřením vztahu (2.67) jsme tedy nepřímou ověřili i vztah (2.66). Je vidět, že i bez počítání jsme pomocí našeho modelu dostali velice silné a zajímavé výsledky, které rozhodně z našeho původního dipólového modelu nedostaneme. Analýzou řešení dipólového modelu jsme tedy dospěli k modelu lepšímu. V kapitole *Řešení pomocí Maxwellových rovnic* využijeme právě získaných výsledků k vytvoření nového matematického modelu pole vířivých proudů.

2.3.2. Vliv konečné velikosti desky

Velice zajímavé je analyzovat situaci, kdy velikost desky není nekonečná. Pokusme se v této sekci alespoň o hrubou aproximaci vlivu konečné velikosti desky na vířivé proudy. Uvažujme kruhovou desku o poloměru R_D . Můžeme vyjít z okrajových podmínek (2.21), doplněných o jednu další podmínku, totiž že radiální proudy musí být nulové ve vzdálenosti R_D . Berme tedy kruhovou desku, na níž se pohybuje okolo středu magnet. Napišme pro jistotu okrajové podmínky nového zjednodušeného problému:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \phi} \psi_2 - \frac{\partial}{\partial \phi} \psi_1 = -\sigma v_x B R \cos \phi \\ \frac{\partial}{\partial r} \psi_2 - \frac{\partial}{\partial r} \psi_1 = 0 \\ \frac{\partial}{\partial r} \psi_2|_{R_D} = 0 \end{cases} \quad (2.69)$$

Dá se opět poměrně snadno uhádnout, v jakém tvaru je nutné hledat řešení. Aby byla splněna třetí okrajová podmínka, musíme přidat nějaké členy, které rostou s r . Volbou nulových konstant bychom docílili pouze triviálního nulového řešení, což není žádoucí. Přepokládaný tvar potenciálů v oblasti Ω_1 a Ω_2 jsem zvolil následovně:

$$\psi_1(r, \phi) = K_1 + Ar \cos \phi + Br \sin \phi \quad (2.70)$$

$$\psi_2(r, \phi) = K_2 + \frac{C}{r} \cos \phi + \frac{D}{r} \sin \phi + Er \cos \phi + Fr \sin \phi \quad (2.71)$$

Dosazením těchto rovnic do okrajových podmínek dostaneme požadovaná řešení pro potenciály. Po jednoduchých, ale celkem zdlouhavých úpravách vychází:

$$\psi_1(r, \phi) = K_1 + \frac{1}{2} \sigma v_x B_0 r \left(1 - \frac{R^2}{R_D^2} \right) \sin \phi \quad (2.72)$$

$$\psi_2(r, \phi) = K_2 - \frac{1}{2} R^2 \sigma v_x B_0 \sin \phi \left(\frac{1}{r} + \frac{r}{R_D^2} \right) \quad (2.73)$$

aplikací gradientu v polárních souřadnicích potom pro proudy v jednotlivých oblastech dostáváme:

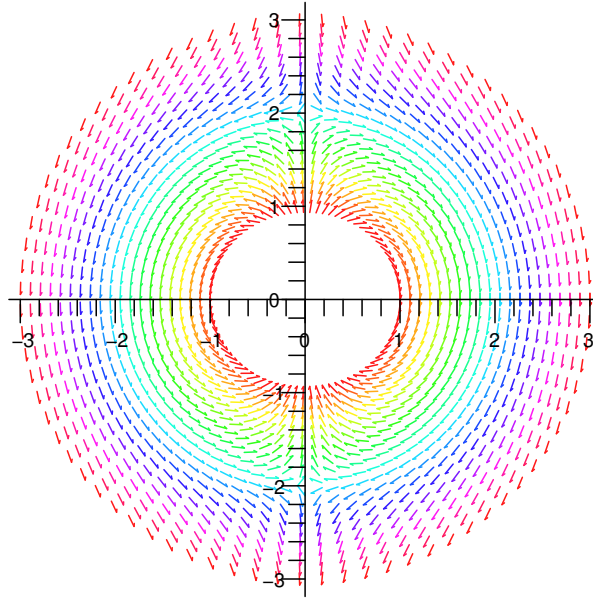
$$\vec{j}_1 = \left(0, \frac{1}{2} \sigma v_x B \left(1 - \frac{R^2}{R_D^2} \right) \right) \quad (2.74)$$

$$\vec{j}_2 = \frac{1}{2} \sigma v_x B \left(\left(\frac{R}{r R_D} \right)^2 (R_D^2 - r^2) \sin \phi, - \left(\frac{R}{r R_D} \right)^2 (R_D^2 + r^2) \cos \phi \right) \quad (2.75)$$

Ve vnitřní oblasti tedy dojde k zeslabení proudů úměrně druhé mocnině poměru velikosti magnetu a desky. To v našem zjednodušeném případě, kdy je magnetické pole pouze v oblasti Ω_1 vede taktéž k zeslabení brzdě síly opět o člen, který je úměrný druhé mocnině poměru velikosti magnetu a desky. Pole vně pak znázorňuje obr. 2.18. Z obrázku je vidět, že radiální proudy na hranici desky jsou nulové, což je nutná podmínka pro správnost řešení. Je třeba zdůraznit, že uvedený výpočet je pouze kvantitativním odhadem vlivu konečné velikosti desky na velikost a tvar pole vířivých proudů. Vyšli jsme z velice zjednodušené představy, kdy je magnet centrován na desce. Při pohybu magnetu více na kraji kruhové desky bychom museli použít značně složitějších výpočtů. Při vykreslování obrázku byla opět zafixována velikost proudových vektorů, aby se docílilo názornosti a přehlednosti. Pro ujištění správnosti výpočtu můžeme provést limitu pro $R_D \rightarrow \infty$. Snadno můžeme nahlédnout, že limita pro nekonečnou desku je shodná s výsledky, které jsme již odvodili dříve.

2.3.3. Proudý sekundární a vyšších řádů a jejich magnetická pole

Je velice zajímavé prozkoumat, do jaké míry mohou vytvořené vířivé proudy ovlivnit původní magnetické pole. Pokud bude vodivost desky malá, pak zřejmě můžeme příspěvek od proudů zanedbat. Co se však bude dít v případě, kdy bude vodivost nebo rychlost velká?



Obrázek 2.18: Pole proudů okolo kruhového magnetu s poloměrem $R = 1$ pohybujícího se na konečné kruhové desce s poloměrem $R_D = 2$

Můžeme i poté příspěvek od vířivých proudů k původnímu magnetickému poli zanedbat? Jak jsme si již ukázali na příkladu dokonale vodivé desky, nemůžeme. Zkusme nyní zjistit, jak velké je magnetické pole, které je vytvářeno vířivými proudy indukovanými v desce a porovnejme ho z velikostí původního pole. Nejsnadněji to můžeme zjistit následovně. Použijme jednu z Maxwellových rovnic:

$$\mathbf{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \quad (2.76)$$

Jelikož známe rotaci proudů (2.18), která je společná pro obě oblasti Ω_1 a Ω_2 , bude výhodné na obě strany výše uvedené rovnice aplikovat rotaci. Tím dostaneme:

$$\Delta \vec{B} = \mu_0 \sigma v_x \cos \phi \delta(r - R) B \hat{z} \quad (2.77)$$

Je vidět, že de facto máme jednu Poissonovu rovnici pro z-tovou složku magnetického pole. Řešení můžeme v analogii s elektrostatikou psát ve tvaru:

$$B_z = -\frac{\mu_0 \sigma v_x B_0}{4\pi} \int_V \frac{\cos \phi \delta(r' - R)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV \quad (2.78)$$

kde jsem B přeznačil na B_0 , aby bylo jasné, že se jedná o pole původem od magnetu, \vec{r} a \vec{r}' jsou po řadě vektor z počátku soustavy k vyšetřovanému bodu a vektor ke zdroji pole, tedy standartní značení. V δ -funkci se \vec{r}' objevil z toho důvodu, že zdroje máme pouze na hranici kruhu (zdroj je $\mathbf{rot} \vec{j}$). Pro smysluplné porovnání primárního magnetického pole

a pole vytvářeného od vířivých proudů musíme výraz transformovat tak, abychom dostali nějaký bezrozměrný koeficient porovnávající obě pole. To můžeme jednoduše provést takto:

$$\vec{r} = R\vec{\rho}, \quad \vec{r}' = R\vec{\rho}', \quad dV = R^3 dW, \quad (2.79)$$

kde $\vec{\rho}$, $\vec{\rho}'$, dW jsou bezrozměrné veličiny. Vlastně jsme provedli určité naškálování. Nyní můžeme psát:

$$B_z = -\frac{\mu_0 \sigma v_x B_0}{4\pi} \int_W \frac{\cos \phi \delta(R(\rho' - 1))}{R|\vec{\rho} - \vec{\rho}'|} R^3 dW \quad (2.80)$$

Nyní můžeme využít známého vztahu pro δ -funkci:

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x) \quad (2.81)$$

Pro náš případ poté platí:

$$\delta(R(\rho' - 1)) = \frac{1}{R} \delta(\rho' - 1) \quad (2.82)$$

Po dosazení do (2.80) dostáváme:

$$B_z = -\frac{\mu_0 \sigma v_x B_0 R}{4\pi} \int_W \frac{\cos \phi \delta(\rho' - 1)}{|\vec{\rho} - \vec{\rho}'|} dW \quad (2.83)$$

Integrál je již bezrozměrný. Zbývá ověřit, jestli je bezrozměrný i výraz:

$$\mu_0 \sigma v_x R \quad (2.84)$$

V následujících úvahách budeme vynechávat nejrůznější konstanty, jelikož naším cílem je pouze důkaz bezrozměrnosti výše uvedeného výrazu. Platí následující:

$$\frac{F}{q} = v_x B = \frac{\mu_0 I v_x}{R} \quad (2.85)$$

kde levá rovnost plyne ze vztahu pro Lorentzovu sílu a druhá z Ampérova zákona (vodič s proudem I). Můžeme tedy psát:

$$\mu_0 v_x = \frac{R F}{q I} \quad (2.86)$$

pro σ dále z Ohmova zákona plyne:

$$\sigma = \frac{I}{U R} \quad (2.87)$$

Pro náš výraz tedy nakonec dostáváme:

$$\mu_0 \sigma v_x R = \frac{F R}{q U} \quad (2.88)$$

Čitatel i jmenovatel má rozměr energie, takže výraz je skutečně bezrozměrný. Zbývá zjistit jak velký je přibližně integrál. Především si musíme uvědomit, že δ -funkce vybere při

integrování od nuly do nekonečna pouze $\rho' = 1$. Pro vektor z počátku k vyšetřovanému bodu a vektor z počátku ke zdroji můžeme tedy psát:

$$\vec{\rho} = (\rho \cos \alpha, \rho \sin \alpha, 0), \quad \vec{\rho}' = (\cos \phi, \sin \phi, 0) \quad (2.89)$$

Nesmíme také zapomenout na Jakobián ρ' , ovšem $|\rho'| = 1$, takže se nic neprojeví. S využitím výše uvedených vztahů pro vektory $\vec{\rho}$ a $\vec{\rho}'$ můžeme integrál psát následovně:

$$B_z = -\frac{\mu_0 \sigma v_x B_0 R u}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos \phi}{\sqrt{\rho^2 - 2\rho \cos(\alpha - \phi) + 1}} d\phi, \quad (2.90)$$

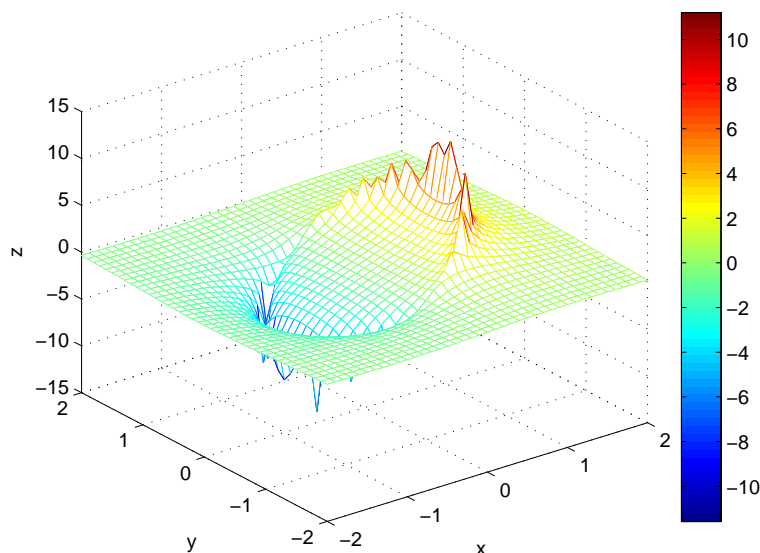
kde u jsme definovali následovně (tloušťka desky měřená v jednotkách R):

$$u = \frac{d}{R}. \quad (2.91)$$

Zbývá rozhodnout, jakých hodnot může nabývat integrál:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos \phi}{\sqrt{\rho^2 - 2\rho \cos(\alpha - \phi) + 1}} d\phi \quad (2.92)$$

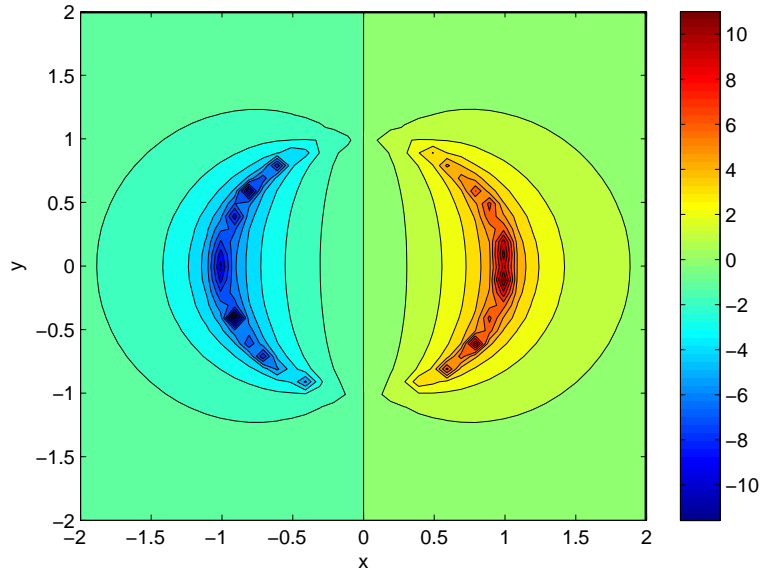
Hodnoty tohoto integrálu pro různá ρ a α jsou na obr. 2.19 a pro snadnější náhled také ve formě vrstevnic na obr. 2.20. Je vidět, že velkých hodnot integrál nabývá pouze na



Obrázek 2.19: Velikost bezrozměrného integrálu

hranici kruhu, kde jsou zdroje, takže se dostáváme do oblasti singularit, avšak i při velmi

velkém přiblížení k hranici velikost bezrozměrného integrálu dosahuje maximálních hodnot kolem 10. Ve většině kruhu je pak velikost integrálu relativně blízká nule. Vně kruhu velikost integrálu logicky musí klesat k nule, kvůli přítomnosti ρ ve jmenovateli. Graf nám bohužel neposkytuje příliš dobrou představu, do jaké míry indukované proudy ovlivňují původní magnetické pole. Výhodné bude sečíst velikosti z-tové složky vektoru magnetické indukce uvnitř kruhu a vydělit počtem dílků mříže použité k výpočtu. Tato hodnota se nebude při zvětšování rozlišení příliš měnit, bude konvergovat k určité hodnotě a dá nám jasnější představu o velikosti sekundárního magnetického pole. V MatLabu jsem provedl několik výpočtů s různým rozlišením následujícím způsobem. Pro pole z mřížky, která spadala do oblasti kruhu, jsem spočítal velikost integrálu a hodnoty integrálů (jejich absolutní hodnoty) pro všechna pole ležící v kruhu, sečetl jsem je a následně podělil počtem polí. Tím jsem obdržel průměrnou hodnotu velikosti vyšetřovaného integrálu v oblasti kruhu. Hodnota integrálu při zvyšujícím se rozlišení konvergovala k číslu 2.15. Budeme tuto hod-



Obrázek 2.20: Velikost bezrozměrného integrálu-vrstevnice

notu brát jako směrodatnou pro naši analýzu velikosti sekundárního magnetického pole. Dále budeme pracovat s měděnou deskou, jejíž vodivost je $\sigma = 6 \cdot 10^7 \Omega^{-1} \text{m}^{-1}$, s magnetem o poloměru $R = 0.01 \text{ m}$. Tloušťku desky musíme brát v násobcích R , protože jsme jím naškálovali celý všechny délkové rozměry. Většinou pracujeme s deskami s tloušťkou maximálně desetiny poloměru magnetu, takže $d \leq 0.1$. Dosazením všech těchto hodnot dostáváme následující výraz:

$$B_z \leq -\frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 6 \cdot 10^7 \cdot 0.001 \cdot 2.15}{4\pi} v_x B_0 = -0.013 v_x B_0 \quad (2.93)$$

(aby nedošlo k nejasnostem - číslo 0.013 má rozměr $[m^{-1}s]$, takže opravdu porovnáváme na obou stranách velikost veličin s rozměrem magnetického pole) Je vidět, že pro běžné rychlosti magnetu je sekundární magnetické pole velice slabé. Významný vliv na primární magnetické pole budou mít proudy ve chvíli, kdy sekundární pole bude přibližně stejně velké jako primární. To nastane pro rychlosti $v \approx 80 \text{ ms}^{-1}$. Sekundární pole bude zdrojem pro další proudy, ovšem jestliže sekundární magnetické pole zprůměrujeme, jak jsme to právě udělali, potom pro běžné rychlosti, dejme tomu $v \approx 1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ dostáváme setinové pole, které bude zdrojem proudů, které budou vytvářet pole tisícinové k původnímu. Z této úvahy plyne, že řešení self-konzistentního systému rovnic velice rychle konverguje ke konečnému řešení. Závěr analýzy je ten, že pro velké rychlosti rozhodně nebude možné zanedbat pole od sekundárních proudů, jak jsme to dosud činili, jelikož sekundární magnetické pole bude srovnatelné s původním. Jednou z možností, jak se s problémem vypořádat, je vyřešit soustavu self-konzistentních rovnic aproximativními metodami. Druhou možností si ukážeme v následující kapitole, kde celý problém řešíme přímo pomocí Maxwellových rovnic.

Než však kapitolu ukončíme, všimněme si ještě pozorně obr. 2.19 a nezapomeňme, že před integrálem je ještě znaménko minus, které ho zrcadlově převrátí kolem roviny xy . Stále počítáme se stejnou situací, kdy se magnet pohybuje v záporném směru osy x a magnetická indukce je pouze v oblasti magnetu a směřuje v záporném směru osy z . Je zřejmé, že indukované proudy "poslouchají" Lenzův zákon, protože v místech, kde magnetická indukce od pohybujícího se magnetu klesá (magnetické pole je orientováno v záporném směru osy z), tam proudy vytvářejí magnetické pole, které se snaží tuto změnu kompenzovat. Dostáváme ovšem velice zajímavou situaci, protože v desce de facto vznikly magnety, které mají na protilehlých koncích kruhového magnetu opačnou polaritu a tedy budou působit na magnet silovým momentem. Tento jev však vymizí při velkých rychlostech, kdy se již dle našich úvah z kapitoly (2.3.1) věnující se případu, kdy vodivost nabývá nekonečných hodnot, v desce indukují takové proudy, které vlastně vytvoří zrcadlový obraz magnetu, který se pohybuje s polu s magnetem nad deskou bez jakéhokoli zpoždění. Tendence k otáčení magnetu tedy při velkých rychlostech vymizí.

Kapitola 3

Řešení pomocí Maxwellových rovnic

V kapitole věnující se analýze řešení dipólového modelu v případě $\sigma \rightarrow \infty$ jsme odvodili rovnice, z kterých jednoznačně vyplývá, že sekundární proudy, potažmo magnetické pole, které vytvářejí, nemůže být při větších rychlostech magnetu a velkých vodivostech desky rozhodně zanedbáváno. Dipólový model počítal pouze s primárními vířivými proudy, což při malých rychlostech není příliš velký problém, jelikož sekundární proudy mají malou váhu. Ovšem z hrubé analýzy brzdné síly pro asymptotické chování v malých a velkých rychlostech plyne, že existuje mez, kdy právě magnetické pole sekundárních proudů začíná hrát velmi důležitou roli. V této kapitole se pokusíme odvodit model, který se s tímto problémem pokusí vyrovnat a zahrne v sobě nejen primární vířivé proudy, ale i proudy sekundární a proudy vyšších řádů. K výstabě modelu se nám budou hodit myšlenky z kapitoly (2.3.1).

Z důvodu názornosti a matematické schůdnosti je konkrétní řešení prováděno pro dvou-rozměrnou desku. Napíšeme-li Ohmův zákon v následujícím tvaru

$$\frac{I}{d_1 d_2} = \sigma E$$

a chceme-li nějakým způsobem docílit toho, abychom při výpočtech mohli pracovat s dvou-rozměrnou deskou, ve které tečou pouze plošné proudy (dejme tomu, že d_2 je rozměr odpovídající tloušťce desky), potom můžeme psát:

$$\frac{I}{d_1} = (\sigma d_2) E$$

kde levá strana rovnice již vyjadřuje plošné proudy ve 2D desce a na pravé straně je pozměněná vodivost desky (lišící se násobkem d_2). Platí tedy:

$$\sigma_{2D} = \sigma_{3D} \cdot d_2$$

V této kapitole budeme všude σ chápat jako σ_{2D} . Vystává otázka, zda-li zůstane rozměr difúzního koeficientu nezměněn. Rozměry vodivosti se změni z $[\Omega^{-1} \text{m}^{-1}]$ na $[\Omega^{-1}]$. Ovšem

rozměry zůstanou stejné, jelikož po dosazení plošných proudů $\frac{I}{d_1} = (\sigma d_2) E$ do Ampérova zákona dostáváme:

$$\mathbf{rot} \vec{B} = \mu_0 (\sigma d_2) E$$

a je tedy vidět, že i μ_0 změní rozměr a rozměr difúzního koeficientu tak zůstane standardní a to $[\text{m}^2\text{s}^{-1}]$.

3.1. Rovnice difúze pro magnetické pole

Rovnice difúze pro magnetické pole je odvozována v tzv. kvazistacionárním přiblížení, kdy je možné zanedbat vliv Maxwellova proudu $\partial \vec{D} / \partial t$. Odvození mezí, pro které ještě můžeme daný problém řešit kvazistacionárně, můžeme provést například následovně (viz [2]). Vyjdeme z Maxwellovy rovnice:

$$\mathbf{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (3.1)$$

za proud dosadíme z Ohmova zákona $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ a pole \vec{D} zapíšeme následujícím způsobem:

$$\vec{D} = \vec{D}_0 e^{-i\omega t} \quad (3.2)$$

Po dosazení rovnic do (3.1) a použitím $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ dostáváme:

$$\mathbf{rot} \vec{H} = \sigma \vec{E} - i\omega \epsilon \vec{E} \quad (3.3)$$

Maxwellův proud oproti vodivostnímu bude možné zanedbat, pokud bude platit:

$$\omega \epsilon E \ll \sigma E \rightarrow \frac{\sigma}{\epsilon \omega} \gg 1, \quad (3.4)$$

což je u dobrých vodičů splněno ve velice širokém rozmezí frekvencí – až do infračervené oblasti spektra (např. pro měď a světlo o vlnové délce 400 nm je $\sigma / \epsilon \omega \approx 9000$). Další podmínka se týká Ohmova zákona v diferenciálním tvaru. Ohmův zákon totiž předpokládá, že vztah mezi hustotou proudu a elektrickým polem je lokálního charakteru, což jinými slovy znamená, že proud závisí pouze na hodnotě pole v daném bodě a nikoli na charakteru pole někde jinde. Fyzikálně to znamená, že střední volná dráha elektronů musí být malá ve srovnání se vzdálenostmi, na kterých se pole výrazně mění. V případech, které budeme dále uvažovat, je tato podmínka vždy splněna. Budeme tedy pracovat s následujícím systémem Maxwellových rovnic:

$$\mathbf{div} \vec{E} = 0 \quad (3.5)$$

$$\mathbf{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (3.6)$$

$$\mathbf{rot} \vec{H} = \sigma \vec{E} \quad (3.7)$$

$$\mathbf{div} \vec{B} = 0 \quad (3.8)$$

kde rovnice (3.5) plyne z rovnice (3.7) použitím vektorové identity $\mathbf{div\ rot} = 0$. Rovnici (3.7) ještě přepíšme do tvaru:

$$\mathbf{rot}\vec{B} = \sigma\mu\vec{E} \quad (3.9)$$

Aplikací rotace na obě strany této rovnice dostáváme:

$$-\nabla^2\vec{B} = \sigma\mu\mathbf{rot}\vec{E} \quad (3.10)$$

a použitím rovnice (3.6) dospíváme k rovnici difúze pro magnetické pole:

$$\nabla^2\vec{B} = \sigma\mu\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \quad (3.11)$$

Nyní předpokládejme, že deska je umístěna do magnetického pole, které směřuje v kladném směru osy z a je situováno pouze do vnitřní části kruhové oblasti, jeho velikost je B_0 a vně oblasti je pole nulové. Tato situace bude odpovídat idealizovanému magnetu nad deskou. Co by se stalo, kdybychom jsme náhle takovýto idealizovaný magnet nechali zmizet? Zmizelo by s ním náhle i magnetické pole v desce? Samozřejmě, že ne. Mizení pole se bude řídit rovnicí difúze, kterou jsme právě odvodili. Obecná metoda řešení tohoto problému je následující (viz [2] str. 201). Hledá se řešení rovnice difúze v následujícím tvaru:

$$\vec{B} = \vec{B}_m(x, y, z) \cdot e^{-\gamma_m t} \quad (3.12)$$

kde γ_m je konstanta. Rovnice difúze tak přejde do tvaru:

$$\nabla^2\vec{B}_m = -\sigma\mu\gamma_m\vec{B}_m \quad (3.13)$$

pro dané okrajové podmínky a konkrétní tvar vodiče má tato rovnice řešení pouze pro určité hodnoty γ_m , které jsou vlastními hodnotami rovnice. Funkce $\vec{B}_m(x, y, z)$ příslušné různým vlastním hodnotám musí být ortogonální. Počáteční pole v desce $\vec{B}_0(x, y, z)$ pak můžeme rozložit do následující řady:

$$\vec{B}_0(x, y, z) = \sum_m c_m \vec{B}_m(x, y, z) \quad (3.14)$$

a vývoj pole v čase pak je:

$$\vec{B}(x, y, z) = \sum_m c_m \vec{B}_m(x, y, z) e^{-\gamma_m t} \quad (3.15)$$

V našem idealizovaném případě, kdy je pole pouze ve vnitřní kruhové oblasti, bude situace samozřejmě poměrně jednoduchá. V následující sekci si ukážeme rozklad našeho idealizovaného pole do vlastních funkcí.

3.2. Řešení rovnice difúze pro magnetické pole

Rovnici difúze můžeme řešit separací proměnných (viz [9] str. 671). Výše uvedená substituce (3.12) separuje čas ihned, ale pro názornost si ukažme obvyklý postup při separaci. Pro jednoduchost zkusme rovnici vyřešit pro případ, kdy nás budou zajímat proudy pouze v rovině. V takovém případě bude důležitá pouze z -tová složka magnetického pole a obecná rovnice difúze se tak značně zjednoduší, jelikož ji budeme řešit pouze pro jednu složku. Dále pro další zjednodušení předpokládejme opět magnetické pole pouze uvnitř kruhové oblasti a nulové vně této oblasti. Rovnice difúze pouze pro z -tovou složku magnetického pole vypadá následovně:

$$\nabla^2 B = \sigma \mu \frac{\partial B}{\partial t} \quad (3.16)$$

kde μ je permeabilita materiálu desky. Označme si $\kappa = 1/\sigma \mu$ a řešme rovnici difúze v polárních souřadnicích metodou separace proměnných, tedy $B(\rho, \phi, t) = F(\rho, \phi)T(t)$. Zvolíme-li separační proměnnou jako $-k^2$ (je to nejvhodnější volba vzhledem k získanému výsledku), potom dostáváme následující rovnice:

$$\nabla^2 F + k^2 F = 0, \quad \frac{dT}{dt} + k^2 \kappa T = 0 \quad (3.17)$$

Druhou rovnici vyřešíme velice snadno. Výsledek je:

$$T(t) = Ae^{-k^2 \kappa t} \quad (3.18)$$

První rovnice je známá Helmholtzova rovnice. Přepišme si ji do polárních souřadnic:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial F}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \phi^2} + k^2 F = 0 \quad (3.19)$$

Znovu můžeme použít separaci proměnných, tentokrát $F(\rho, \phi) = P(\rho)\Phi(\phi)$ a separační konstantu vezmeme m^2 . Dostaneme se tak k následujícím dvěma rovnicím:

$$\frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} + m^2 \Phi = 0, \quad \frac{d^2 P}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dP}{d\rho} + \left(k^2 - \frac{m^2}{\rho^2} \right) P = 0 \quad (3.20)$$

Řešení první rovnice je opět velice snadné. Dostáváme:

$$\Phi(\phi) = A \cos(m\phi) + B \sin(m\phi) \quad (3.21)$$

Druhá rovnice vypadá na první pohled velice neznámě, ovšem jednoduchou substitucí $s = k\rho$ ji můžeme převést na tvar:

$$s^2 \frac{d^2 P}{ds^2} + s \frac{dP}{ds} + (s^2 - m^2) P = 0 \quad (3.22)$$

což je známá Besselova rovnice. Jejím řešením tedy dostáváme:

$$P(\rho) = C J_m(k\rho) + D Y_m(k\rho), \quad (3.23)$$

kde J_m a Y_m jsou po řadě Besselova funkce prvního druhu a Besselova funkce druhého druhu. Obecné řešení rovnice difúze tedy zní:

$$B(\rho, \phi, t) = [A \cos m\phi + B \sin m\phi] [C J_m(k\rho) + D Y_m(k\rho)] [E e^{-k^2 \kappa t}], \quad (3.24)$$

Pro náš konkrétní případ magnetického pole, které má konstantní hodnotu magnetické indukce B_0 v kruhové oblasti o poloměru R a nulovou hodnotu vně této oblasti, se obecné řešení redukuje na následující výraz (jelikož zmizí závislost pole na úhlu ϕ z důvodu radiální symetrie a toho dosáhneme pouze volbou $m = 0$ a navíc musí být řešení konečné v počátku soustavy souřadnic, takže musíme položit konstantu D rovnu nule, protože Besselovy funkce druhého druhu jsou v počátku nekonečné):

$$B(\rho, t) = \int_0^\infty C(k) J_0(k\rho) e^{-k^2 \kappa t} dk \quad (3.25)$$

Integrál vyjadřuje, že řešení je lineární kombinací přes všechny možné hodnoty k . Nyní nás zajímá, jakým způsobem se bude z -tová složka pole v rovinné desce vyvíjet v čase, pokud naráz vypneme zdroj pole. Na počátku má magnetické pole uvnitř kruhové oblasti konstantní velikost B_0 dejme tomu v kladném směru osy z . Vně oblasti je nulové. Můžeme tedy psát:

$$B(\rho, 0) = \int_0^\infty C(k) J_0(k\rho) dk \quad (3.26)$$

kde $B(\rho, 0) = B_0$ pro $\rho \leq R$ a $B(\rho, 0) = 0$ pro $\rho > R$. Abychom získali tvar konstanty $C(k)$, musíme obě strany rovnice vynásobit $\rho J_0(k_r \rho)$ a integrovat od nuly do nekonečna. Dostáváme tedy:

$$\int_0^\infty B(\rho, 0) \rho J_0(k_r \rho) d\rho = \int_0^\infty C(k) \left[\int_0^\infty J_0(k\rho) J_0(k_r \rho) \rho d\rho \right] dk \quad (3.27)$$

Tento postup jsme zvolili, protože Besselovy funkce jsou ortogonální a výraz konstanty $C(k)$ tak můžeme snadno získat (celý postup je jakousi obdobou Fourierovy transformace - v tomto případě se jedná o Hanckelovu transformaci). Pro Besselovy funkce platí následující relace, kterou uvádím bez důkazu:

$$\int_0^\infty J_\nu(k\rho) J_\nu(k_r \rho) \rho d\rho = \frac{\delta(k - k_r)}{k} \quad (3.28)$$

Použitím této relace dostáváme:

$$\int_0^\infty B(\rho, 0) \rho J_0(k_r \rho) d\rho = \frac{C(k_r)}{k_r} \quad (3.29)$$

Ještě můžeme trochu upravit levou stranu, protože vzhledem ke tvaru funkce $B(\rho, 0)$ stačí integrovat pouze od nuly do R . Dostáváme:

$$B_0 \int_0^R \rho J_0(k_r \rho) d\rho = \frac{C(k_r)}{k_r}. \quad (3.30)$$

Pro výpočet integrálu na levé straně můžeme použít následující rekurentní relace, kterou opět uvádím bez důkazu:

$$\frac{d}{dz} [z J_1(z)] = z J_0(z) \quad (3.31)$$

v našem případě tedy:

$$\frac{1}{k_r} \frac{d}{d\rho} [k_r \rho J_1(k_r \rho)] = k_r \rho J_0(k_r \rho) \quad (3.32)$$

a integrál tedy vychází:

$$\int_0^R J_0(k_r \rho) \rho d\rho = \left[\frac{1}{k_r} \rho J_1(k_r \rho) \right]_0^R = \frac{1}{k_r} R J_1(k_r R), \quad (3.33)$$

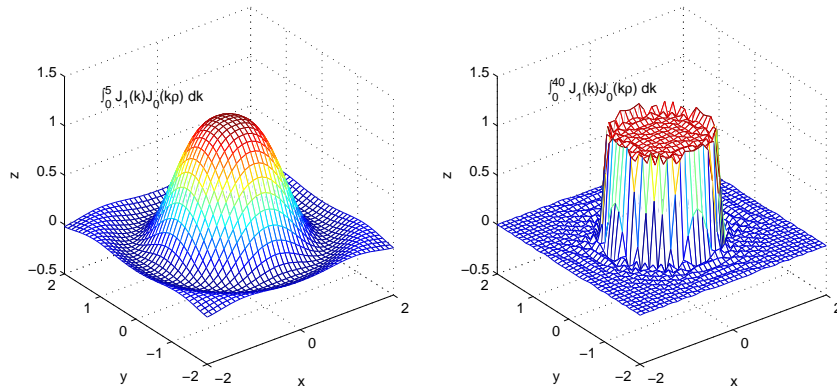
a konstanta $C(k_r)$ je tedy takováto:

$$C(k_r) = B_0 R J_1(k_r R) \quad (3.34)$$

z -tová složka magnetického pole se tedy v rovinné desce vyvíjí podle následujícího vztahu:

$$B(\rho, t) = B_0 R \int_0^\infty J_1(kR) J_0(k\rho) e^{-k^2 \kappa t} dk \quad (3.35)$$

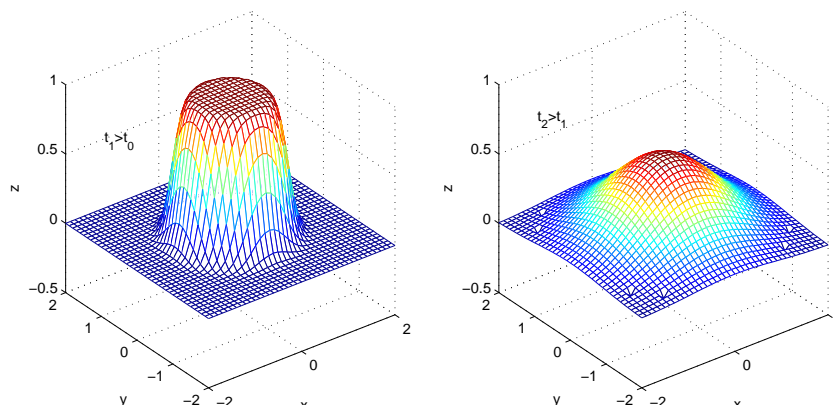
Na obr. 3.1 můžete vidět výsledek poskládání pole $B(\rho, 0)$ z vlnových čísel k z menšího a většího intervalu, pro případ $B_0 = 1$ a $R = 1$. Je vidět, že získaná rovnice dává skutečně pole, které jsme chtěli z vlastních funkcí poskládat. Na dalším obr.3.2 pak můžete vidět



Obrázek 3.1: Rozklad pole do řady Besselových funkcí

časový vývoj počátečního pole. Z -tová složka magnetické pole se roztéká do stran.

Nyní jsme se dostali do fáze, kdy budeme moci využít některých metod z kapitoly (2.3.1) věnované analýze případu $\sigma \rightarrow \infty$. Jsme v situaci, kdy máme rozklad pole, které je konstantní v kruhové oblasti a víme co se s polem bude v desce dít, když náhle vypneme zdroj

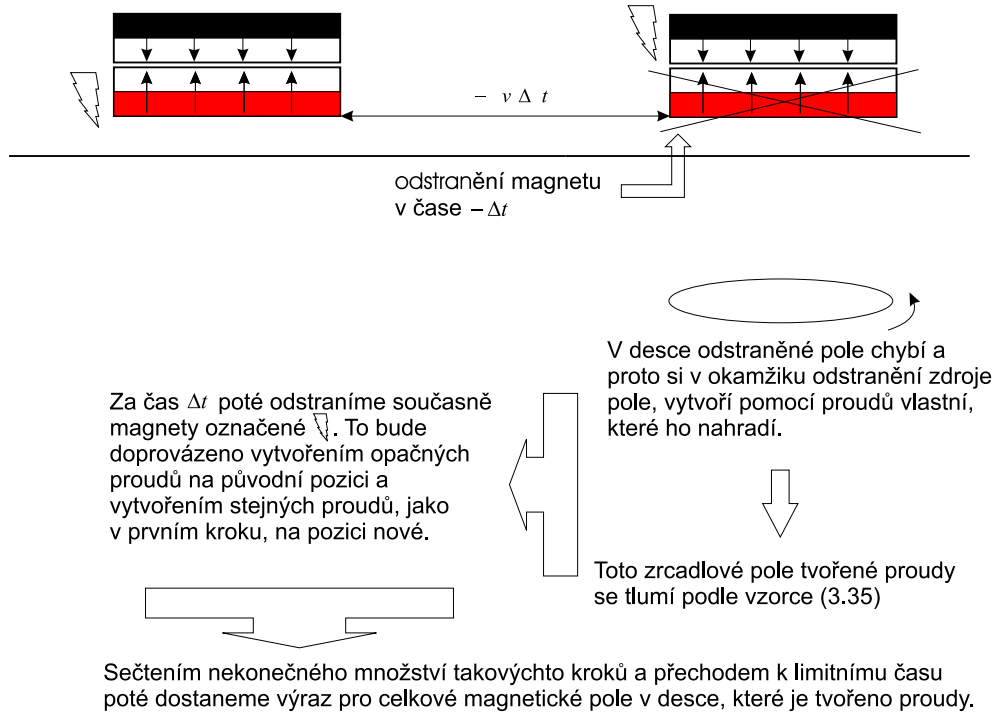


Obrázek 3.2: Časový vývoj původního pole

tohoto pole. V nadcházející sekci si ukážeme, jak se dá elegantně těchto několika poznatků využít k řešení vířivých proudů v desce se započítáním nejen primárních, sekundárních, ale dokonce všech proudů vyšších řádů. Tento výpočet musíme provést, chceme-li se dozvědět, proč a jakým způsobem se mění brzdná a normálová síla na magnet.

3.3. Krokový pohyb magnetu

V celé sekci zase budeme pracovat s idealizovaným magnetem, který má konstantní pole unvitř kruhové oblasti tentokrát v záporném směru osy z (označme ho pro jednoduchost $(M-)$), budeme také pracovat s magnetem $(M+)$, který bude mít pole orientované opačně), abychom mohli snadno srovnávat s již vyřešenými případy, a nulové vně. Co kdybychom si pohyb magnetu představovali následujícím způsobem; ve směru, kterým se magnet pohybuje, umístíme ve vzdálenosti Δx od sebe do stejného místa (to je možné provést alespoň myšlenkově, jelikož platí princip superpozice) dva magnety, ale opačně orientované. Situace se má tedy tak, že před magnetem de facto žádné magnety nejsou. Víme o nich jen my. Jsou to pouze imaginární magnety, které jsou zdrojem magnetických polí, která se vzájemně vyruší. Pozice, v níž se magnet aktuálně nachází, je pak pozicí, kde je magnet $M-$ zatímco magnet $M+$ není přítomen. Celá situace je na obr. 3.3. Jak by mohlo vypadat



Obrázek 3.3: Takto probíhá krokování pohybu magnetu

pole poskládané z takovéto časové posloupnosti magnetů? Zřejmě můžeme psát:

$$\begin{aligned}
 B_C = & \left(B_0 R \int_0^\infty J_1(kR) J_0(k\rho_0) e^{-k^2\kappa t_0} \right) + \\
 & + \left(B_0 R \int_0^\infty J_1(kR) J_0(k\rho_1) e^{-k^2\kappa t_0} \left[e^{-k^2\kappa\Delta t} - 1 \right] \right) + \\
 & + \left(B_0 R \int_0^\infty J_1(kR) J_0(k\rho_2) e^{-k^2\kappa t_0} \left[e^{-k^2\kappa 2\Delta t} - e^{-k^2\kappa\Delta t} \right] \right) + \dots \\
 & \dots + \left(B_0 R \int_0^\infty J_1(kR) J_0(k\rho_N) e^{-k^2\kappa t_0} \left[e^{-k^2\kappa N\Delta t} - e^{-k^2\kappa(N-1)\Delta t} \right] \right) + \\
 & + \left(-B_0 R \int_0^\infty J_1(kR) J_0(k\rho_{N+1}) e^{-k^2\kappa(t_0+N\Delta t)} \right)
 \end{aligned} \tag{3.36}$$

kde $\rho_N = \sqrt{(x - N v dt)^2 + y^2}$. Nás zajímá situace v čase $t_0 = 0$, takže výraz se zjednoduší. Poslední člen jsme přidali z toho důvodu, protože je velice daleko od místa, v kterém pole v desce vyšetřujeme a tudíž nebude mít vliv na výsledek, ovšem je důležitý pro symetrii výše uvedeného výrazu - s jeho pomocí můžeme výraz přepsat do kompaktnějšího tvaru:

$$B_C = B_0 R \sum_{N=0}^{\infty} \int_0^\infty J_1(kR) [J_0(k\rho_N) - J_0(k\rho_{N+1})] e^{-k^2\kappa N\Delta t} dk \tag{3.37}$$

Dále platí následující vztah (všechny integrály tohoto typu byly převzaty z [10] a některé matematické postupy můžete nalézt ve [12]):

$$\int_0^{2\pi} \cos[\delta \cos(\theta)] \cos[\gamma \sin(\theta)] d\theta = 2\pi J_0(\sqrt{\delta^2 + \gamma^2}) \quad (3.38)$$

Jeho použitím v (3.37) dostáváme:

$$B_C = \frac{B_0 R}{2\pi} \sum_{N=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} J_1(kR) e^{-k^2 \kappa N \Delta t} \cdot \cos(ky \sin \theta) \cdot [\cos(k(x - (Nv\Delta t) \cos \theta)) - \cos(k(x - ((N+1)v\Delta t) \cos \theta))] dk d\theta \quad (3.39)$$

Substitucí $\alpha = k \cos(\theta)$ a $\beta = k \sin(\theta)$ dostáváme:

$$B_C = \frac{B_0 R}{2\pi} \sum_{N=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{J_1(kR)}{k} e^{-k^2 \kappa N \Delta t} \cdot \cos(\beta y) \cdot [\cos(\alpha(x - Nv\Delta t)) - \cos(\alpha(x - (N+1)v\Delta t))] d\alpha d\beta \quad (3.40)$$

To můžeme opět přepsat do kompaktnějšího tvaru, pokud budeme brát jako výsledek reálnou část následujícího výrazu:

$$B_C = \frac{B_0 R}{2\pi} \sum_{N=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{J_1(kR)}{k} e^{-k^2 \kappa N \Delta t} \cdot \cos(\beta y) \cdot e^{i\alpha x} [e^{-i\alpha v N \Delta t} - e^{-i\alpha v (N+1) \Delta t}] d\alpha d\beta \quad (3.41)$$

Ted' musíme přejít k $\lim_{\Delta t \rightarrow 0}$ tohoto výrazu, abychom místo jednotlivých nespojitých kroků dostali spojitý pohyb. Musíme tedy spočítat:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{N=0}^{\infty} e^{-k^2 \kappa N \Delta t} \cdot [e^{-i\alpha v N \Delta t} - e^{-i\alpha v (N+1) \Delta t}] \quad (3.42)$$

Pro malá Δt můžeme psát:

$$e^{-k^2 \kappa N \Delta t} \cdot e^{-i\alpha v N \Delta t} [1 - (\cos(\alpha v \Delta t) - i \sin(\alpha v \Delta t))] \quad (3.43)$$

Když nyní rozvineme sin a cos a ponecháme pouze členy dt v první mocnině, dostaneme:

$$e^{-k^2 \kappa N \Delta t} \cdot e^{-i\alpha v N \Delta t} [1 - (1 - i\alpha v \Delta t)] \quad (3.44)$$

Nyní místo sumy přes N můžeme psát následující integrál:

$$i\alpha v \int_0^{\infty} e^{-k^2 \kappa t} \cdot e^{-i\alpha v t} dt \quad (3.45)$$

Rozepsáním $e^{-i\alpha v t}$ do sin a cos a použitím následujících identit:

$$\int_0^\infty e^{-ax} \cos(bx) = \frac{a}{a^2 + b^2} \quad (3.46)$$

$$\int_0^\infty e^{-ax} \sin(bx) = \frac{b}{a^2 + b^2}, \quad (3.47)$$

integrál (3.45) vychází:

$$i\alpha v \frac{k^2 \kappa - i\alpha v}{(\alpha v)^2 + (k^2 \kappa)^2} \quad (3.48)$$

Pro určení celkového pole B_C zbývá jediné - spočítat reálnou část následujícího integrálu:

$$B_C = \frac{B_0 R}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \frac{J_1(kR)}{k} e^{i\alpha x} i\alpha v \frac{k^2 \kappa - i\alpha v}{(\alpha v)^2 + (k^2 \kappa)^2} \cos(\beta y) d\alpha d\beta \quad (3.49)$$

V principu jsme teď schopni spočítat i proudy v desce podle vzorce $\mathbf{rot} B_C = \mu \vec{j}$. Máme pouze z -tovou složku magnetického pole, proto $\mathbf{rot} B_C = \left(\frac{\partial B_C}{\partial y}, -\frac{\partial B_C}{\partial x} \right)$. Odvození pole proudů a dalších vlastností nového modelu provedeme v následující kapitole.

3.4. Srovnání starého a nového modelu

3.4.1. Pole proudů pro malé rychlosti (vodivosti)

Podívejme se nejdříve na pole proudů v případě, kdy je vodivost poměrně malá (nebo ekvivalentně je-li rychlost magnetu malá). V takovém případě můžeme psát $\kappa \gg v$ a zároveň můžeme psát $k^2 \kappa \gg \alpha v$, protože příspěvky k výslednému integrálu (reálné části) v intervalu od nuly do nějakého malého k jsou zanedbatelné, jelikož platí:

$$\lim_{k \rightarrow 0} \left(\frac{J_1(kR)}{k} e^{i\alpha x} i\alpha v \frac{k^2 \kappa - i\alpha v}{(\alpha v)^2 + (k^2 \kappa)^2} \cos(\beta y) \right) = 0 \quad (3.50)$$

Výraz (3.48) v aproximaci $k^2 \kappa \gg \alpha v$ přechází na:

$$\frac{i\alpha v}{k^2 \kappa} \quad (3.51)$$

a reálná část integrálu (3.49) vychází:

$$B_C = -\frac{B_0 R}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \frac{J_1(kR)}{k} \sin(\alpha x) \frac{\alpha v}{k^2 \kappa} \cos(\beta y) d\alpha d\beta \quad (3.52)$$

Pro proudy v desce potom dostáváme:

$$j_x = \frac{B_0 R v}{2\pi \mu \kappa} \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \frac{J_1(kR) \alpha \beta}{k^3} \sin(\alpha x) \sin(\beta y) d\alpha d\beta \quad (3.53)$$

$$j_y = \frac{B_0 R v}{2\pi \mu \kappa} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{J_1(kR) \alpha^2}{k^3} \cos(\alpha x) \cos(\beta y) d\alpha d\beta \quad (3.54)$$

přechodem zpátky do polárních souřadnic a dosazením za κ dostáváme:

$$j_x = \frac{B_0 R v \sigma}{2\pi} \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} J_1(kR) \cdot \cos(\phi) \sin(\phi) \sin(k \cos(\phi)x) \sin(k \sin(\phi)y) dk d\phi \quad (3.55)$$

$$j_y = \frac{B_0 R v \sigma}{2\pi} \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} J_1(kR) \cdot \cos^2(\phi) \cos(k \cos(\phi)x) \cos(k \sin(\phi)y) dk d\phi \quad (3.56)$$

Nyní použijeme následujících vztahů:

$$\int_0^{2\pi} \cos(\phi) \sin(\phi) \sin(k \cos(\phi)x) \sin(k \sin(\phi)y) d\phi = \frac{2\pi xy}{\rho^2} J_2(k\rho) \quad (3.57)$$

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \cos^2(\phi) \cos(k \cos(\phi)x) \cos(k \sin(\phi)y) d\phi &= \\ &= \pi J_0(k\rho) + \frac{\pi(y^2 - x^2)}{\rho^2} J_2(k\rho) \end{aligned} \quad (3.58)$$

a proudy tedy vychází:

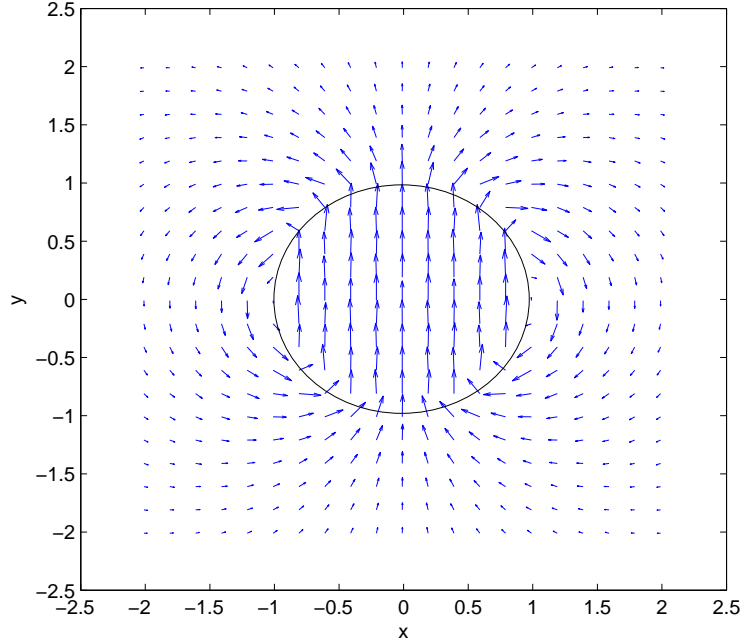
$$j_x = B_0 R v \sigma \frac{xy}{\rho^2} \int_0^{\infty} J_1(kR) J_2(k\rho) dk \quad (3.59)$$

$$j_y = \frac{B_0 R v \sigma}{2} \int_0^{\infty} J_1(kR) \left(J_0(k\rho) + \frac{y^2 - x^2}{\rho^2} J_2(k\rho) \right) dk \quad (3.60)$$

Na první pohled je vidět, že ve výsledku je opět něco z dipólového charakteru pole. Pole proudů je zobrazeno na obr. 3.4 (při numerickém výpočtu integrálu jsem integroval pouze v intervalu od nuly do dvaceti - příspěvek k integrálu je totiž největší kolem jedničky a pro velké hodnoty jsou příspěvky zanedbatelné, takže takto provedená integrace dává velice přesné výsledky). Je velice podobné poli, které jsme spočítali v jednoduchém modelu, což je logické, jelikož při malých rychlostech nebo ekvivalentně malých vodivostech je magnetické pole od indukovaných proudů velice rychle utlumené a proto nemá významný podíl na sekundárních proudech a proudech vyšších řádů, které jinak situaci ovlivňují a to dost výrazně při velkých vodivostech nebo ekvivalentně velkých rychlostech, jak se za chvíli přesvědčíme. Také je zajímavé zkontrolovat, jestli výsledek sedí rozměrově, protože na první pohled by se mohlo zdát, že tomu tak není. Ovšem rozměr integrálů přes k je $[m^{-1}]$, jelikož k je vlastně koeficient Fourierovy-Hanckelovy transformace, takže vše je v pořádku.

Vztahy (3.59) a (3.60) se dají ještě zjednodušit použitím následující relace:

$$\int_0^{\infty} J_\nu(\alpha x) J_{\nu-1}(\beta x) dx = \begin{cases} \frac{\beta^{\nu-1}}{\alpha^\nu} & \beta < \alpha \\ \frac{1}{2\beta} & \beta = \alpha \\ 0 & \beta > \alpha \end{cases} \quad (3.61)$$



Obrázek 3.4: Pole proudů kolem magnetu, který se pohybuje v záporném směru osy x

Vztah (3.59) se tak rozpadne na následující tři vztahy podle toho, je-li $\rho > R$, $\rho < R$ nebo $\rho = R$:

$$j_x = \begin{cases} B_0 R v \sigma \frac{xy}{\rho^2} \frac{R}{\rho^2} & \rho > R \\ 0 & \rho < R \\ \frac{1}{2} B_0 v \sigma \frac{xy}{\rho^2} & \rho = R \end{cases} \quad (3.62)$$

pro pole j_y pak obdobným způsobem obdržíme:

$$j_y = \begin{cases} \frac{B_0 R v \sigma}{2} \frac{y^2 - x^2}{\rho^2} \frac{R}{\rho^2} & \rho > R \\ \frac{1}{2} B_0 v \sigma & \rho < R \\ \frac{1}{2} B_0 R v \sigma \left(\frac{1}{2\rho} + \frac{y^2 - x^2}{\rho^2} \frac{1}{2R} \right) & \rho = R \end{cases} \quad (3.63)$$

Řešení pro oblast $\rho > R$ můžeme tedy za použití $x = \rho \cos \phi$ a $y = \rho \sin \phi$ psát následovně:

$$\vec{j}_{\Omega_2} = \left(\frac{1}{2} B_0 v \sigma \frac{R^2}{\rho^2} \sin 2\phi, -\frac{1}{2} B_0 v \sigma \frac{R^2}{\rho^2} \cos 2\phi \right) \quad (3.64)$$

a převedením vektorového pole do polárních souřadnic použitím $\hat{r} = \cos \phi \hat{x} + \sin \phi \hat{y}$ a $\hat{\phi} = -\sin \phi \hat{x} + \cos \phi \hat{y}$ dostáváme:

$$\vec{j}_{\Omega_2} = \left(\frac{1}{2} B_0 v \sigma \frac{R^2}{\rho^2} \sin \phi, -\frac{1}{2} B_0 v \sigma \frac{R^2}{\rho^2} \cos \phi \right), \quad (3.65)$$

což je naprosto stejný výsledek jako rovnice (2.28). Pro $\rho < R$ potom snadno dostáváme (v kartézských souřadnicích):

$$\vec{j}_{\Omega_1} = \left(0, \frac{1}{2} \sigma v B_0 \right), \quad (3.66)$$

což je ve shodě s rovnicí (2.27). Nový model je tedy v limitě malých rychlostí (vodivostí) v perfektní shodě se starým modelem. Veškeré úvahy provedené dříve, týkající se brzdě síly na magnet, jsou platné i v tomto případě. Co nám říká rovnice (3.49) o poli vířivých proudů v případě, kdy je rychlost magnetu nebo vodivost desky velmi velká? Již první pohled dává tušit, že integrál (3.49) není pro velké rychlosti závislý na rychlosti, což by bylo ve shodě s úvahami v kapitole (2.3.1). Provedme nyní hlubší rozbor této situace.

3.4.2. Pole proudů pro velké rychlosti (vodivosti)

Pro $\sigma \rightarrow \infty$ je následující výraz přibližně roven

$$i\alpha v \frac{k^2 \kappa - i\alpha v}{(\alpha v)^2 + (k^2 \kappa)^2} \approx 1 \quad (3.67)$$

Rovnice (3.49) tedy přechází do následujícího tvaru:

$$B_C = \frac{B_0 R}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{J_1(kR)}{k} \cos(\alpha x) \cos(\beta y) d\alpha d\beta \quad (3.68)$$

a použitím

$$\int_0^{2\pi} \cos[\delta \cos(\theta)] \cos[\gamma \sin(\theta)] d\theta = 2\pi J_0(\sqrt{\delta^2 + \gamma^2}) \quad (3.69)$$

spojeným s přechodem od kartézských do polárních souřadnic se dostáváme k výrazu:

$$B_C = B_0 R \int_0^{\infty} J_1(kR) J_0(k\rho) dk \quad (3.70)$$

Nad deskou je magnet, jehož z -tová složka je orientovaná opačně a jeho pole vypadá takto:

$$B_M = -B_0 R \int_0^{\infty} J_1(kR) J_0(k\rho) dk \quad (3.71)$$

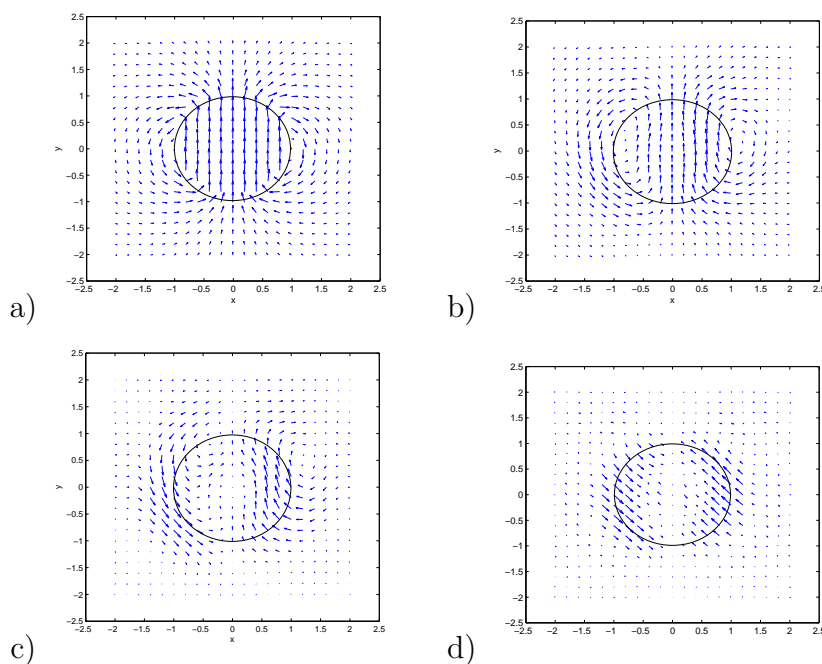
Toto je výsledek, který jsme očekávali v kapitole (2.3.1), kdy jsme pouhými úvahami dospěli k závěru, že pohyb magnetu nad ideálním vodičem je ve své podstatě ekvivalentní pohybu dvojice opačně orientovaných magnetů ve volném prostoru. Žádná brzdě síla tedy nebude přítomna, budeme pozorovat pouze sílu normálovou (v našem konkrétním případě bude ovšem normálová síla nulová, jelikož k normálové síle by byla zapotřebí také x -ová nebo y -ová složka magnetického pole). Jak v tomto případě vypadá pole proudů? Musí vypadat takovým způsobem, aby vytvářelo zrcadlový obraz magnetu nad deskou. Pole v desce je vlastně skoková funkce definovaná následovně:

$$B(\rho) = \begin{cases} B_0 & \rho < R \\ 0 & \rho > R \end{cases} \quad (3.72)$$

Pokud výraz zrotujeme v cylindrických souřadnicích, potom dostáváme pouze proudy ve směru $\hat{\phi}$ a výraz pro proudy vypadá následovně:

$$j_{\phi} = \delta(\rho - R) \cdot \frac{B_0}{\mu} \quad (3.73)$$

Tady se může na první pohled zdát, že je něco v nepořádku, jelikož jsme dostali nekonečné proudy. Ovšem ačkoli je plošná hustota proudů nekonečná, je samotný proud konečný, jelikož proudy tečou jen v oblasti nekonečně malé šířky. Obdržený výsledek je tedy rozumný. Na obr. 3.5 je zobrazena sekvence snímků, která ukazuje, jak se bude pole proudů vyvíjet pokud budeme zvyšovat vodivost (obrázky jsou pouze orientační, protože integrál je poměrně časově náročné numericky řešit a proto byl obor integrace zkrácen na minimum. Odchylka od skutečného tvaru pole však není velká. Rysy chování pole proudů jsou jasně patrné a postupně tvar pole konverguje ke konfiguraci, která je popsána rovnicí (3.73).)



Obrázek 3.5: Vývoj vířivých proudů pro vrůstající rychlost (a) nejmenší ... (d) největší (pole jsou pouze orientační z důvodu výrazně zkráceného oboru integrace)

3.5. Vzorec pro brzdou sílu

Jelikož v modelovém příkladě není možnost vypočítat normálovou sílu působící na magnet, pokusme se alespoň o nalezení vyjádření pro brzdou sílu. Bude nás zajímat

následující integrál:

$$F_x = \int_S j_y B_M dS, \quad (3.74)$$

kde B_M je magnetické pole magnetu. Integrujeme nestandardně přes plochu, jelikož celou dobu řešíme 2D případ. Třetí rozměr je ovšem nepřímě zahrnut ve vztahu pro vodivost. Platí:

$$j_y = \frac{B_0 R}{2\pi\mu} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha J_1(kR)}{k} \cdot \frac{\sin(\alpha x)(\alpha v)^2 + \cos(\alpha x)\alpha v k^2 \kappa}{(\alpha v)^2 + (k^2 \kappa)^2} \cos(\beta y) d\alpha d\beta \quad (3.75)$$

Pro sílu potom můžeme psát (pole magnetu je nenulové pouze v kruhové oblasti):

$$F_x = \frac{B_0^2 R}{2\pi\mu} \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha J_1(kR)}{k} \cdot \frac{\sin(\alpha \rho \cos(\phi))(\alpha v)^2 + \cos(\alpha \rho \cos(\phi))\alpha v k^2 \kappa}{(\alpha v)^2 + (k^2 \kappa)^2} \cos(\beta \rho \sin(\phi)) \rho d\alpha d\beta d\rho d\phi \quad (3.76)$$

Nyní můžeme prointegrovat přes úhel ϕ . Použitím následujících vztahů

$$\int_0^{2\pi} \sin(\alpha \rho \cos(\phi)) \cos(\beta \rho \sin(\phi)) d\phi = 0 \quad (3.77)$$

$$\int_0^{2\pi} \cos(\alpha \rho \cos(\phi)) \cos(\beta \rho \sin(\phi)) d\phi = 2\pi J_0(k\rho) \quad (3.78)$$

dostáváme:

$$F_x = \frac{B_0^2 R}{\mu} \int_0^R \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha J_1(kR) J_0(k\rho)}{k} \frac{\alpha v k^2 \kappa}{(\alpha v)^2 + (k^2 \kappa)^2} \rho d\alpha d\beta d\rho \quad (3.79)$$

Nyní substituujeme $\alpha = k \cos \theta$ a $\beta = k \sin \theta$ a znovu prointegroujeme přes úhel. Musíme zintegrovat následující (dvě Besselovy funkce pro stručnost nezapisuji):

$$\int_0^{2\pi} \frac{k^4 v \kappa \cos^2(\theta)}{k^2 \cos^2(\theta) v^2 + k^4 \kappa^2} d\theta = \frac{2\pi k^2 \kappa (\sqrt{v^2 + k^2 \kappa^2} - k\kappa)}{v \sqrt{v^2 + k^2 \kappa^2}} \quad (3.80)$$

Celkově tedy dostáváme:

$$F_x = \frac{2\pi B_0^2 R}{\mu} \int_0^R \int_0^{\infty} J_1(kR) J_0(k\rho) \rho \frac{k^2 \kappa (\sqrt{v^2 + k^2 \kappa^2} - k\kappa)}{v \sqrt{v^2 + k^2 \kappa^2}} d\rho dk \quad (3.81)$$

Zkontrolujme pro jistotu výsledek alespoň rozměrově. Dvojný integrál je bezrozměrný a koeficient před ním můžeme pomocí vzorce (2.87) (jedná se také o bezrozměrný výraz) přepsat takto:

$$\frac{2\pi B_0^2 R}{\mu} \rightarrow 2\pi \sigma v_x B_0^2 R^2, \quad (3.82)$$

což má stejné rozměry jako vzorec (2.11) (sice se může zdát, že chybí tloušťka desky, ovšem ta je opět skryta v naší definici 2D-vodivosti desky, σ jsme definovali jako $\sigma_{3D}d$), kde o rozměru výrazu není žádných pochybností. Zkusme se nyní podívat na případ, kdy je rychlost magnetu (vodivost desky) malá. Pak můžeme psát:

$$\frac{k^2\kappa(\sqrt{v^2+k^2\kappa^2}-k\kappa)}{v\sqrt{v^2+k^2\kappa^2}} \approx \frac{v}{2\kappa} \quad (3.83)$$

a výraz pro sílu nabývá tvaru:

$$F_x = \pi B_0^2 R \sigma v \int_0^R \int_0^\infty J_1(kR) J_0(k\rho) \rho d\rho dk, \quad (3.84)$$

kde

$$\int_0^R \int_0^\infty J_1(kR) J_0(k\rho) \rho d\rho dk = \frac{R}{2} \quad (3.85)$$

takže výraz pro sílu nabývá konečného tvaru:

$$F_x = \frac{1}{2} \pi B_0^2 R^2 \sigma v, \quad (3.86)$$

kde σ je 2D vodivost, tudíž dostáváme stejný výsledek jako ve (2.29). Pro velké rychlosti (nebo spíše velké vodivosti) můžeme psát:

$$\frac{k^2\kappa(\sqrt{v^2+k^2\kappa^2}-k\kappa)}{v\sqrt{v^2+k^2\kappa^2}} \approx \frac{k^2\kappa}{v} \quad (3.87)$$

a výraz pro sílu přechází:

$$F_x = \frac{2\pi B_0^2 R}{\mu\sigma v} \int_0^R \int_0^\infty J_1(kR) J_0(k\rho) \rho k^2 d\rho dk \quad (3.88)$$

a je tedy vidět, že síla pro velké rychlosti nebo ekvivalentně velké vodivosti klesá přibližně jako $\frac{1}{v}$ nebo $\frac{1}{\sigma}$, což je v souladu s našimi dřívějšími poznatky.

Samořejmě bychom nyní mohli nalézt i výraz pro normálovou sílu, ovšem použitý model nám to nedovoluje, jelikož nemáme složky magnetického pole, které jsou za normálovou sílu zodpovědné.

V této kapitole jsme na modelovém příkladě odvodili obecný postup, který umožňuje nalezení brzdě i normálové síly a zahrnuje v sobě, na rozdíl od dipólového modelu i proudy sekundární a vyšších řádů a dává nám tak možnost nahlédnout do chování modelu při rychlostech a vodivostech ve velice širokém spektru hodnot.

Kapitola 4

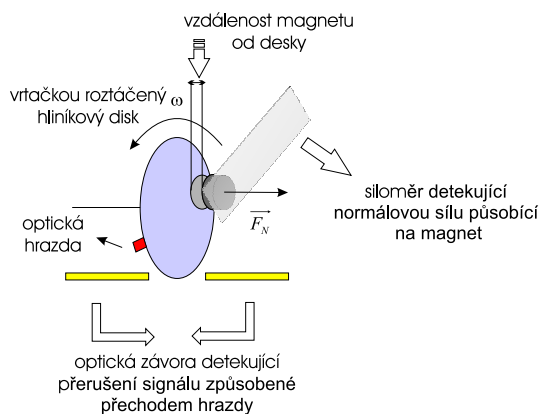
Experimentální část

Cílem experimentální části bylo ověřit některé obecně platné zákonitosti, které vyplynuly z teoretického modelu. Většina uvažovaných a řešených případů byla bohužel velice zjednodušená a sloužila pouze jako nástroj k demonstrování funkčnosti modelu. Pokud bychom chtěli řešit maxwellovsky pole proudů od reálného magnetu (a to i magnetu s idealizovaným dipólovým charakterem pole), potom by se stal použitý matematický aparát mnohem složitější už jen přechodem do tří rozměrů, nemluvě o komplikovanosti výpočtu samotného pole proudů skládáním nekonečného počtu kroků magnetu. Samozřejmě komplexnější výpočet by dával více možností k experimentálnímu ověření teoretického modelu. My jsme ovšem v situaci, kdy máme provedeny výpočty, ve kterých například vůbec nezáleží na vzdálenosti magnetu od desky, na tloušťce desky, model magnetického pole magnetu je také velmi nerealistický. Závěr toho všeho je, že nemá valný význam bez dalších a komplexnějších výpočtů provádět detailní měření, jelikož v podstatě není mnoho předpovědí teorie, které by se dali experimentálně ověřit.

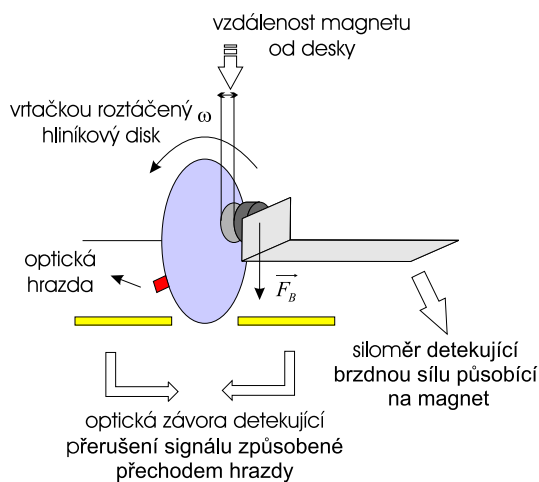
V experimentální části jsem se zaměřil hlavně na analýzu změny brzděné a normálové síly na magnet při změně rychlosti pohybu magnetu nad deskou. Jedná se totiž o nejzajímavější proměnnou v teorii. Samozřejmě bychom mohli měřit i změnu sil v závislosti na změně velikosti magnetického pole, ovšem to rozhodně není příliš zajímavé, jelikož nedochází k takovým, na první pohled možná "nečekaným", jevům jako při změně rychlosti nebo ekvivalentně změně vodivosti. Měření pro různé vodivosti by se v zásadě dalo také provést, ovšem z důvodu nedostatku desek různých vodivostí, nebyla závislost na vodivosti experimentálně ověřena. Měření závislosti brzděné a normálové síly na vzdálenosti magnetu od desky a na tloušťce desky také nemá smysl provádět, jelikož chybí potřebné teoretické výpočty. Vliv konečné velikosti desky na brzděnou a normálovou sílu také nebyl experimentálně zkoumán, jednak kvůli komplikovaným výpočtům v případě pohybu magnetu po obvodu vodivého kotouče (teoretický výpočet byl proveden pouze pro případ, kdy se magnet pohybuje ve středu zkoumané desky), jednak kvůli nedostatku vodivých desek různých velikostí.

4.1. Aparatura použitá při měření

Na obr. 4.1 a obr. 4.2 můžete vidět uspořádání experimentu pro měření normálové a brzdné síly.



Obrázek 4.1: Rozvržení aparatury při měření normálové síly



Obrázek 4.2: Rozvržení aparatury při měření brzdné síly

Aparatura se skládala z následujících částí:

- vodivý kotouč (hliníkový) ($d = 1 \text{ mm}$)
- optické závory pro určení úhlové rychlosti disku
- vrtačka roztáčeující kotouč
- digitální siloměr (rozsah 4,9 N nebo 1 N)

- neodymový magnet (N42 – 1.32 T) ($R = 0.75$ cm) ($m = 10.46$ g)
- regulátor umožňující flexibilně měnit otáčky vrtačky
- počítačový systém ISES snímající signály od optických závor a siloměru

Byl použit neodymový magnet, protože běžné magnety poskytují velice slabé magnetické pole a měřené efekty by tedy v jejich případě nebyly nikterak výrazné.

4.2. Postup při měření a způsob analýzy dat

4.2.1. Postup

Podle typu síly, který jsme chtěli měřit, jsme aparatu sestavili dle obr. 4.1 nebo obr. 4.2. Pro určité otáčky vrtačky jsme provedli třísekundové měření síly (postup při zpracování takto získaných dat je uveden níže). Mezi každým měřením jsme z důvodu možného zahřívání desky prováděli dvouminutové pauzy, kdy byl magnet dostatečně vzdálen od desky a deska rotovala a tím se rychleji ochlazovala o vzduch (kdybychom tyto pauzy neprováděli, museli bychom vzít v úvahu změnu vodivosti desky s teplotou a ačkoli byla změna teploty desky minimální, přesto by mohla mít určitý zkreslující vliv na měření). Provedli jsme sérii měření pro různé rychlosti pro dva zkoumané typy sil.

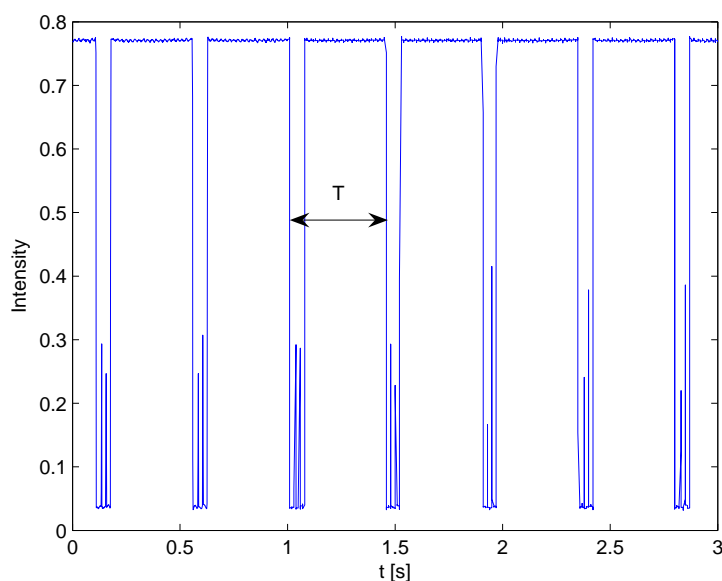
4.2.2. Určení úhlové frekvence rotujícího disku

Abychom byli schopni nějakým sofistikovaným způsobem zanalyzovat signál od optických detektorů, který je periodicky přerušovaný optickou blokadou, budeme muset na místo odečítání periody z grafu použít diskretní Fourierovy transformace. Tato metoda poskytuje velice účinný algoritmus, který nám dovoluje dokonce i ze signálu, ve kterém na první pohled nejsou patrné žádné známky periodicity, vyčíst frekvence (periody), které jsou zastoupeny s největší vahou. Vezměme si například následující signál od optického systému z jednoho měření (obr.4.3). Drobné výchylky v minimu intenzity jsou způsobeny použitou optickou blokadou, která byla složena z více částí, které k sobě úplně nedoléhaly a proto mohl optický systém chvilkově zaznamenat větší intenzitu. K analýze takovýchto dat je výhodné použít algoritmus rychlé Fourierovy transformace, který je implementován v systému MatLab. Vychází se z komplexního zápisu rozkladu nějaké funkce do Fourierovy řady:

$$f(t) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} c_r(\omega) e^{i\omega r t} \quad (4.1)$$

Implementovaný algoritmus vezme na vstupu vektor N naměřených dat \vec{x} a jako výstup dostaneme komplexní fourierovy koeficienty pro jednotlivé frekvence také ve formě nějakého vektoru \vec{X} , podle následujícího vztahu:

$$X(k) = \sum_{j=1}^N x(j) \omega_N^{(j-1)(k-1)}, \quad \omega_N = e^{-\frac{2\pi i}{N}} \quad (4.2)$$

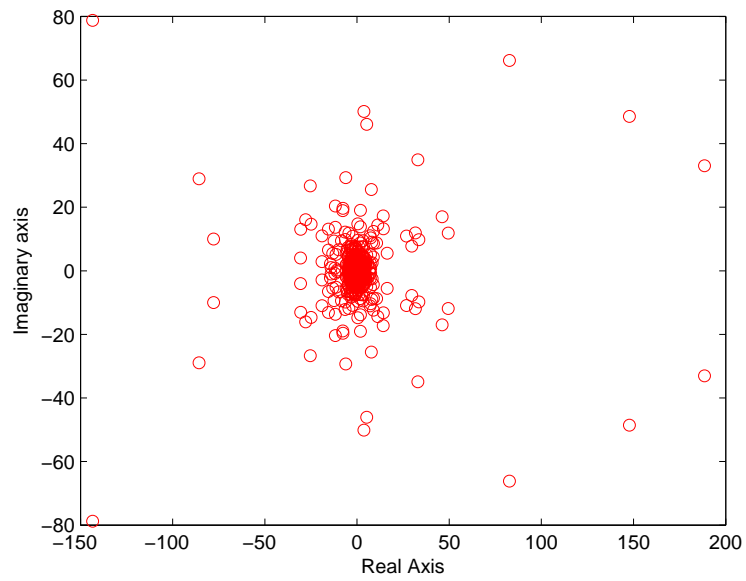


Obrázek 4.3: Periodická data naměřená optickým systémem

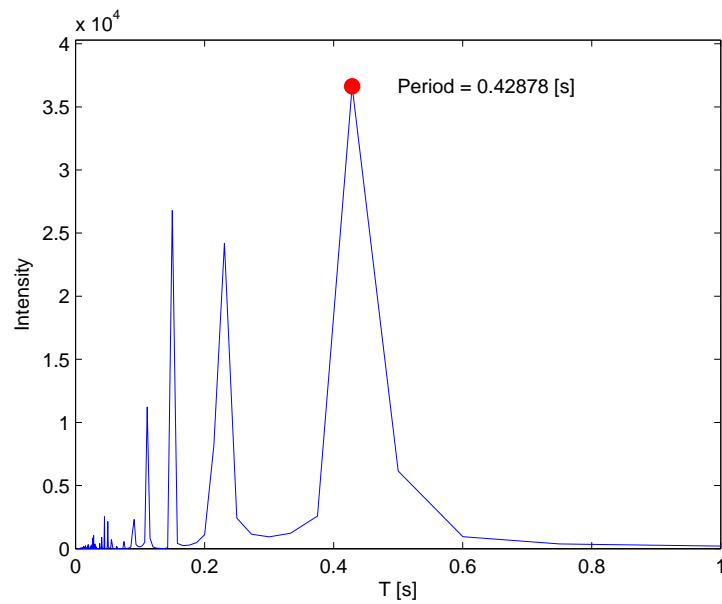
V komplexní rovině pak dostáváme následující graf (obr.4.4), z kterého je ovšem obtížné vyčíst nějaké relevantní informace. Jednotlivé fourierovy koeficienty determinují v komplexní rovině vektory. Pokud tedy přiřkneme koeficientům pro určitou frekvenci velikost jejich vektoru v komplexní rovině, dostaneme graf, který již bude daleko průhlednější, protože de facto bude ukazovat váhu, s jakou jednotlivé fourierovy koeficienty přispívají k celkové funkci, které byla rozložena do Fourierovy řady. Samozřejmě můžeme výsledek zobrazit rovnou pro nejčastější zastoupení periody namísto frekvence. Pro naše výchozí data poté dostáváme následující graf.(obr. 4.5). V grafu se objevují i menší maxima pro jiné periody, ale je vidět, že se jedná o nějaké násobky periody maximální, což je poměrně logické, když si představíme, jakým způsobem se funkce Fourierovou řadou sestavuje. Výše zmíněným postupem byla tedy určena úhlová frekvence vodivého disku v případě různých měření.

4.2.3. Zpracování měření brzdné a normálové síly

Nepříjemnou skutečností při měření brzdné a normálové síly byly oscilace síly, které se objevovali v důsledku nepřesného umístění osy disku. Bohužel i výchylka pouhé poloviny milimetru způsobuje významnou změnu v naměřené síle, jelikož síla závisí na kvadrátu magnetické indukce a u reálných magnetů, které mají přibližně dipólový charakter, je tedy vzdálenost od vodivé desky velmi významným parametrem. Samozřejmě je možné brát jakousi střední vzdálenost od desky, která se vypočte jako průměr z bodů největšího přiblížení a vzdálení od desky a zároveň můžeme také zprůměrovat naměřená data, která

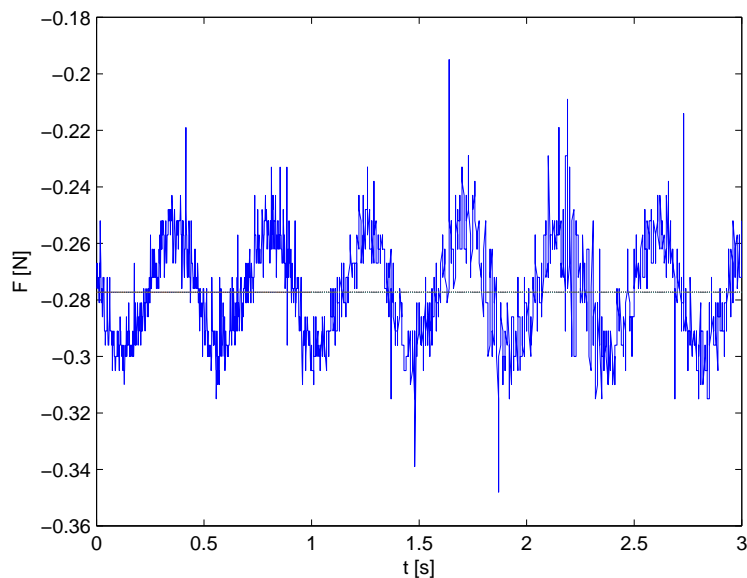


Obrázek 4.4: Fourierovy koeficienty v komplexní rovině



Obrázek 4.5: Perioda získaná FFT (Fast Fourier Transform)

v reálu vypadala tak, jak ukazuje obr.4.6. V principu se dá z grafu síly získat i perioda



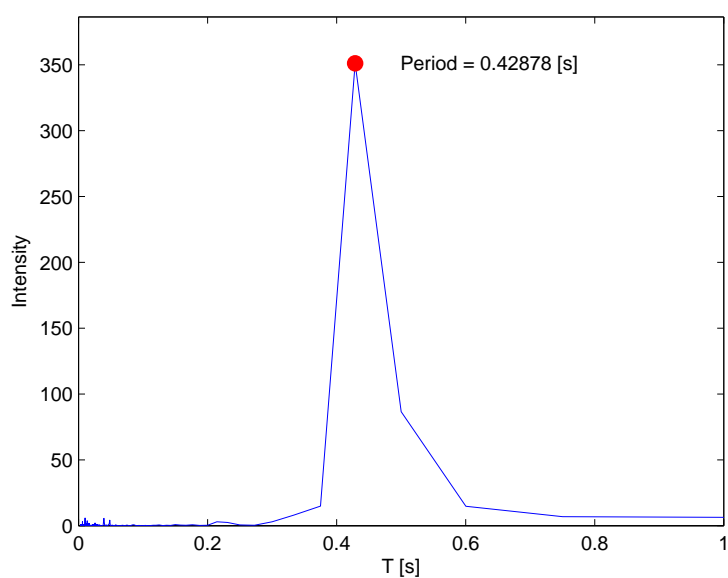
Obrázek 4.6: Závislost síly na čase pro určitou úhlovou rychlost disku

otáčení disku, jak se můžete přesvědčit na obr. 4.7 (byla použita data ze stejného měření, na kterých byla demonstrována FFT v předchozí kapitole), ovšem tato metoda může selhávat v případě větších rotací a proto je nutné mít nezávislý systém měření periody. Samozřejmě bylo také nutné kalibrovat použité digitální siloměry, jelikož jsme záměrně prodloužili jejich ramena, abychom docílili většího momentu síly a tedy většího prohnutí ramen, které je následně snímáno optickým systémem v siloměru. Kalibraci jsme provedli jednoduše tak, že jsme naměřili referenční data z několika závažími na magnetu a tím jsme mohli ocejchovat stupnici pro sílu.

4.3. Výsledky měření

4.3.1. Výsledky měření pro brzdou sílu

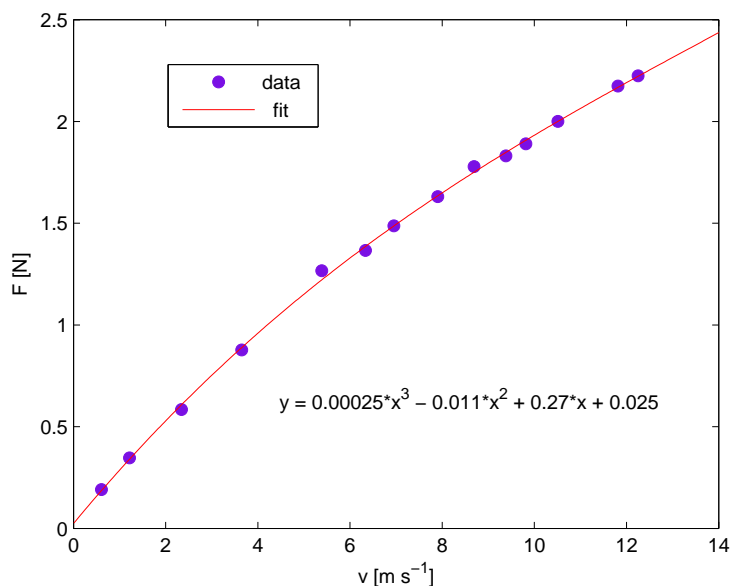
V tabulce 4.1 jsou data relevantní pro měření brzdě síly působící na magnet pohybující se nad hliníkovou deskou. Výsledky měření jsou pak vyneseny na obr. 4.8. Grafem jsem proložil polynom třetího stupně. Graf má očekávaný průběh, ale bohužel jsme nebyli experimentálně schopni dosáhnout takových rychlostí, abychom dosáhli stacionárního bodu, natož pak míst, kde brzdě síla začíná opět klesat. Pro malé rychlosti se dá závislost skutečně považovat za lineární. Někdo by mohl namítnout, že odklon od linearity je způsoben zahříváním rotující desky a s tím spojeným poklesem vodivosti, což by se podle obou našich modelů mělo projevit poklesem brzdě síly. Při měření byly ovšem



Obrázek 4.7: FFT pro závislost síly na čase

$l = 1.5 \text{ mm}$ $R_S = 4.15 \text{ cm}$	
\mathbf{F} [N]	\mathbf{v} [ms^{-1}]
0.19	0.61
0.35	1.22
0.58	2.34
0.88	3.65
1.27	5.39
1.37	6.34
1.49	6.95
1.63	7.91
1.78	8.69
1.83	9.38
1.89	9.82
2.00	10.51
2.17	11.82
2.22	12.25

Tabulka 4.1: Naměřená data v konfiguraci pro brzdnou sílu (l značí vzdálenost magnetu od otáčející se desky a R_S je vzdálenost středu magnetu od osy otáčení desky)



Obrázek 4.8: Závislost brzdění síly na rychlosti magnetu nad deskou

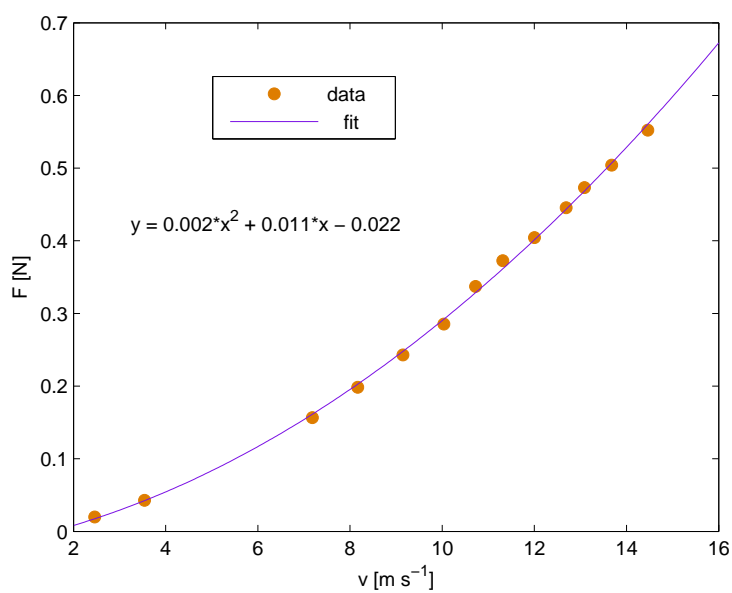
prováděny poměrně dlouhé pauzy (dvě minuty s rotujícím kotoučem bez magnetu) a navíc byla změna teploty desky v podstatě nepatrná, takže jev zahřívání může být, za způsobení odklonu od linearitu, vyloučen. Žádný další artefakt, který by se mohl na odklonu od linearitu projevit nepřipadá v úvahu, takže výsledky měření můžeme brát za směrodatné.

4.3.2. Výsledky měření pro normálovou sílu

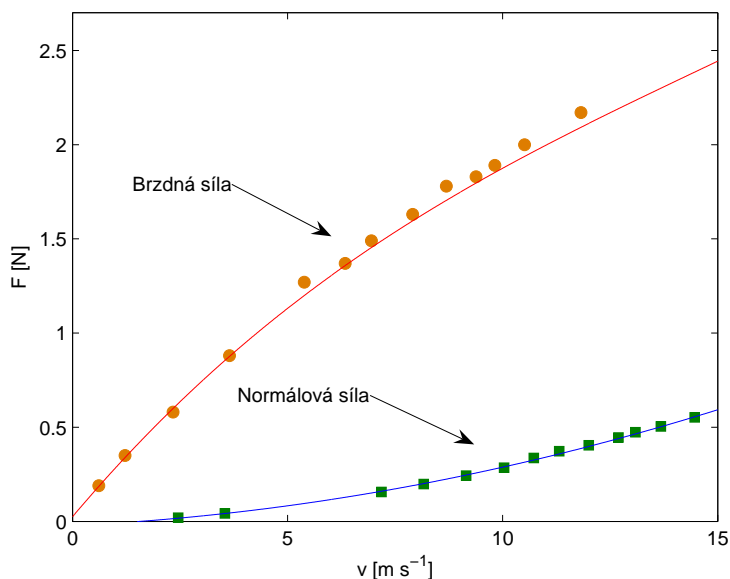
V tabulce 4.2 jsou opět uvedena data vztahující se k měření normálové síly působící na magnet pohybující se nad hliníkovou deskou. Při měření normálové síly se objevuje nepříjemný artefakt. Jak se síla působící na magnet zvyšuje, rameno siloměru se prohýbá a vzdálenost magnetu od rotující desky tedy narůstá. Následkem toho jsou naměřené hodnoty normálové síly nepatrně zkreslené (skutečné hodnoty normálové síly jsou pro měřené rychlosti větší). Bohužel, tento artefakt se mi při experimentu nepodařilo odstranit. Prohnutí ramene siloměru však pro měřené síly není velké ve srovnání se vzdáleností magnetu od desky a tak měření nebude tímto jevem příliš ovlivněno. Na obr. 4.9 je vynesena závislost normálové síly na rychlosti magnetu. Výsledek je opět v souladu s očekáváním a dá se dokonce říci, že normálová síla se zvyšuje s kvadrátem rychlosti (kdybychom nějakým způsobem odstranili artefakt související s prohnutím ramen, výsledek by byl ještě o něco příznivější). Je určitě zajímavé podívat se na srovnání chování obou závislostí na určitém intervalu rychlostí, což můžete vidět na obr. 4.10. Normálová síla působící na magnet rozhodně není malá, jelikož je v maximální hodnotě rovna $F_N = 0.55 \text{ N}$ a to je skoro pětkrát

$l = 1.5 \text{ mm } R_S = 4.7 \text{ cm}$	
\mathbf{F} [N]	\mathbf{v} [ms^{-1}]
0.02	2.46
0.04	3.54
0.16	7.18
0.20	8.17
0.24	9.15
0.29	10.04
0.34	10.72
0.37	11.31
0.40	12.00
0.45	12.69
0.47	13.09
0.50	13.68
0.55	14.46

Tabulka 4.2: Naměřená data v konfiguraci pro normálovou sílu



Obrázek 4.9: Závislost normálové síly na rychlosti magnetu nad deskou



Obrázek 4.10: Srovnání závislosti normálové a brzdné síly na rychlosti

větší síla, než tíhová síla působící na magnet. Magnet by se tedy bez problémů mohl vznášet nad rotující deskou.

4.4. Závěr měření

Naše měření potvrdila některé z našich teoretických předpovědí, ovšem jak již bylo v úvodu experimentální části nastíněno, měření se nemohlo srovnávat s teorií do hloubky. Náročnost spojená s řešením teoretického modelu pro reálné případy magnetů, vedla ke značnému zjednodušení geometrie magnetu a průběhu magnetického pole jím vytvářeného. Experiment poté umožňoval pouze srovnání obecných rysů teorie, které musí zůstat platné pro libovolnou geometrii magnetu. Tyto obecné rysy teorie však byly uspokojivě ověřeny, což se dá považovat za úspěch modelu. Nepodařilo se nám experimentálně ověřit teorii pro velké rychlosti magnetu a velké vodivosti desky a to čistě z technických a finančních důvodů. Použití reálnějšího magnetu v teoretických výpočtech, by samozřejmě poskytlo nepřehledné množství dalších experimentálně zajímavých proměnných, ovšem matematická náročnost s tím spojená, bohužel nedovolila jeho propočítání.

Kapitola 5

Závěr

Vypracovali jsme dva teoretické modely popisující vířivé proudy v desce, nad kterou se pohybuje magnet rychlostí v . První z nich (dipólový) však dával správné předpovědi pouze pro malé rychlosti (vodivosti), jelikož naprosto zanedbával sekundární proudy a proudy vyšších řádů, které vznikají zahrnutím magnetického pole, které má původ právě v těchto proudech, do původních rovnic. Druhý model, který vycházel z principu krokování magnetů a používal difúzní rovnici pro zjištění časového vývoje magnetického pole v desce, již dával správné informace i pro velké rychlosti a vodivosti. Metodu jsme aplikovali, z důvodu větší názornosti, pouze na případ 2D desky a na velice jednoduchý model magnetického pole magnetu (z důvodu matematické schůdnosti), což bohužel v důsledku vedlo k tomu, že jsme neměli možnost teoretický model experimentálně ověřit ve všech jeho předpovědích a museli jsme se spokojit pouze s experimentálním ověřením obecných rysů teorie platných pro libovolný magnet.

Experimentálně jsme ověřili některé charakteristické rysy teorie, hlavně v oblasti malých rychlostí. Dle předpovědi kapitoly (2.3.1) jsme v experimentu obdrželi závislost normálové síly přibližně úměrnou v^2 a brzdná síla může být považována za lineární pro malé rychlosti, pro rychlosti větší se pak postupně odklání od linearity.

Vylepšený model, vycházející z principu krokování magnetů, dává v limitách malých a velkých rychlostí (vodivosti), opět podle předpovědí z kapitoly (2.3.1), správné výsledky. Pro malé rychlosti závislost brzdné síly úměrnou lineárně v a pro velké rychlosti (vodivosti) klesá brzdná síla přibližně jako $1/v$ i $1/\sigma$. Navíc vylepšený model dává v limitě malých rychlostí (vodivosti) identické výsledky jako model dipólový, což je logické, jelikož v případě, kdy je vodivost malá, je příspěvek od sekundárních proudů k původnímu magnetickému poli skutečně zanedbatelný a proto dává dipólový model v této limitě správné výsledky. Vylepšený model nám také poskytuje zcela obecný postup řešení proudů v desce a lze očekávat, že bude dávat správné předpovědi pro libovolný magnet, a ne pouze pro idealizovaný, který jsme použili ve výpočtech.

Literatura

- [1] B. Sedlák, I. Štoll: *Elektrina a magnetismus*, Academia, Praha 2002, ISBN 80-200-1004-1.
- [2] L. D. Landau, E. M. Lifshitz: *Electrodynamics of Continuous Media - 2nd Edition*, Butterworth-Heinemann, 1984, ISBN 0-7506-2634-8.
- [3] L. D. Landau, E. M. Lifshitz: *The Classical Theory of Fields - 4th Edition*, Butterworth-Heinemann, 1975, ISBN 0-7506-2768-9.
- [4] Feynman, Richard P.: *Feynmanovy přednášky z fyziky s řešenými příklady* (druhý díl), Fragment, Praha 2001, ISBN 80-7200-420-4.
- [5] Rektorys, Karel: *Přehled užití matematiky I,II*, Prometheus, Praha 2000, ISBN 80-7196-179-5
- [6] J. Horský, J. Novotný, M. Štefaník: *Mechanika ve fyzice*, Academia, Praha 2001, ISBN 80-200-0208-1
- [7] J. Formánek *Úvod do kvantové teorie*, Academia, Praha 2004, ISBN 80-200-1176-5
- [8] S. Lang *Complex Analysis*, Springer, 1999, ISBN 0-387-98592-1
- [9] K. F. Riley, M. P. Hobson, S. J. Bence *Mathematical methods for physics and engineering*, Cambridge, 2002, ISBN 0-521-89067-5
- [10] I. S. Gradshteyn, I. M. Ryzhik *Table of Integrals, Series, and Products*, Academic press, 2000, ISBN 0-12-294757-6
- [11] W. M. Saslow *Maxwell's theory of eddy currents in thin conducting sheets, and applications to electromagnetic shielding and MAGLEV*, Am. J. Phys. **60**, 693-711 (1992)
- [12] B. S. Palmer *Current density and forces for a current loop moving parallel over a thin conducting sheet*, Eur. J. Phys. **25**, 655-666 (2004)
- [13] J. Kvasnica *Teorie elektromagnetického pole*, Academia, Praha 1985