Přírodovědecká fakulta Masarykovy univerzity

Základní matematické metody ve fyzice I.

Bakalářská práce

2006

Zdeněk Šustek

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci *Základní matematické metody ve fyzice I.* vypracoval samostatně s použitím uvedených pramenů.

V Brně 15. května 2006 ....

Obsah

Úvod

Na úvod této práce bych rád citoval slova Richarda P. Feynmana, nositele Nobelovy ceny za fyziku:

> *„Pro ty, kdo neznají matematiku, je obtížné porozumět skutečnému pocitu nad nejhlubší krásou přírody. Chcete-li se dozvědět něco o přírodě a obdivovat ji, musíte porozumět jazyku, kterým mluví."*
>
> (R.P. Feynman, O povaze fyzikálních zákonů)

Nejefektivnějším popisem přírody je popis matematický. Přírodní zákony samy mají matematickou podobu, proto se přednášky základního kurzu fyziky bez matematiky neobejdou. Už od prvního semestru se studenti odborné, aplikované i učitelské fyziky v přednáškách z mechaniky setkávají s pojmy derivace a integrálu, diferenciálu a kmenové funkce, diferenciální rovnice, matice a vektoru, gradientu, rotace, divergence, atd. Přednášky z matematické analýzy a algebry však k některým z nich dospějí až mnohem později.

Co potom zbývá studentovi? Je téměř nemožné nastudovat z literatury a do hloubky pochopit tyto pojmy během jediného semestru. Studenti je pak obvykle chápou „intuitivně" a vzorce si zapamatují jako „obrázek".

Předměty Základní matematické metody ve fyzice I. a II. jsou zaměřeny právě na vysvětlení některých matematických pojmů, jejich cílem je také naučit studenta s nimi pracovat v míře dostatečné pro první ročník studia fyziky. Předměty patří k nejzapisovanějším v prvním ročníku oborů studijního programu Fyzika. Jsou zde přednášeny základní pojmy a metody aplikované matematiky s důrazem na jejich použití při řešení fyzikálních úloh. Sylabus obsahuje kapitoly z algebry, matematické analýzy, geometrie i diferenciálních rovnic. Jak lze vyčíst z každoroční studentské ankety, problémem v tomto oblíbeném předmětu je nedostatečnost literatury. Studenti kombinované formy studia nemají k dispozici žádný volně dostupný text, který by obsahově zahrnoval celý sylabus přednášky.

Cílem této práce je vytvoření učebního textu k přednáškám, který bude volně k dispozici studentům na internetových stránkách. Snažím se, aby tento text byl stručný a srozumitelný, ale přesto matematicky korektní. V textu jsou definovány pouze ty pojmy, které se objevují v přednáškách z fyziky a formulována pouze tvrzení, která budou studenti potřebovat v prvních několika semestrech. Text není zatížen zdlouhavými důkazy ani velkým množstvím definic, neboť se předpokládá, že v budoucnu studenti absolvují kompletní základní matematický kurz a dospějí k hlubšímu pochopení pojmů a souvislostí. Naopak, důraz je kladen na aplikaci a výpočetní praxi, proto je text doplněn příklady a cvičeními. Každý čtenář, který zvládne předchozí text, by měl být schopen dané příklady vyřešit či vypočítat.

V kapitolách 1 a 2 jsou probírány základy diferenciálního počtu funkce jedné reálné proměnné, jsou zde definovány pojmy jako je limita, spojitost, derivace funkce či její diferenciál. Jako zdroj ke zpracování sloužily zejména publikace [1], [10]. Třetí kapitola se zaobírá skalárními funkcemi dvou a tří proměnných, parciálními a směrovými derivacemi, gradientem a úplným diferenciálem a zdrojem k jejímu zpracováni byla publikace [2].

Při tvorbě této bakalářské práce jsem předpokládal běžné matematické a fyzikální znalosti, se kterými by měl být student seznámen na střední škole. Text byl vysázen systémem LaTeX.

autor

Kapitola 1

Pojem funkce

V této kapitole se budeme zabývat reálnou funkcí jedné reálné proměnné, její limitou a spojitostí. Správné pochopení těchto pojmů je důležité pro celý diferenciální počet funkcí jedné proměnné a rovněž pro navazující partie jako integrální počet, obyčejné diferenciální rovnice apod.

1.1 Funkce jedné proměnné a její graf

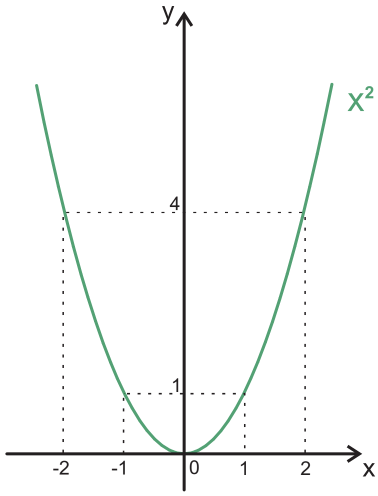
Definice 1.1. *Reálnou funkcí jedné reálné proměnné* rozumíme zobrazení f z M do $\mathbb{R}$, kde M je podmnožina $\mathbb{R}$, tj. každému $x \in M$ je přiřazeno právě jedno $y = f(x) \in \mathbb{R}$. Množina M se nazývá *definičním oborem* funkce f a značí se $D(f)$. Množina $H(f) = \{y \in \mathbb{R} \,|\, \exists x \in D(f) : f(x) = y\}$ je *obor hodnot* funkce f.

Poznámka. Pro stručnost budeme říkat místo reálné funkce jedné reálné proměnné pouze funkce jedné proměnné.

Funkce zadáváme tzv. funkčním předpisem a definičním oborem. Pokud definiční obor není zadán, pak uvažujeme největší podmnožinu $\mathbb{R}$, pro kterou má daná funkce smysl. Mohou tedy existovat funkce, které mají stejný předpis, ale liší se definičním oborem.

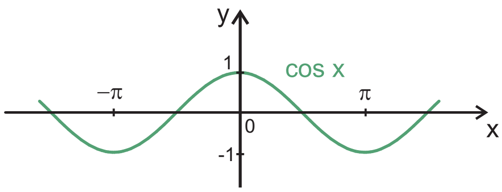
Definice 1.2. *Grafem* funkce f je množina bodů $G = \{[x, f(x)] : x \in D(f)\}$.

Příklad 1. Grafickým znázorněním reálné funkce $f(x) = x^2$ je parabola.



Obrázek 1.1: Parabola $f(x) = x^2$

Příklad 2. Grafickým znázorněním reálné funkce $y = \cos x$ je kosinusoida.



Obrázek 1.2: Funkce $y = \cos x$

1.2 Limita a spojitost funkce

Mít limitu je lokální vlastnost funkce popisující chování funkce v ryzím okolí bodu (tento pojem definujeme později), v němž limitu určujeme. Skutečnost, že jde o ryzí okolí (tj. okolí kromě tohoto bodu), znamená, že limita nezávisí na funkční hodnotě funkce v tomto bodě – funkční hodnota se může lišit od limity v tomto bodě, nebo funkce nemusí být v daném bodě definována.

Definice 1.3. Nechť $x_0, \delta \in \mathbb{R}; \delta > 0$. Pak interval $U(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ nazveme *okolím bodu* x_0. Množina $U(x_0) - \{x_0\}$ se nazývá *ryzí okolí bodu* x_0.
Buď $a \in \mathbb{R}$. Pak interval $U(+\infty) = (a, +\infty)$ nazveme okolím bodu $+\infty$ a interval $U(-\infty) = (-\infty, a)$ okolím bodu $-\infty$.

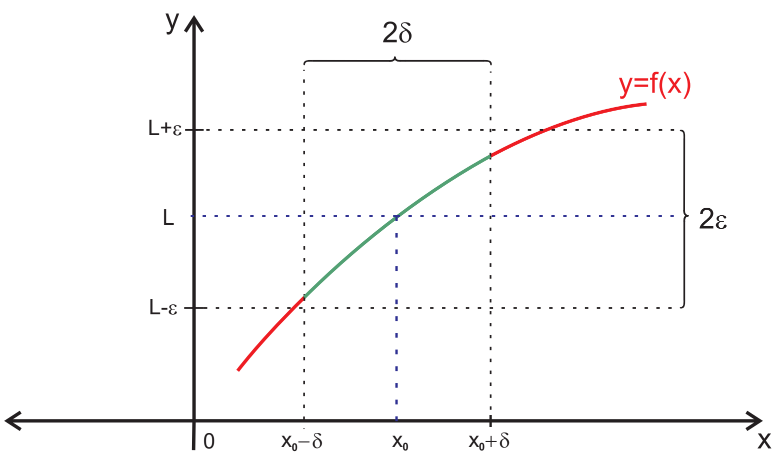
Definice 1.4. Řekneme, že funkce f má v bodě $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} = \mathbb{R}^*$ *limitu* $L \in \mathbb{R}^*$, jestliže ke každému okolí $U(L)$ bodu L existuje ryzí okolí $U(x_0)$ bodu x_0 tak, že pro všechna $x \in U(x_0)$ je funkce definovaná a platí $f(x) \in U(L)$. Píšeme $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$.

Volbou bodů x_0 a L mohou nastat tyto speciální případy limity:

- Vlastní limita ve vlastním bodě, je-li $x_0, L \in \mathbb{R}$
- Vlastní limita v nevlastním bodě, je-li $x_0 = \pm\infty$ a $L \in \mathbb{R}$
- Nevlastní limita, je-li $L = \pm\infty$.

V případě vlastní limity ve vlastním bodě popíšeme okolí $U(L)$ pomocí ε a $U(x_0)$ pomocí δ a dostaneme následující definici.

Definice 1.5. Nechť $x_0, L \in \mathbb{R}$. Řekneme, že $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$, jestliže $\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall x \in \mathbb{R} : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$.



Obrázek 1.3: Vlastní limita ve vlastním bodě

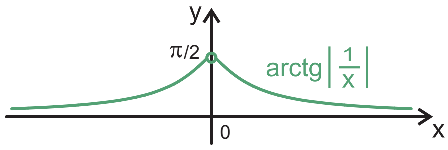
Funkce f má v libovolném bodě nejvýše jednu limitu.

Definice 1.6. Jestliže funkce $f(x)$ má v bodě x_0 vlastní limitu a platí, že $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, pak říkáme, že je funkce *spojitá* v bodě x_0.

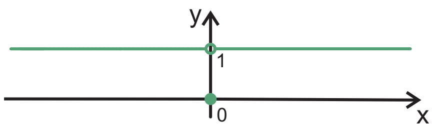
Definice 1.7. Buď f funkce, $I \subseteq D(f)$ interval. Řekneme, že f je *spojitá na intervalu* I, jetliže je spojitá v každém vnitřním bodě intervalu I.

Příklad 3.

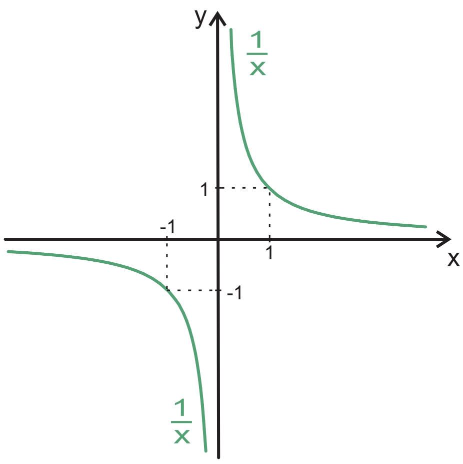
a) funkce $f(x) = \operatorname{arctg}|\frac{1}{x}|$ má v bodě $x_0 = 0$ vlastní limitu $L = \frac{\pi}{2}$, ale není v tomto bodě definovaná a tedy ani spojitá.



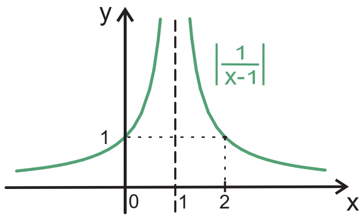
b) funkce $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x \neq 0 \\ 0 & \text{pro } x = 0 \end{cases}$ má v bodě $x_0 = 0$ vlastní limitu $L = 1$, ale není v tomto bodě spojitá.



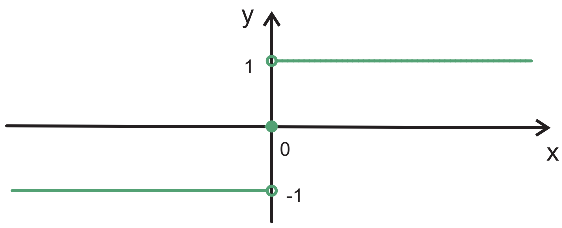
c) funkce $f(x) = \frac{1}{x}$ má v nevlastním bodě $x_0 = \pm\infty$ vlastní limitu $L = 0$.



d) funkce $f(x) = \frac{1}{|x-1|}$ má v bodě $x_0 = 1$ nevlastní limitu $L = \infty$, ale není v tomto bodě definovaná a ani spojitá.



e) funkce $f(x) = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 & \text{pro } x > 0 \\ 0 & \text{pro } x = 0 \\ -1 & \text{pro } x < 0 \end{cases}$ nemá v bodě $x_0 = 0$ limitu. Není v tomto bodě spojitá.



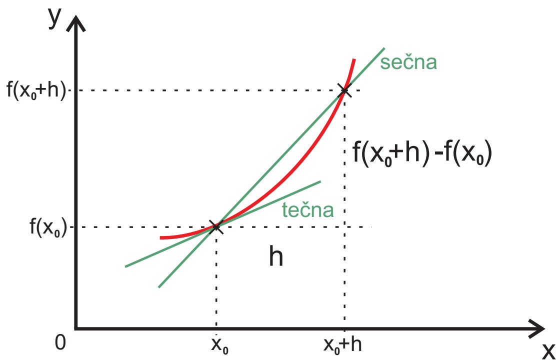
Kapitola 2

Derivace funkce jedné proměnné

2.1 Derivace funkce

Mějme funkci f definovanou na okolí bodu x_0. Jestliže změníme proměnnou x_0 o hodnotu h, změní se funkční hodnota o $f(x_0+h)-f(x_0)$, průměrná změna funkční hodnoty (tj. směrnice sečny grafu) je potom

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \quad . \tag{2.1}$$



Obrázek 2.1: Derivace funkce

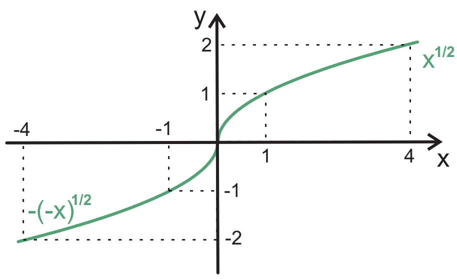
Okamžitou změnu funkční hodnoty (směrnice tečny grafu v bodě $[x_0, f(x_0)]$) dostaneme jako limitu výrazu (2.1) pro $h \to 0$ (pokud existuje)

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \quad . \tag{2.2}$$

Definice 2.1. Limitu (2.2) nazýváme *derivací funkce f v bodě x_0* a značíme ji $f'(x_0)$.
Je-li limita (2.2) vlastní, nazývá se číslo $f'(x_0)$ *vlastní derivací* funkce f v bodě x_0.
Je-li limita (2.2) nevlastní, nazývá se $f'(x_0)$ *nevlastní derivací* funkce f v bodě x_0.

Příklad 4. Určete derivaci funkce $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{pro } x \geq 0 \\ -\sqrt{-x} & \text{pro } x < 0 \end{cases}$ v bodě $x_0 = 0$.

Funkce $f(x)$ má v bodě $x_0 = 0$ nevlastní derivaci $+\infty$. Tečnou ke grafu funkce $f(x)$ je osa y.



Obrázek 2.2: Graf $f(x)$

Poznámka. Libovolná funkce má v libovolném bodě nejvýše jednu derivaci.

Poznámka. Pokud označíme $x = x_0 + h$ lze derivaci psát ve tvaru

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad . \tag{2.3}$$

Derivace má význam:

- *Geometrický* - derivace funkce je směrnice tečny ke grafu funkce v bodě $[x_0, f(x_0)]$.
- *Fyzikální* - předpokládejme, že v časovém intervalu $\langle t_1, t_2 \rangle$ se po přímce pohybuje zleva doprava hmotný bod, jehož poloha v čase t je určena souřadnicí $x(t)$ bodu dané přímky. Průměrná rychlost v daném časovém intervalu je

$$v_p = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1} \quad . \tag{2.4}$$

Okamžitou rychlost v_0 v nějakém čase t_0 zjistíme tak, že budeme „zmenšovat" velikost časového intervalu, tj. budeme se „blížit k bodu t_0". Vyjádřeno matematicky pomocí limity

$$v_0 = \lim_{t \to t_0} \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0} = x'(t_0) \quad . \tag{2.5}$$

Vidíme, že fyzikální význam derivace je v tomto případě okamžitá rychlost hmotného bodu.

Podobně obecněji, jestliže $f(t)$ je fyzikální skalární veličina závisející na čase, charakterizuje $f'(t)$ její okamžitou změnu v čase t.

Poznámka. Ve fyzice se obvykle derivace fyzikální veličiny závisející na čase značí $\dot{f}(t)$.

Příklad 5. Z definice derivace odvoďte derivaci funkce $f : y = x^3$.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x^3 - x_0^3}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{(x - x_0)(x^2 + x_0 x + x_0^2)}{x - x_0} =$$
$$= \lim_{x \to x_0} (x^2 + x_0 x + x_0^2) = 3x_0^2 \; .$$

$$(x^3)' = 3x^2 \; .$$

Věta 2.1. Nechť funkce f, g mají v bobě x_0 vlastní derivaci. Pak platí:

1. $(cf(x))'_{x=x_0} = c(f(x))'_{x=x_0} = cf'(x_0)$.
2. $(f(x) \pm g(x))'_{x=x_0} = f'(x_0) \pm g'(x_0)$.
3. $(f(x) \cdot g(x))'_{x=x_0} = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$.
4. Je-li $g(x_0) \neq 0$, pak $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'_{x=x_0} = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$.

Věta 2.2 (Derivace složené funkce). Mějme funkci $u = g(x)$, která má vlastní derivaci v bodě x_0, a funkci $y = f(u)$, která má vlastní derivaci v bodě $u_0 = g(x_0)$. Pak složená funkce $y = F(x) = f[g(x)]$ má vlastní derivaci v bodě x_0 a platí

$$F'(x_0) = f'(u_0) \cdot g'(x_0) = f'[g(x_0)] \cdot g'(x_0) \; .$$

Příklad 6. Odvoďte z definice derivace rovnici pro derivování složené funkce $F(x)$.

$$F'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{f[g(x)]-f[g(x_0)]}{g(x)-g(x_0)} \cdot \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} =$$
$$= \lim_{u\to u_0} \frac{f(u)-f(u_0)}{u-u_0} \cdot \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} = f'(u_0)\, g'(x_0) = f'[g(x_0)]\, g'(x_0)\ .$$

Protože lze vlastní derivaci funkce f chápat jako funkci, můžeme definovat její derivaci v nějakém bodě x_0; tu pak nazýváme druhou derivací funkce f v bodě x_0 a značíme $f''(x_0)$. Rovněž vlastní druhou derivaci lze chápat jako funkci f'' na množině $D(f'') \subseteq D(f')$. Ta může mít opět derivaci v některém bodě atd.

Definice 2.2. *Druhou derivací* funkce f rozumíme funkci $f'' = (f')'$ a pro libovolné $n \geq 2$ definujeme *n-tou derivaci (derivaci n-tého řádu)* funkce f vztahem $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$.

Příklad 7. Vypočtěte derivace všech řádů polynomu $f(x) = 2x^3 - 4x^2 + x - 8$.

Pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí:

$$f'(x) = 6x^2 - 8x + 1\ , \qquad f''(x) = 12x - 8\ ,$$
$$f'''(x) = 12\ , \qquad f''''(x) = 0\ ,$$

odtud $f^{(n)} = 0$, pro libovolné $n \geq 4$.

2.2 Přehled derivování elementárních funkcí

Následující vzorce platí všude tam, kde jsou příslušné funkce definovány.

$$
\begin{aligned}
(c)' &= 0 & (x^a)' &= ax^{a-1}, a \in \mathbb{R} \\
(\mathrm{e}^x)' &= \mathrm{e}^x & (a^x)' &= a^x \ln a \\
(\ln x)' &= \frac{1}{x} & (\log_a x)' &= \frac{1}{x \ln a} \\
(\sin x)' &= \cos x & (\cos x)' &= -\sin x \\
(\operatorname{tg} x)' &= \frac{1}{\cos^2 x} & (\operatorname{cotg} x)' &= -\frac{1}{\sin^2 x} \\
(\arcsin x)' &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} & (\arccos x)' &= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\
(\operatorname{arctg} x)' &= \frac{1}{x^2+1} & (\operatorname{arccotg})' &= -\frac{1}{x^2+1}
\end{aligned}
$$

Příklad 8. Vypočtěte derivace následujících funkcí.

a) $5x^3$

$$(5x^3)' = 5(x^3)' = 5 \cdot 3x^2 = 15x^2 \ .$$

b) $x^2 - 2x + 2$

$$(x^2 - 2x + 2)' = 2x - 2 \ .$$

c) $\mathrm{e}^x(12x^5 - 7x)$

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{e}^x(12x^5 - 7x))' &= \mathrm{e}^x(12x^5 - 7x) + \mathrm{e}^x(5 \cdot 12x^4 - 7) = \\
&= \mathrm{e}^x(12x^5 + 60x^4 - 7x - 7) \ .
\end{aligned}
$$

d) $\frac{x}{a^2-x^2}, a \neq 0$

$$\left(\frac{x}{a^2-x^2}\right)' = \frac{1(a^2-x^2) - x(-2x)}{(a^2-x^2)^2} = \frac{a^2+x^2}{(a^2-x^2)^2} \ .$$

e) $\sin^2(\cos 3x)$

$$(\sin^2(\cos 3x))' = 2\sin(\cos 3x)\cdot\cos(\cos 3x)\cdot(-\sin 3x)\cdot 3 = \\ = -6\sin(\cos 3x)\cos(\cos 3x)\sin 3x\ .$$

f) x^x

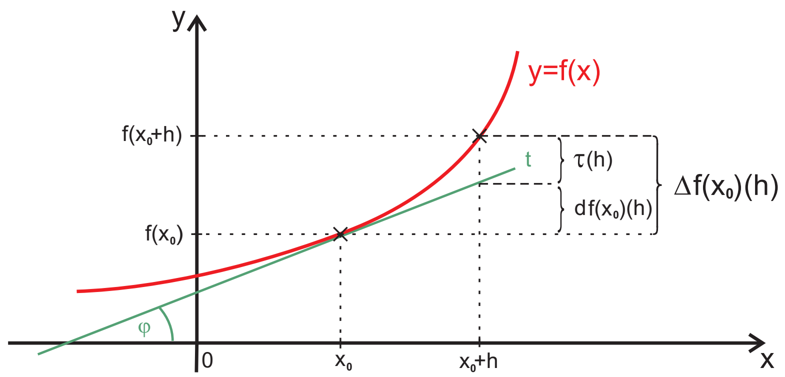
$$(x^x)' = (\mathrm{e}^{x\ln x})' = \mathrm{e}^{x\ln x}\left(\ln x + x\frac{1}{x}\right) = x^x(\ln x + 1)\ .$$

2.3 Diferenciál funkce

Pro funkce se kromě derivací zavádí i takzvaný diferenciál funkce.

Definice 2.3. Předpokládejme, že existuje derivace $f'(x_0)$ funkce f v bodě x_0. Nechť $\Delta x = h$ je přírůstek argumentu x. Funkce $F : F(h) = f'(x_0)\cdot h$ proměnné $h \in \mathbb{R}$ nazýváme *diferenciál funkce f v bodě x_0*. Hodnoty diferenciálu označujeme jako $\mathrm{d}f(x_0)(h) = f'(x_0)\cdot h = f'(x_0)\Delta x = f'(x_0)(x - x_0) = f'(x_0)\mathrm{d}x(h)$. Výraz $\mathrm{d}x$ nazýváme diferenciálem funkce $y = x$.

Geometrický význam diferenciálu



Obrázek 2.3: Geometrický význam diferenciálu

Je daná funkce $f(x)$ a bod $[x_0, f(x_0)]$. V tomto bodě sestrojíme tečnu t. Směrnice tečny je $\mathrm{tg}\,\varphi = f'(x_0)$. Přírůstek $\Delta f(x_0)(h)$ je součtem dvou hodnot: diferenciálu $\mathrm{d}f(x_0)(h)$ a $\tau(h)$. Platí $\lim_{h\to 0}\tau(h) = 0$. Nejběžnější aplikace diferenciálu spočívá v tom, že (pro malá h) klademe

$$f(x_0 + h) \doteq f(x_0) + f'(x_0)h\ ,$$

tj. skutečný přírůstek funkce $\Delta f(x_0)(h)$ nahradíme s jistou chybou diferenciálem $\mathrm{d}f(x_0)(h)$ (geometricky graf funkce nahradíme jeho tečnou). Někdy se používá označení

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \qquad \text{pro } x \to x_0 \ .$$

2.4 Příklady k procvičení

1. Vypočtěte a upravte derivace následujících funkcí.

$$y = x \arcsin \frac{x^2-1}{x^2+1} \qquad \left[y' = \arcsin \frac{x^2-1}{x^2+1} + \frac{2x}{x^2+1} \right]$$

$$y = \cos 2x - 2 \sin x \qquad [y' = -2 \cos x (2 \sin x + 1)]$$

$$y = \sqrt[3]{\frac{1+x^3}{1-x^3}} \qquad \left[y' = \frac{2x^2}{(1-x^3)^2} \sqrt[3]{\frac{(1-x^3)^2}{(1+x^3)^2}} \right]$$

$$y = x + (x-1) \arcsin \sqrt{\frac{x}{x+1}} \qquad \left[y' = 1 + \frac{x-1}{2\sqrt{x}(x+1)} + \arcsin \sqrt{\frac{x}{x+1}} \right]$$

$$y = \sqrt[x]{x};\ x > 0 \qquad \left[y' = \sqrt[x]{x}\, \frac{1 - \ln x}{x^2} \right]$$

$$y = (\sin x)^{\cos x} + (\cos x)^{\sin x} \qquad \left[\begin{array}{ll} y' = & (\sin x)^{\cos x} (\operatorname{cotg} x \cdot \cos x - \sin x \cdot \ln \sin x) + \\ & + (\cos x)^{\sin x} (\cos x \cdot \ln \cos x - \operatorname{tg} x \cdot \sin x) \end{array} \right]$$

$$y = \operatorname{arctg} \frac{1+x}{1-x} \qquad \left[y' = \frac{1}{1+x^2} \right]$$

$$y = \sinh x \qquad [y' = \cosh x]$$

$$y = \cosh x \qquad [y' = \sinh x]$$

$$y = -\sqrt{1+x^2} + x\ln(x+\sqrt{1+x^2}) \qquad \left[y' = \ln(x+\sqrt{1+x^2})\right] \ .$$

2. Výpočtem podle definice najděte derivaci funkce f, je-li
a)$f(x) = x^2$
b)$f(x) = x^3$
c)$f(x) = \frac{1}{x}$
d)$f(x) = \sqrt{x}$
e)$f(x) = \sqrt[3]{x}$.

3. Hmotný bod se pohybuje po ose x podle vzorce $x = 10t + 5^2$, kde t je čas v sekundách a x je vzdálenost od počátku (v metrech). Určete průměrnou rychlost v časovém úseku $20 \leq t \leq 20 + t$ a proveďte číselný výpočet, jestliže a)$t = 1$; b)$t = 0{,}1$; c)$t = 0{,}01$. Jaká je okamžitá rychlost v okamžiku $t = 20$?

[a)215 $\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$; b)210,5 $\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$; c)210,05 $\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$; $v = 210\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$]

Kapitola 3

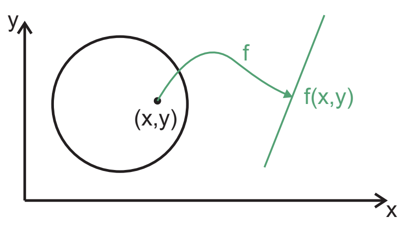
Skalární funkce dvou a tří proměnných

V této kapitole se budeme zabývat skalárními funkcemi dvou a tří proměnných, směrovými a parciálními derivacemi těchto funkcí, jejich gradientem a úplným diferenciálem.

3.1 Skalární funkce dvou a tří proměnných

Skalární funkce dvou a tří proměnných jsou například hustoty těles se spojitě rozloženou hmotností, tlaky v kapalinách nebo potenciální energie částic v gravitačním poli Země. Jsou to funkce souřadnic (proměnných x, y, z).

Definice 3.1. Zobrazení $f : \mathbb{R}^2 \supset A \ni (x, y) \to z = f(x, y) \in \mathbb{R}$ se nazývá *reálná funkce dvou reálných proměnných*, definovaná na A. Množina A je *definiční obor* funkce f a množina všech reálných čísel, kterých funkce nabývá, je *obor hodnot* funkce f.

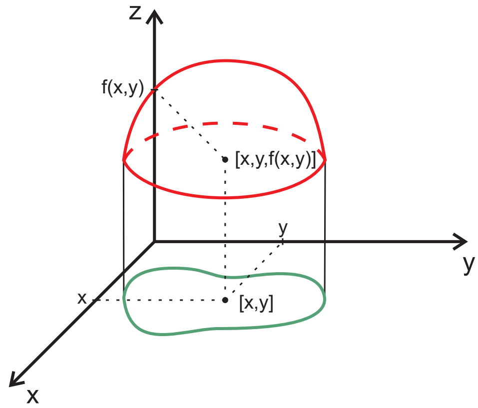


Obrázek 3.1: Skalární funkce

Definice 3.2. Podobně definujeme *funkci tří proměnných* $f : \mathbb{R}^3 \supset A \ni (x, y, z) \to w = f(x, y, z) \in \mathbb{R}$ a funkci n-proměnných $f : \mathbb{R}^n \supset A \ni (x_1, \dots, x_n) \to w = f(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}$.

Definice 3.3. *Grafem* funkce dvou proměnných je množina bodů

$$G_f = \left\{ [x, y, z] \in \mathbb{R}^3 \,|\, z = f(x, y) \right\} .$$



Obrázek 3.2: Graf funkce dvou proměnných

Definice 3.4. Řekneme, že funkce $f \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ má v bodě $[x_0, y_0] \in \mathbb{R}^2$ *vlastní limitu* $L \in \mathbb{R}$, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro každý bod $[x, y]$ splňující $|x - x_0| < \delta, |y - y_0| < \delta, [x, y] \neq [x_0, y_0]$, platí: $|f(x, y) - L| < \varepsilon$.

Píšeme $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = L$.

Poznámka. Podobně by se definovala limita pro funkci tří proměnných.

Definice 3.5. Řekneme, že funkce f je *spojitá* v bodě $[x_0, y_0]$, jestliže má v tomto bodě vlastní limitu a platí

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0) .$$

Poznámka. Podobně by se definovala spojitost funkce tří proměnných.

3.2 Parciální a směrové derivace

Definice 3.6. Nechť funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je definovaná v bodě $[x_0, y_0]$ a nějakém jeho okolí. Položme $\varphi(x) = f(x, y_0)$. Má-li funkce φ derivaci v bodě x_0, nazýváme tuto derivaci *parciální derivací* funkce f podle proměnné x v bodě $[x_0, y_0]$ a označujeme $f_x(x_0, y_0)$, eventuelně $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ nebo $f'_x(x_0, y_0)$.

To znamená, že

$$f_x(x_0, y_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0} .$$

Podobně, má-li funkce $\psi(y) = f(x_0, y)$ derivaci v bodě y_0, nazýváme tuto derivaci parciální derivací funkce f podle proměnné y v bodě $[x_0, y_0]$ a označujeme $f_y(x_0, y_0)$ $\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0),\ f'_y(x_0, y_0)\right)$.

Poznámka. Zcela analogicky se definují parciální derivace funkce 3 proměnných.

Věta 3.1. Nechť funkce $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mají parciální derivace podle proměnné x_i; $i \in \{1, \dots, n\}$ na otevřené množině M. Pak jejich součet, rozdíl, součin a podíl má na M parciální derivaci podle x_i a platí

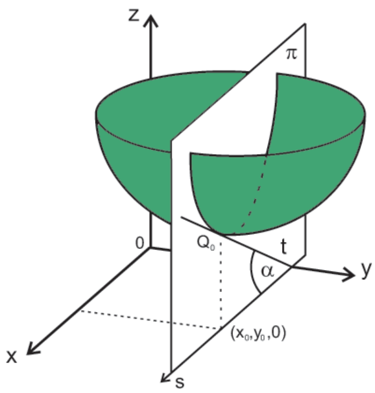
$$\frac{\partial}{\partial x_i}[f(x) \pm g(x)] = \frac{\partial}{\partial x_i} f(x) \pm \frac{\partial}{\partial x_i} g(x) ,$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}[f(x) \cdot g(x)] = \frac{\partial}{\partial x_i} f(x) \cdot g(x) + f(x) \frac{\partial}{\partial x_i} g(x) ,$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\frac{\partial}{\partial x_i} f(x) \cdot g(x) - f(x) \frac{\partial}{\partial x_i} g(x)}{g^2(x)} ,$$

přičemž tvrzení o podílu derivací platí za předpokladu, že $g(x) \neq 0$.

Geometrický význam parciálních derivací



Obrázek 3.3: Geometrický význam parciálních derivací

Nechť je dána funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a G_f je její graf. Nechť π je rovina daná rovnicí $y = y_0$. Průsečíkem $G_f \cap \pi$ je křivka v rovině π a parciální derivace $f_x(x_0, y_0)$ udává směrnici tečny t k této křivce v bodě $Q_0 = [x_0, y_0, f(x_0, y_0)]$. Podobně derivace $f_y(x_0, y_0)$ udává směrnici tečny ke křivce v bodě Q_0, která vznikne průsečíkem plochy G_f s rovinou $x = x_0$.

Příklad 9. Spočtěte parciální derivace f_x, f_y funkce:

a) $f(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$

$$f_x = \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) = \frac{-y}{x^2 + y^2} \ ,$$
$$f_y = \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \cdot \frac{1}{x} = \frac{x}{x^2 + y^2} \ .$$

b) $f(x, y) = x^y, \ x > 0$

$$f_x = y \cdot x^{y-1} \ ,$$
$$f_y = x^y \cdot \ln x \ .$$

Definice 3.7. Nechť $[x_0, y_0] \in D(f_x)$. Existuje-li parciální derivace funkce $f_x(x, y)$ podle proměnné x v bodě $[x_0, y_0]$, nazýváme tuto derivaci *parciální derivací 2. řádu* podle x funkce f v bodě $[x_0, y_0]$ a značíme $f_{xx}(x_0, y_0)$ nebo $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)$.
Analogicky definujeme parciální derivaci 2. řádu podle y funkce f v bodě $[x_0, y_0]$ a značíme $f_{yy} = (x_0, y_0)$ nebo $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)$.
Existuje-li parciální derivace funkce $f_x(x, y)$ podle proměnné y v bodě $[x_0, y_0]$, nazýváme tuto derivaci *smíšenou parciální derivací 2. řádu* funkce f v bodě $[x_0, y_0]$ a značíme $f_{xy}(x_0, y_0)$ nebo $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)$.
Analogicky definujeme smíšenou parciální derivaci 2. řádu funkce f v bodě $[x_0, y_0]$ a značíme $f_{yx}(x_0, y_0)$ nebo $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_o, y_0)$.

Věta 3.2. Nechť funkce f má spojité parciální derivace f_{xy}, f_{yx} v bodě $[x_0, y_0]$. Pak jsou tyto derivace záměnné, tj. platí

$$f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0) \ .$$

Příklad 10. Ukažte, že pro funkci $u = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ platí $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$.

$$u_x = -\frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \ ,$$
$$u_{xx} = -\frac{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}} - 3x^2(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}}{(x^2 + y^2 + z^2)^3} =$$
$$= -\frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{3x^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} \ ,$$

funkce u je na x, y, z závislá symetricky, proto můžeme u_{yy} a u_{zz} psát podle u_{xx}.

$$\begin{aligned} u_{yy} &= -\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{3y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}} \ , \\ u_{zz} &= -\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{3z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}} \ , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} &= -\frac{3}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{3(x^2+y^2+z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}} = \\ &= -\frac{3}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{3}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} = 0 \ . \end{aligned}$$

Příklad 11. Spočtěte parciální derivace 2. řádu podle x, y a smíšené derivace funkce $f(x, y) = 3x^2y^5 + 6x^5y$.

$$\begin{aligned} f_x &= 6xy^5 + 30x^4y \ , \\ f_y &= 15x^2y^4 + 6x^5 \ , \\ f_{xx} &= 6y^5 + 120x^3y \ , \\ f_{yy} &= 60x^2y^3 \ , \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} f_{xy} &= 30xy^4 + 30x^4 \\ f_{yx} &= 30xy^4 + 30x^4 \end{aligned} \right\} f_{xy} = f_{yx} \ .$$

Definice 3.8. Je-li funkce f dána na $\mathbb{R}^n$ a je-li $\vec{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ vektor, pak derivací funkce f v bodě a ve směru $\vec{v}$ rozumíme

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(a + t\vec{v}) - f(a)}{t} \ ,$$

má-li limita smysl. Tato limita se značí $f_{\vec{v}}(a)$ a říká se jí též *směrová derivace* funkce f v bodě a.

Poznámka. Derivace funkce f v bodě a ve směru vektoru $\vec{v}$ je vlastně derivace funkce $\varphi(t) = f(a + t\vec{v})$ jedné reálné proměnné t v $t = 0$. Tak se také počítá.

Příklad 12. Vypočtěte směrovou derivaci funkce $f(x, y) = \operatorname{arctg}(x^2 + y^2)$ v bodě $[1, 1]$ ve směru vektoru $\vec{u} = (1, 2)$.

$$\begin{aligned} f_{(1,2)}(1,1) &= \lim_{t \to 0} \frac{\operatorname{arctg}[(1+t)^2 + (1+2t)^2] - \operatorname{arctg} 2}{t} = \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{\operatorname{arctg}(2 + 6t + 5t^2) - \operatorname{arctg} 2}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{6 + 10t}{1 + (2 + 6t + 5t^2)^2} = \frac{6}{5} \ . \end{aligned}$$

Ve fyzice se obvykle využívá pro směrovou derivaci zápis:

$$F'(x_0, y_0) = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial \vec{s}} = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} s_x + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} s_y \ .$$

3.3 Gradient

Pro derivaci funkce $F(x, y, z)$ ve směru $\vec{s} = (s_x, s_y, s_z)$ v bodě (x_0, y_0, z_0) platí:

$$\frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial \vec{s}} = \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial x} s_x + \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial y} s_y + \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial z} s_z \ .$$

Tento vztah lze zobecnit pro n proměnných, ale ve fyzice ho nebudeme používat.

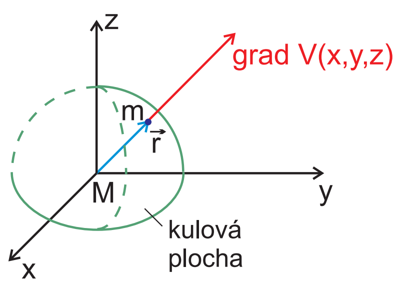
Jestliže zavedeme vektor $\vec{g} = \left(\frac{\partial f(x_0,y_0,z_0)}{\partial x}, \frac{\partial f(x_0,y_0,z_0)}{\partial y}, \frac{\partial f(x_0,y_0,z_0)}{\partial z} \right)$, pak daný vztah můžeme přepsat do tvaru:

$$\frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial \vec{s}} = g_x s_x + g_y s_y + g_z s_z = \vec{g} \cdot \vec{s} = |\vec{g}| \cdot |\vec{s}| \cdot \cos \sphericalangle(\vec{g} \cdot \vec{s}) \ .$$

Definice 3.9. Vektor $-\vec{g}$ určuje směr největšího spádu funkční hodnoty funkce f a $\vec{g}$ se nazývá *gradient* funkce f.

Definice 3.10. Rovnicí $f(x, y) = K =$ konstanta je v $\mathbb{R}^2$ určena *křivka konstantní funkční hodnoty* (vrstevnice). Podobně v $\mathbb{R}^3$ je to *plocha konstantní funkční hodnoty*.

Příklad 13. Vypočítejte gradient potenciálu gravitačního pole.



Obrázek 3.4: Potenciál gravitačního pole

$$V(x,y,z) = \frac{-\kappa M}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$
$$\vec{r} = (x,y,z)$$
$$r^2 = x^2+y^2+z^2$$

gradient potenciálu:

$$\mathrm{grad}V(x,y,z) = \left(\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z}\right) =$$
$$= \left(\frac{\kappa M 2x}{2\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}, \frac{\kappa M 2y}{2\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}, \frac{\kappa M 2z}{2\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}\right) =$$
$$= \frac{\kappa M}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}(x,y,z)$$
$$\mathrm{grad}V(x,y,z) = \frac{\kappa M}{r^3}\vec{r}\ .$$

3.4 Úplný diferenciál

Definice 3.11. Řekneme, že funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je v bodě $[x_0, y_0]$ *diferencovatelná*, jestliže existují reálná čísla A, B taková, že platí

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0) - (Ah+Bk)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0\ .$$

Lineární funkce $Ah+Bk$ proměnných h, k se nazývá *úplný diferenciál* funkce v bodě $[x_0, y_0]$ a značí se $\mathrm{d}f(x_0,y_0)(h,k)$, příp. $\mathrm{d}f(x_0,y_0)$.

Věta 3.3. Je-li funkce f diferencovatelná v bodě $[x_0, y_0]$, pak má v tomto bodě parciální derivace a platí $A = f_x(x_0,y_0)$, $B = f_y(x_0,y_0)$, tj.

$$\mathrm{d}f(x_0,y_0)(h,k) = f_x(x_0,y_0)h + f_y(x_0,y_0)k\ .$$

Poznámka. Úplný diferenciál častěji píšeme ve tvaru $\mathrm{d}f(x_0,y_0) = f_x(x_0,y_0)\mathrm{d}x + f_y(x_0,y_0)\mathrm{d}y$.

Diferenciál se používá k přibližnému výpočtu funkčních hodnot:

$$f(x,y) \approx f(x_0,y_0) + \mathrm{d}f(x_0,y_0)(x-x_0, y-y_0)\ .$$

Geometrický význam úplného diferenciálu

Rovina v $\mathbb{R}^3$ o rovnici $z = Ax + By + C$ se nazývá tečná rovina ke grafu funkce $z = f(x, y)$ v bodě $T = [x_0, y_0, f(x_0, y_0)]$, platí-li

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x, y) - Ax - By - C}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} = 0 \ .$$

Má-li tato rovina procházet bodem T, musí tento bod vyhovovat rovnici roviny, tj. $f(x_0, y_0) = Ax_0 + By_0 + C$, odkud $z = A(x - x_0) + B(y - y_0) + f(x_0, y_0)$. Tato rovina je tečnou rovinou, jestliže existuje úplný diferenciál funkce f v bodě $[x_0, y_0]$, tj. $A = f_x(x_0, y_0)$, $B = f_y(x_0, y_0)$. Rovnice tečné roviny má tvar:

$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0) \ .$$

Odtud je vidět, že úplný diferenciál funkce v daném bodě je přírůstek funkce na tečné rovině.

Věta 3.4. Má-li funkce f v bodě $[x_0, y_0]$ spojité parciální derivace 1. řádu, pak má v tomto bodě také diferenciál.

Příklad 14. Pomocí totálního (úplného) diferenciálu přibližně vypočtěte:

a) $1{,}04^{2{,}02}$

Pro přibližné vyjádření platí:

$$f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + \mathrm{d}f(x_0, y_0)(x - x_0, y - y_0)$$
$$f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Zde jde o funkci $f(x, y) = x^y$, $[x_0, y_0] = [1, 2]$, $(x - x_0) = 0{,}04$ a $(y - y_0) = 0{,}02$.

Nejprve si spočítáme parciální derivace funkce $f(x, y) = x^y$.

$$f_x(x, y) = y \cdot x^{y-1} \qquad f_x(x_0, y_0) = 2 \cdot 1^1 = 2$$
$$f_y(x, y) = x^y \cdot \ln x \qquad f_y(x_0, y_0) = 1^2 \cdot \ln 2 = 0$$

$$f(1{,}04; 2{,}02) \approx f(1, 2) + f_x(1, 2)(0{,}04) + f_y(1, 2)(0{,}02)$$
$$f(1{,}04; 2{,}02) \approx 1^2 + 2 \cdot 0{,}04 + 0 \cdot 0{,}02 = 1{,}08$$

$$1{,}04^{2{,}02} \approx 1,08 \ .$$

b) $\sqrt{(2{,}98)^2 + (4{,}05)^2}$

Zde jde o funkci $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$, $[x_0, y_0] = [3,4]$, $(x - x_0) = -0{,}02$ a $(y - y_0) = 0{,}05$.

Nejprve si spočítáme parciální derivace funkce $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$.

$$f_x(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad f_x(x_0,y_0) = \frac{3}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{3}{5}$$

$$f_x(x,y) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad f_x(x_0,y_0) = \frac{4}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{4}{5}$$

$$f(2{,}98; 4{,}05) \approx f(3,4) + f_x(3,4)(-0{,}02) + f_y(1,2)(0{,}05)$$

$$f(2{,}98; 4{,}05) \approx 5 + \frac{3}{5}\cdot(-0{,}02) + \frac{4}{5}\cdot 0{,}05 = 5{,}028$$

$$\sqrt{2{,}98^2 + 4{,}05^2} \approx 5,028\ .$$

3.5 Příklady k procvičení

1. Ověřte rovnost $z_{xy} = z_{yx}$ u funkcí:

a) $z = x^2 - 2xy - 3y^2$,

b) $z = \arccos\sqrt{\frac{x}{y}}$.

2. Najděte parciální derivaci 1. a 2. řádu funkcí:

a) $z = \frac{xy+x}{y}$,

b) $z = x\sin(x+y)$,

c) $z = \ln(x+y^2)$,

d) $z = (1+x^2)^y$.

$$\left[\begin{array}{ll} a) & z_{xx} = 0, z_{xy} = -\frac{1}{y^2}, z_{yy} = \frac{2x}{y^3}\ ; \\ b) & z_{xx} = 2\cos(x+y) - x\sin(x+y), z_{xy} = \cos(x+y) - x\sin(x+y), \\ & z_{yy} = -x\sin(x+y)\ ; \\ c) & z_{xx} = -\frac{1}{(x+y^2)^2}, z_{xy} = -\frac{2y}{(x+y^2)^2}, z_{yy} = \frac{2(x-y^2)}{(x+y^2)^2}\ ; \\ d) & z_{xx} = 2y(1+x^2)^{y-2}(-x^2+2x^2y+1), \\ & z_{xy} = 2x(1+x^2)^{y-1}[1+y\ln(1+x^2)], z_{yy} = (1+x^2)^y\ln^2(1+x^2) \end{array}\right]$$

3. Určete diferenciál funkce $u = x^{\frac{y}{z}}$ v bodě $[2, 1, 1]$.

$[\,\mathrm{d}f(2,1,1) = \mathrm{d}x + 2\ln 2\,\mathrm{d}y - 2\ln 2\,\mathrm{d}z]$

4. Pomocí diferenciálu přibližně vypočtěte:

a) $\arcsin \frac{0{,}48}{1{,}05}$

b) $\mathrm{e}^{0{,}05^3 - 0{,}02}$

$\left[a)\ \frac{\pi}{6} - \frac{0{,}09}{\sqrt{3}};\ b)\ 1{,}13\right]$

5. Pomocí gradientu vypočtěte směrové derivace funkce f ve směru vektoru $\vec{u}$ v daném bodě $[x_0, y_0]$.

a) $f(x, y) = xy, \vec{u} = (1, 2), [x_0, y_0] = [1, 1]$

b) $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \vec{u} = (1, 0, 1), [x_0, y_0, z_0] = [0, 1, 0]$

$\left[a)\ f_{(1,2)}(1, 1) = 3;\ b)\ f_{(1,0,1)}(0, 1, 0) = 0\right]$

6. Spočítejte derivaci funkce $x^2 - y^2$ v bodě $[1, 1]$ ve směru jednotkového vektoru, který svírá s kladným směrem osy x úhel $\frac{\pi}{3}$.

$[1 - \sqrt{3}]$

Literatura

[1] Došlá Z., Kuben J.: *Diferenciální počet funkcí jedné proměnné*, MU v Brně, Brno 2003.

[2] Došlá Z., Došlý O.: *Diferenciální počet funkcí více proměnných*, MU v Brně, Brno 1999.

[3] Bartsch H.-J.: *Matematické vzorce*, Mladá fronta, Praha 2002.

[4] Kvasnica J.: *Matematický aparát fyziky*, Academia, Praha 1989.

[5] Kopáček J. a kolektiv: *Příklady z matematiky pro fyziky I. - V.*, MATFYZPRESS, Praha 2002.

[6] Kopáček J.: *Matematika pro fyziky I.*, Univerzita Karlova, Praha 1977.

[7] Kopáček J.: *Matematika pro fyziky II.*, Státní pedagogické nakladatelství, Praha 1975.

[8] Kopáček J.: *Matematika pro fyziky III.*, Státní pedagogické nakladatelství, Praha 1976.

[9] Kopáček J. : *Matematika pro fyziky IV.*, Státní pedagogické nakladatelství, Praha 1979.

[10] Musilová J.: *Proseminář z matematické fyziky*, Univerzita J. E. Purkyně v Brně, Brno 1984.

[11] Kubeš P., Kyncl Z.: *Fyzika I.*, Vydavatelství ČVUT, Praha 1999.

[12] Pekárek S., Murla M.: *Fyzika I. - Semináře*, Vydavatelství ČVUT, Praha 1997.