

MASARYKOVA UNIVERZITA  
Přírodovědecká fakulta  
Ústav teoretické fyziky a astrofyziky



**BAKALÁŘSKÁ PRÁCE**  
**Fyzika vírových prstenců**

Petr Zikán

Vedoucí bakalářské práce: doc. Mgr. Tomáš Tyc, Ph.D.

2009

Na tomto místě bych rád poděkoval především vedoucímu bakalářské práce doc.Mgr. Tomáši Tycovi, Ph.D., Mgr. Jiřímu Bartošovi, Ph.D., Pavlu Kočímu a Pavle Švástové.

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci napsal samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce a jejím zveřejňováním.

V Brně dne 25. května 2009

Petr Zikán

Abstrakt:

Vírový prstenec je neobyčejně zajímavá hydrodynamická struktura. Jedná se o vírovou trubici kruhového tvaru, která je uzavřená sama do sebe. Vírový prstenec vzniká například při výbuchu atomové bomby nebo při dopadu kapky na vodní hladinu. Je až překvapivé, jak velké vzdálenosti je tato na první pohled křehká struktura schopna překonat. V této práci se věnuji rovnicím, které řídí vířivý pohyb, i jejich konkrétní aplikaci na případ vírového prstence. Dále je vypracováno několik teoretických modelů interakcí mezi prstenci a jejich experimentální ověření. Zčásti jsou studovány i kmity eliptických vírových prstenců. Závěrem popisují několik jevů, kterými se teoretická část nezabývá, jelikož byly pozorovány až během experimentů.

Klíčová slova: vírový prstenec, vírová čára, samoindukovaný pohyb, interakce vírových prstenců

Abstract:

Vortex ring is extraordinarily interesting hydrodynamic structure. It is a round-shaped vortex tube, which is round-closed into itself. Vortex ring forms, for example, after atomic bomb detonation, or when a drop of water falls on a water surface. It is surprising, how large distances this fragile structure can travel. In this thesis I describe equations that drive the vortex movement and apply them to a vortex ring. Couple of theoretical models of interaction between the rings are evolved, as well as their experimental verification. Oscillations of elliptical vortex rings are partially presented as well. During the research, some other phenomena were observed. These are not covered up in the theoretical part as they raised from experiments. They are described at the end of this thesis.

Keywords: vortex ring, vortex line, self-induced movement, interaction of vortices

<b>1</b>	<b>Úvod</b>	<b>5</b>
<b>2</b>	<b>Teorie</b>	<b>6</b>
2.1	Zákon zachování hmotnosti . . . . .	6
2.2	Vířivost . . . . .	6
2.3	Helmholtzův vírový teorém . . . . .	8
2.4	Kelvinův cirkulační teorém . . . . .	9
2.5	Proudnicová funkce . . . . .	9
2.6	Vírová čára . . . . .	10
2.7	Samoindukovaný pohyb vírové čáry . . . . .	11
2.8	Kruhové vírové čáry . . . . .	13
2.9	Translační pohyb vírového prstence . . . . .	15
2.10	Vzájemná interakce dvou vírových prstenců . . . . .	15
2.11	Kmity eliptických prstenců . . . . .	17
<b>3</b>	<b>Experimentální zařízení</b>	<b>19</b>
<b>4</b>	<b>Experimenty</b>	<b>21</b>
4.1	Rychlost vírového prstence . . . . .	22
4.2	Prokmitávání vírové trubice laserem . . . . .	25
4.3	Dopad vírového prstence na stěnu . . . . .	26
4.4	Vzájemná interakce dvou vírových prstenců . . . . .	29
4.5	Kmity eliptických prstenců . . . . .	31
4.6	Přerušení vírové trubice prstence . . . . .	31
4.7	Odraz prstence od vodní hladiny . . . . .	33
4.8	Dva prstence vedle sebe . . . . .	34
<b>5</b>	<b>Závěr</b>	<b>36</b>

# 1

## Úvod

Vírový prstenec je neobyčejně zajímavou hydrodynamickou strukturou. Jedná se o vír, jehož vírová čára je uzavřena sama do sebe. Vír vzniká při vzájemném pohybu vytlačované tekutiny z otvoru a okolní klidné tekutiny. Vírové prstence mohou doletět na velkou vzdálenost a je až překvapivé, jakou razanci mohou prstence mít při dopadu. Jejich výskyt v přírodě lze pozorovat jak ve velmi malých rozměrech (dopad kapky na vodní hladinu), tak i v rozměrech obrovských (výbuch atomové bomby).

Vírové prstence vždy přitahovaly pozornost fyziků. Jako první je zřejmě začali systematicky studovat Kelvin a Helmholtz v 19. století. Spekulovali o chování těchto podivuhodných útvarů a postupně odhalovali zákonitosti o pohybech vírů, které dnes nesou jejich jména.

Prstence generované ve vzduchu jde nejlépe pozorovat pomocí kouře. Kouř je v tomto případě pouze prostředkem ke zviditelnění prstence, který je unášen vírovou trubicí. Vírové prstence mohou být samozřejmě vytvořeny i ve vodě. Lze je zviditelnit pomocí barviva, případně vzduchovými bublinkami, které se pak uspořádají podél vírové čáry, kde vzniká vlivem rotace podtlak.

Práce je rozčleněna do tří částí. V první shrnuji teoretické poznatky, které popisují pohyb vírů. Skutečná vírová trubice je často nahrazována pro jednoduchost pojmem vírové čáry. Její součástí je i vypracování teoretických modelů interakcí mezi prstenci. V druhé části popisují experimentální zařízení, na kterém byly prováděny experimenty i jejich metodiku. V závěrečné části jsou zdokumentovány jednotlivé experimenty a jejich srovnání s teoretickými předpoklady.

# 2

## Teorie

### 2.1 Zákon zachování hmotnosti

---

Zákon zachování hmotnosti pro tekutinu lze vyjádřit ve známém vztahu<sup>1</sup>

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \quad (2.1)$$

který musí být splněn v každém bodě tekutiny. Tento vztah se nazývá rovnice kontinuity. Rovnici (2.1) lze po rozepsání divergence upravit na tvar

$$\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} + \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (2.2)$$

kde operátor

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \quad (2.3)$$

představuje derivaci vzhledem k času sledující pohyb tekutiny.

Pokud se během pohybu nemění hustota v žádném objemovém elementu tekutiny, nazýváme tekutinu nestlačitelnou. Tento požadavek lze matematicky vyjádřit ve tvaru

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0. \quad (2.4)$$

Rovnice (2.2) pak nabývá jednoduchého tvaru

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (2.5)$$

### 2.2 Vířivost

---

Matematicky je *vířivost* definována jako rotace rychlostního pole<sup>2</sup>, tedy

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}. \quad (2.6)$$

---

<sup>1</sup>odvození vztahu lze nalézt např. v [2], kap. 2, 2.2

<sup>2</sup>detailed rozbor situace je v [2], kap. 2, 2.4

Jelikož divergence rotace je vždy nula,  $\boldsymbol{\omega}$  musí splňovat

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\omega} = 0. \quad (2.7)$$

Předpokládejme nyní, že známe rozdělení vířivosti  $\boldsymbol{\omega}$  v prostoru a zajímá nás rychlostní pole indukované tímto rozdělením. Pro toto pole musí za předpokladu nestlačitelnosti tekutiny platit, že

$$\nabla \times \mathbf{u} = \boldsymbol{\omega}, \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (2.8)$$

V takovýchto případech je obvyklé volit  $\mathbf{u}$  jako rotaci jiného vektorového pole  $\mathbf{A}$  (nazývaného vektorový potenciál kvůli analogii pole  $\mathbf{u}$  s magnetickým polem), a tedy druhá podmínka v (2.8) je splněna automaticky. Rovnice pro vektorový potenciál  $\mathbf{A}$  je

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \boldsymbol{\omega}, \quad (2.9)$$

což lze při použití vektorové identity přepsat do tvaru

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} = \boldsymbol{\omega}. \quad (2.10)$$

Vektorový potenciál  $\mathbf{A}$  tímto není určen jednoznačně. Často se volí tak, aby  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ . Poslední rovnice se tím redukuje na

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\boldsymbol{\omega}, \quad (2.11)$$

jejíž řešení (známé jako Poissonův integrál) je

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\boldsymbol{\omega}'}{\hat{r}} dV(\mathbf{r}'), \quad (2.12)$$

kde  $\hat{r}$  je velikost vektoru  $\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$ . Polohový vektor  $\mathbf{r}$  ukazuje na bod, v němž počítáme potenciál,  $\mathbf{r}'$  na element  $dV(\mathbf{r}')$ ,  $\boldsymbol{\omega}'$  značí vířivost v bodě  $\mathbf{r}'$  (stejného značení bude používáno v celém textu). Po aplikaci rotace na poslední výraz získáváme

$$\mathbf{u} = \frac{1}{4\pi} \int \nabla_r \times \left( \frac{\boldsymbol{\omega}'}{\hat{r}} \right) dV(\mathbf{r}') = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{\mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega}'}{\hat{r}^3} dV(\mathbf{r}'). \quad (2.13)$$

Dostáváme tak důležitý výsledek, že výsledná rychlost v daném bodě je rovna součtu příspěvků od různých objemových elementů, v kterých je nenulová vířivost. Od určitého elementu  $dV(\mathbf{r}')$  je výsledný příspěvek

$$\delta \mathbf{u} = -\frac{\mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega}' dV(\mathbf{r}')}{4\pi \hat{r}^3}. \quad (2.14)$$

Jak bylo již naznačeno, je zde přímá analogie mezi výše uvedenými rovnicemi a rovnicemi známými z elektrodynamiky svazující ustálené rozložení elektrického proudu a jím indukovaného magnetického pole. Stejně tak jako můžeme říct, že rozložení elektrického proudu vytváří magnetické pole, můžeme tvrdit, že vířivost vytváří rychlostní pole v okolní tekutině.

Nyní uvažujme v tekutině křivku, jejíž tečna je všude rovnoběžná s lokální vířivostí v daném okamžiku. Takováto křivka je označována jako vírová proudnice. Matematicky jsou tyto křivky definovány (analogicky k proudnicím obyčejným) soustavou diferenciálních rovnic

$$\frac{dx}{\xi} = \frac{dy}{\eta} = \frac{dz}{\zeta}, \quad (2.15)$$

kde  $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t) = (\xi, \eta, \zeta)$  je lokální vířivost.

Plocha tvořená všemi vírovými čarami procházejícími danou uzavřenou křivkou je nazývána vírová trubice. Tok vířivosti plochou, která je ohraničena touto křivkou, lze vyjádřit

$$\int_S \boldsymbol{\omega} \cdot d\mathbf{S}. \quad (2.16)$$

## 2.3 Helmholtzův vírový teorém

Roku 1858 publikoval Helmholtz několik teorémů o vířivém pohybu v neviskózní tekutině. Objevil tyto zákonitosti pomocí analogie s elektrodynamikou. Teorém je odvozen na základě předpokladu pohybu vírů v neviskózní barotropické tekutině, působící síly jsou konzervativní. Teorém zní:

1. Vírová trubice nemůže končit v žádném bodě uvnitř tekutiny. Musí tvořit buď uzavřenou smyčku nebo končit na ploše ohraničující tekutinu.
2. Síla vírové trubice je konstantní podél její délky.
3. Vírové čáry se pohybují společně s tekutinou.
4. Síla vírové trubice je v čase konstantní.

Toto tvrzení je natolik zajímavé, že stojí za bližší povšimnutí. Bod 1 je pouze důsledkem vztahu (2.7). Pomocí tohoto vztahu lze dále ukázat, že integrál (2.16) má stejnou hodnotu pro všechny otevřené plochy ohraničené jakoukoli uzavřenou křivkou, která zcela leží na povrchu vírové trubice a obchází ji pouze jednou. Uvažujme tedy dvě takovéto plochy  $\mathbf{n}'dS$  a  $\mathbf{n}''dS$  ( $\mathbf{n}dS = d\mathbf{S}$ ), jejichž normály jsou orientovány souhlasně vzhledem k vírové trubici. Tok vířivosti uzavřenou plochou tvořenou plochami  $d\mathbf{S}'$  a  $d\mathbf{S}''$  a plochou dané vírové trubice mezi nimi dává

$$\int_S \boldsymbol{\omega}' \cdot d\mathbf{S}' - \int_S \boldsymbol{\omega}'' \cdot d\mathbf{S}'' = \int_V \nabla \cdot \boldsymbol{\omega} dV = 0, \quad (2.17)$$

jelikož tok plochou vírové trubice je nulový (z definice plyne, že normála plochy je vždy kolmá na směr vířivosti). Tok vířivosti je tedy stejný pro všechny plochy protínající vírovou trubici a je nazýván *síla* vírové trubice. V případě vírové trubice infinitesimálního průřezu je roven součinu plochy průřezu a velikosti vířivosti v tomto místě. To je obsahem bodu 2. Třetí bod bude více přiblížen v následující sekci, čtvrtý bod zde nebudeme dokazovat<sup>1</sup>.

<sup>1</sup>Důkaz lze nalézt v [5], kap. 16, 16.1.



## 2.4 Kelvinův cirkulační teorém

---

Pomocí Stokesova teorému můžeme přejít v (2.16) s pomocí (2.6) od plošného integrálu ke křivkovému

$$\int_S \boldsymbol{\omega} \cdot d\mathbf{S} = \oint_C \mathbf{u} \cdot d\mathbf{s}. \quad (2.18)$$

Integrál na pravé straně rovnice (2.18) je označován jako cirkulace. Vidíme tedy, že cirkulace rychlosti uzavřenou křivkou ležící na vírové trubici je rovna toku vířivosti plochou touto křivkou ohraničenou. To nás přivádí k velice zajímavému výsledku, který publikoval Kelvin roku 1868. Za stejných předpokladů jako v minulé sekci odvodil následující. Uvažujme v tekutině jakoukoli uzavřenou smyčku  $C$  v čase  $t$  a sledujme pohyb všech jejích částí společně s okolní tekutinou do polohy  $C'$ , které dosáhne v čase  $t'$ . Kelvinův teorém říká, že cirkulace  $\Gamma$  podél křivky  $C$  v čase  $t$  je stejná jako cirkulace podél  $C'$  v čase  $t'$ . Matematicky vyjádřeno,

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = 0. \quad (2.19)$$

Důkaz lze nalézt např. v [1], kap. 3, §33.

Cirkulace kolem libovolné křivky pohybující se s tekutinou je tedy konstantní. Je zajímavé, že tento teorém je odvozen za předpokladu neviskózní tekutiny. Ukazuje se, že pokud je tekutina viskózní, dochází k *difuzi* vířivosti  $z$  (nebo do) míst tekutiny uvnitř křivky, což způsobuje změnu cirkulace.

Nyní se můžeme vrátit k bodu 3 z předešlé sekce<sup>1</sup>. Představme si uzavřenou křivku, která obepíná vírovou trubici právě jednou. Budeme-li sledovat pohyb této křivky společně s tekutinou, nesmí se podle Kelvinova cirkulačního teorému změnit cirkulace podél této křivky. Pokud tedy křivka původně obepínala vírovou trubici, bude jí obcházet i v následujících okamžicích, aby cirkulace zůstala konstantní. Tvar křivky samotné se však může pozměnit v důsledku pohybu okolní tekutiny, která ji unáší. V tomto smyslu tedy vírové trubice sledují pohyb tekutiny.

## 2.5 Proudnicová funkce

---

Jak bylo uvedeno výše, v případě nestlačitelné tekutiny se rovnice kontinuity redukuje na jednoduchý tvar (2.5), který říká, že divergence rychlostního pole tekutiny musí být nulová. Uvažujme nyní speciální případ proudění, kdy tok tekutiny má rotační symetrii (čímž zde rozumíme, že složky rychlosti  $(u_r, u_\varphi, u_z)$  vzhledem k válcovým souřadnicím  $(r, \varphi, z)$  jsou nezávislé na úhlu  $\varphi$ ). Pak divergence je sumou pouze dvou členů a rovnice kontinuity tak může být splněna skalární funkcí  $\psi$ , ze které lze příslušné složky rychlosti získat derivací. Může se stát, že v některých takovýchto rychlostních polích je všude nulová úhlová složka rychlosti  $u_\varphi$ . Právě tato situace by nastala, pokud bychom měli pouze jeden prstenec v neviskózní nestlačitelné tekutině.

---

<sup>1</sup>Následující není matematicky rigorózní důkaz, ten lze nalézt v [5], kap. 16, 16.1.

Rovnice kontinuity za uvedených podmínek nabývá ve válcových souřadnicích tvaru<sup>1</sup>

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial(ru_r)}{\partial r} = 0, \quad (2.20)$$

což lze přepsat jako

$$\frac{\partial(ru_z)}{\partial z} = -\frac{\partial(ru_r)}{\partial r}. \quad (2.21)$$

Rovnici (2.21) lze chápat jako podmínku pro komutativnost derivací podle  $r$  a  $z$  určité funkce  $\psi(r, z)$ . Skutečně, položíme-li

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = ru_z, \quad \frac{\partial \psi}{\partial z} = -ru_r, \quad (2.22)$$

pak z podmínky  $\frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial z} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial z \partial r}$  dostáváme právě rovnici (2.21). Zároveň pro úplný diferenciál funkce  $\psi$  obdržíme z (2.22)

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial r} dr + \frac{\partial \psi}{\partial z} dz = ru_z dr - ru_r dz. \quad (2.23)$$

Neznámá funkce  $\psi(r, z, t)$  je tedy definována integrálem

$$\psi - \psi_0 = \int r(u_z dr - u_r dz), \quad (2.24)$$

kde křivkový integrál je počítán podle libovolné křivky v axiální rovině spojující zvolený referenční bod  $O$  s bodem  $P$  o souřadnicích  $(r, z)$  a  $\psi_0$  je hodnota  $\psi$  v bodě  $O$ .

Funkci  $\psi$  je možné interpretovat jako míru objemového toku plochou vytvořenou rotací křivky spojující  $O$  a  $P$  kolem osy symetrie. Tento tok je roven  $2\pi$  násobku pravé strany (2.24). Tok je považován za kladný, pokud teče proti směru hodinových ručiček kolem bodu  $P$ . Přes křivky v axiální rovině, na nichž je  $\psi$  konstantní, tedy nemůže proudit žádná tekutina a dané křivky tvoří *proudnice* toku. Proto je funkce  $\psi$  označována jako proudnicová funkce a v případě rotačně symetrické situace je spojována se jménem Stokes.

Jiná možná interpretace této funkce je, že jde o jedinou nenulovou složku vektorového potenciálu  $\mathbf{A}$  až na faktor  $\frac{1}{r}$ . Není těžké ukázat, že platí

$$\mathbf{u} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad \mathbf{A} = \left(0, \frac{\psi}{r}, 0\right). \quad (2.25)$$

## 2.6 Vírová čára

V mnohých případech můžeme charakterizovat rychlostní pole pomocí vířivosti, která je nenulová pouze v blízkém okolí určité křivky. Např. v případě osamocené vírové prstence je touto křivkou evidentně kružnice. Užitečnou matematickou idealizací v takových případech je následující představa. Uvažujme vírovou trubici o nenulovém průřezu a nenulové vířivosti uvnitř. Síla (tedy cirkulace) této trubice bude značena jako  $\kappa$ . Nechme průřez

<sup>1</sup>Podrobnější rozbor lze nalézt v [2], kap. 2, 2.2.

vírové trubice limitně přejít k nule za současného růstu vířivosti k nekonečnu takovým způsobem, aby síla vírové trubice byla stále  $\kappa$ . Takovýto útvar je nazýván vírová čára. Označme  $\delta l$  úsek této křivky ležící v elementu  $\delta V$ . Protože

$$\int_{\delta V} \omega dV = \kappa \delta l, \quad (2.26)$$

lze vztah (2.13) upravit na tvar

$$\mathbf{u} = -\frac{\kappa}{4\pi} \int_C \frac{\hat{\mathbf{r}} \times d\mathbf{l}(\mathbf{r}')}{r'^3}. \quad (2.27)$$

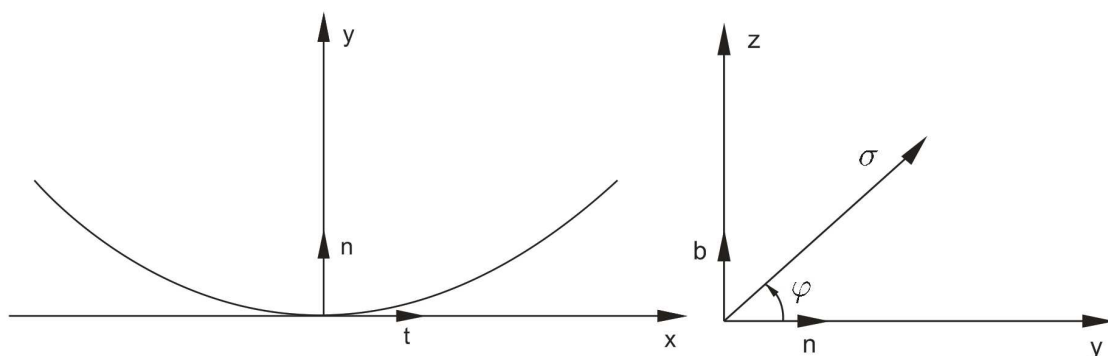
Analogický vztah v elektrodynamice se nazývá Biot-Savartův zákon.

V případě nekonečné dlouhé přímky je díky symetrii rychlost pouze v azimutálním směru. Její velikost je rovna

$$|\mathbf{u}| = \frac{\kappa r}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dl}{(r^2 + l^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\kappa}{2\pi r}. \quad (2.28)$$

## 2.7 Samoindukovaný pohyb vírové čáry

V předešlé sekci byl uveden koncept vírové čáry. Dříve bylo také přiblíženo, že vírové čáry sledují pohyb tekutiny. Další zajímavá otázka vzniká v případě zakřivené vírové čáry a změny jejího tvaru s časem. Uvažujme proto vírovou čáru o síle  $\kappa$  v tekutině rozprostírající se do nekonečna, kde je tekutina v klidu. Rychlostní rozdělení od vírové čáry je potom dáno vztahem (2.27). Pokusíme se vypočítat rychlost v bodech blízko vírové čáry. K tomuto účelu použijeme poněkud zjednodušeného konceptu<sup>1</sup> (obr. 2.1), totiž budeme uvažovat rychlost indukovanou samotnou vírovou čárou v bodě  $O$  pouze od určitého úseku, a to tak, že vírovou čáru v tomto úseku lze nahradit částí kružnice o křivosti  $c$ . Použijeme



Obrázek 2.1: Znázornění situace při výpočtu indukované rychlosti od vírové čáry

<sup>1</sup>následující rozbor přesně reprodukuje postup v [1], kap. 7, 7.1, kde je naznačeno sestavení integrálu a uveden jeho výsledek

kartézské souřadnice, s počátkem v bodě  $O$ , osou  $x$  ve směru tečném ( $\mathbf{t}$ ) k vírové čáře,  $y$  ve směru normálovém ( $\mathbf{n}$ ) a  $z$  ve směru binormálovém ( $\mathbf{b}$ ). Pro bod, ve kterém se zajímáme o rychlost, můžeme psát

$$\mathbf{r} = y\mathbf{n} + z\mathbf{b}, \quad (2.29)$$

bod tedy leží v rovině  $yz$  kolmé na vírovou čáru. Zajímá nás limitní poloha bodu, kdy  $\sigma = \sqrt{(y^2 + z^2)} \rightarrow 0$ . Pro určitý rozsah vzdálenosti  $l$  podél vírové čáry, řekněme  $-L \leq l \leq L$ , je polohový vektor  $\mathbf{r}'$  bodu na vírové čáře dán přibližně výrazem

$$\mathbf{r}' \approx l\mathbf{t} + \frac{1}{2}cl^2\mathbf{n}. \quad (2.30)$$

Tedy, blízko bodu  $O$

$$\delta\mathbf{l}(\mathbf{r}') \approx (\mathbf{t} + cl\mathbf{n})\delta l, \quad (2.31)$$

dále můžeme psát

$$\frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \times \delta\mathbf{l}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \approx \frac{-zcl\mathbf{t} + z\mathbf{n} - (y + \frac{1}{2}cl^2)\mathbf{b}}{\{y^2 + z^2 + l^2(1 - yc) + \frac{1}{4}c^2l^4\}^{\frac{3}{2}}}\delta l. \quad (2.32)$$

Příspěvek k rychlosti v bodě  $(0, y, z)$  nebo  $(0, \sigma \cos \varphi, \sigma \sin \varphi)$ , od zmiňovaného úseku vírové čáry je tedy přibližně

$$\frac{\kappa}{4\pi} \int_{-\frac{L}{\sigma}}^{\frac{L}{\sigma}} \frac{(\mathbf{b} \cos \varphi - \mathbf{n} \sin \varphi)\sigma^{-1} + \frac{1}{2}cm^2\mathbf{b}}{[1 + m^2(1 - c\sigma \cos \varphi) + \frac{1}{4}c^2\sigma^2m^4]^{\frac{3}{2}}} dm, \quad (2.33)$$

kde  $m = \frac{l}{\sigma}$ . Pro  $\sigma \rightarrow 0$  se jmenovatel integrandu blíží k  $(1 + m^2)^{3/2}$ . Integrál tedy nabývá tvaru

$$\begin{aligned} \frac{\kappa}{4\pi} \int_{-\frac{L}{\sigma}}^{\frac{L}{\sigma}} \frac{(\mathbf{b} \cos \varphi - \mathbf{n} \sin \varphi)\sigma^{-1} + \frac{1}{2}cm^2\mathbf{b}}{(1 + m^2)^{\frac{3}{2}}} dm &= \frac{\kappa}{4\pi\sigma} (\mathbf{b} \cos \varphi - \mathbf{n} \sin \varphi) \left[ \frac{m}{\sqrt{1 + m^2}} \right]_{-\frac{L}{\sigma}}^{\frac{L}{\sigma}} + \\ &+ \frac{\kappa c}{8\pi} \mathbf{b} \left[ \frac{-m}{\sqrt{1 + m^2}} + \ln(m + \sqrt{m^2 + 1}) \right]_{-\frac{L}{\sigma}}^{\frac{L}{\sigma}}, \end{aligned} \quad (2.34)$$

po dosazení integračních mezí, rozvoji v Taylorovu řadu a malé úpravě dospíváme k výsledku v asymptotickém tvaru

$$\frac{\kappa}{2\pi\sigma} (\mathbf{b} \cos \varphi - \mathbf{n} \sin \varphi) + \frac{\kappa c}{4\pi} \mathbf{b} \ln\left(\frac{L}{\sigma}\right) - \frac{\kappa c}{4\pi} \mathbf{b} (\ln 2 - 1). \quad (2.35)$$

První člen v (2.35) představuje očekávaný oběžný pohyb kolem vírové čáry. Tato závislost v limitním případě dominuje nad ostatními členy, neboť se mění jako  $\sigma^{-1}$ , nevede však k přemísťování vírové čáry samotné. Zajímavější je druhý člen, který poukazuje na fakt, že je zde další slabší singularita spojená s lokální křivostí vírové čáry. Je vidět, že rychlost tekutiny v blízkosti bodu  $O$  má rychlost ve směru binormály, jejíž velikost se mění jako  $\ln(\sigma^{-1})$ . Tomuto zajímavému výsledku se budeme dále věnovat později. Zbývající člen je zanedbatelný oproti prvním dvěma, jelikož je řádu  $\sigma^0$ .

Dalším zajímavým důsledkem vztahu (2.35) je fakt, že ideální vírová čára se pohybuje a mění svůj tvar v důsledku lokálního zakřivení nekonečnou rychlostí. Je to důsledek teoretického konceptu vírové čáry, kterým pro jednoduchost nahrazujeme skutečné vírové trubice. Ty se samozřejmě pohybují konečnou rychlostí.

## 2.8 Kruhové vírové čáry

Předpokládejme, že všechny vírové čáry v tekutině, která se rozprostírá do nekonečna a kde je v klidu, jsou kruhové a mají společnou osu symetrie, kterou ztotožníme s osou  $z$ . Použijeme válcové souřadnice  $(r, \varphi, z)$ , rychlost tekutiny předpokládejme  $\mathbf{u} = (u_r, 0, u_z)$ , tedy nerealizuje se pohyb tekutiny ve směru  $\varphi$ . Vektorová pole  $\boldsymbol{\omega}$  i  $\mathbf{A}$  mají naopak nenulové složky jen ve směru  $\varphi$ . Celý pohyb lze za těchto podmínek popsat pomocí proudnicové funkce  $\psi$ . Můžeme psát ([1], kap. 7, &161)

$$\psi(r, z) = r|\mathbf{A}| = \frac{r}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} \frac{\omega(r', z')}{s} r' \cos \theta \, dz' dr' d\theta', \quad (2.36)$$

kde

$$\omega = |\boldsymbol{\omega}|, \quad \theta = \varphi' - \varphi, \quad s^2 = (z - z')^2 + r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta. \quad (2.37)$$

Tento výraz lze upravit na přehlednější formu v případě jediné kruhové čáry poloměru  $a$  a síly  $\kappa$ , umístěné v rovině  $z = 0$ , dostáváme

$$\psi(r, z) = \frac{\kappa ar}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta \, d\theta}{\sqrt{z^2 + r^2 + a^2 - 2ar \cos \theta}}. \quad (2.38)$$

Označíme-li  $r_1$ , resp.  $r_2$  jako nejkratší, resp. největší vzdálenost bodu, ve kterém počítáme  $\psi$  od vírové čáry, tedy

$$r_1^2 = (z - z')^2 + (r - r')^2, \quad r_2^2 = (z - z')^2 + (r + r')^2, \quad (2.39)$$

lze psát

$$s^2 = r_1^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} + r_2^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}, \quad 4rr' \cos \theta = r_1^2 + r_2^2 - 2s^2. \quad (2.40)$$

S využitím (2.40), lze (2.38) upravit na tvar

$$\begin{aligned} \psi(r, z) &= \frac{\kappa \sqrt{ar}}{4\pi} \int_0^{\pi} \left[ \left( \frac{2}{k} - k \right) \left( 1 - k^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \right)^{-\frac{1}{2}} - \frac{2}{k} \left( 1 - k^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \right] d\theta \\ &= \frac{\kappa \sqrt{ar}}{2\pi} \left[ \left( \frac{2}{k} - k \right) K(k) - \frac{2}{k} E(k) \right], \end{aligned} \quad (2.41)$$

kde

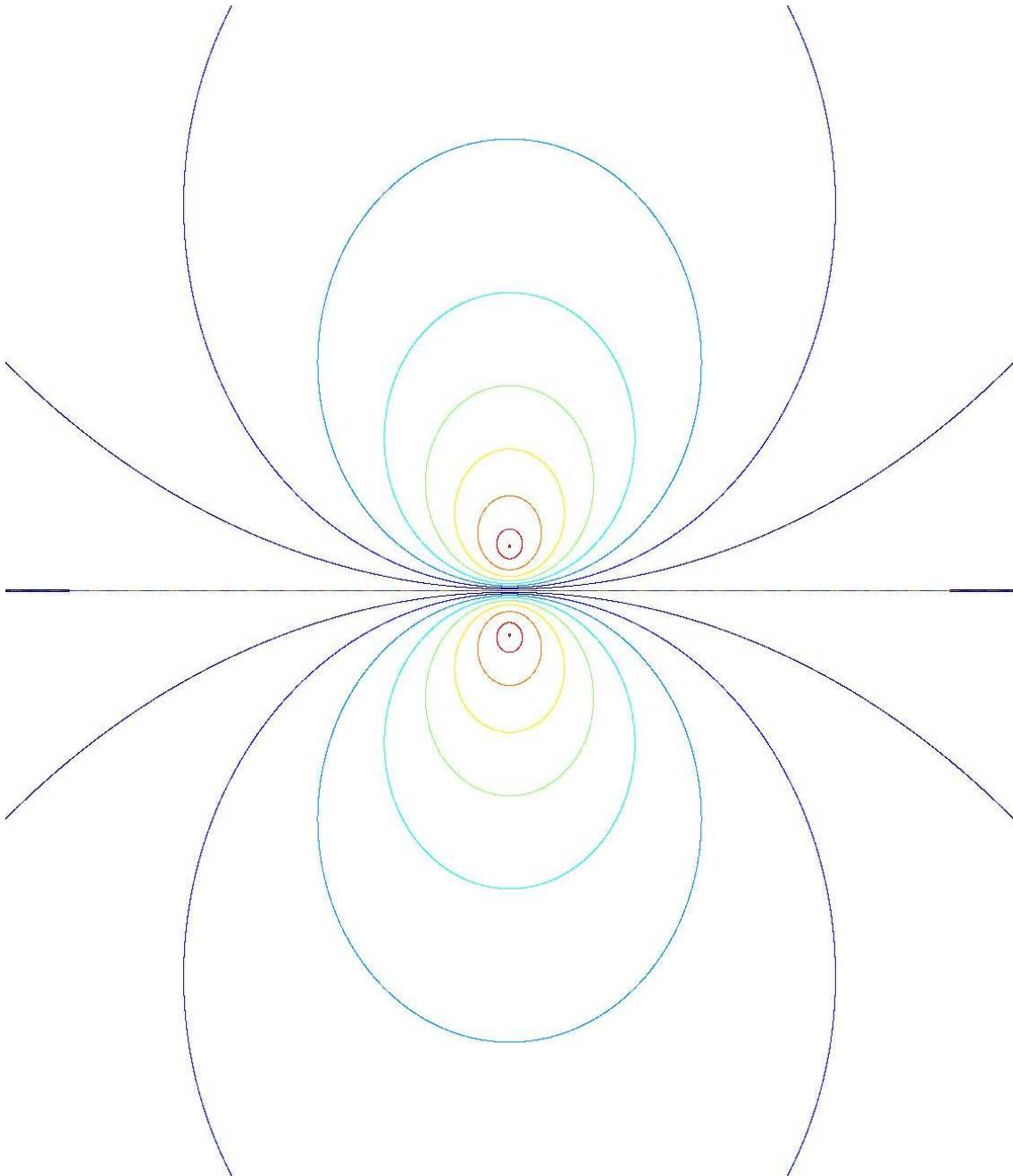
$$k^2 = 1 - \frac{r_1^2}{r_2^2} = \frac{4ar}{z^2 + (r + a)^2}, \quad (2.42)$$

výrazy  $K(k)$ , resp.  $E(k)$  jsou úplné eliptické integrály prvního, resp. druhého druhu, které jsou definovány vztahy

$$K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi}}, \quad E(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi} \, d\phi, \quad (2.43)$$

pro něž jsou numerické hodnoty známy.

Jak bylo již řečeno, křivky, na nichž je  $\psi$  konstantní, jsou proudnice toku. Na další straně jsem vyobrazil proudnice v rovině řezu prstencem, která obsahuje osu symetrie (černá vodorovná přímka).



Obrázek 2.2: Znázornění proudnic v rovině řezu vírovým prstencem obsahující osu symetrie (černá vodorovná přímka).

## 2.9 Translační pohyb vírového prstence

---

V této sekci se pokusíme interpretovat několik zajímavých poznatků o translačním pohybu vírového prstence<sup>1</sup>. Je-li prstenec vzdálen od místa svého vzniku, pohybuje se přibližně konstantní rychlostí. Samozřejmě pohyb je vždy tlumen kvůli difuzi vířivosti z vírové trubice do okolní tekutiny. Můžeme pouze usuzovat, že by pohyb byl rovnoměrný v neviskózní tekutině. Ze vztahu (2.35) není těžké ukázat, že kruhová vírová čára se pohybuje ve směru své osy symetrie, i když je tato rychlost nekonečná. Bohužel přesná matematická formulace pohybu vírového prstence při uvažování konkrétního tvaru vírové trubice je velmi komplikovaná, nehledě na fakt, že není známo rozložení vířivosti přes průřez trubice. Nicméně, pokud je průřez trubice malý, můžeme tvrdit, že křivka ohraničující průřez vírové trubice je proudnicí. Dále lze usuzovat, že tato křivka je přibližně kruhová, pokud je cirkulační pohyb v blízkosti vírové trubice dominantní.

Druhý člen ve vztahu (2.35) úzce souvisí s pohybem vírového prstence kvůli zakřivení vírové trubice. U kruhové trubice je samozřejmě křivost všude stejná. Je-li navíc vířivost rozložena v průřezu této trubice přibližně rovnoměrně a pokud je křivka ohraničující tento průřez kružnicí o malém poloměru  $\epsilon$ , můžeme usuzovat, že odhad velikosti rychlosti takového prstence ( $\frac{a}{\epsilon} \gg 1$ ) bude tvaru

$$\frac{\kappa}{4\pi a} \ln\left(\frac{a}{\epsilon}\right), \quad (2.44)$$

kde  $a = c^{-1}$  je poloměr prstence. Vidíme tedy, že rychlost při stejné cirkulaci kolem vírové čáry je větší pro prstence menšího poloměru.

Určitější výraz pro rychlost vírového prstence uvedl roku 1867 Kelvin. Za podobných předpokladů jako výše, avšak integrací přes vírovou trubici a pomocí proudnicové funkce vírového prstence ukázal<sup>2</sup>, že rychlost je dána výrazem

$$\frac{\kappa}{4\pi a} \left[ \ln\left(\frac{8a}{\epsilon}\right) - \frac{1}{4} \right]. \quad (2.45)$$

Odvození toho vztahu lze nalézt např. v [1], kap. 8, & 163.

## 2.10 Vzájemná interakce dvou vírových prstenců

---

Vírové prstence umístěné blízko sebe mohou navzájem interagovat zajímavým způsobem. Zde se pokusím přiblížit spíše kvalitativní formou některé aspekty takových interakcí<sup>3</sup>. Skutečné vírové trubice zde budeme idealizovat vírovými čárami, jak je vysvětleno v sekci

---

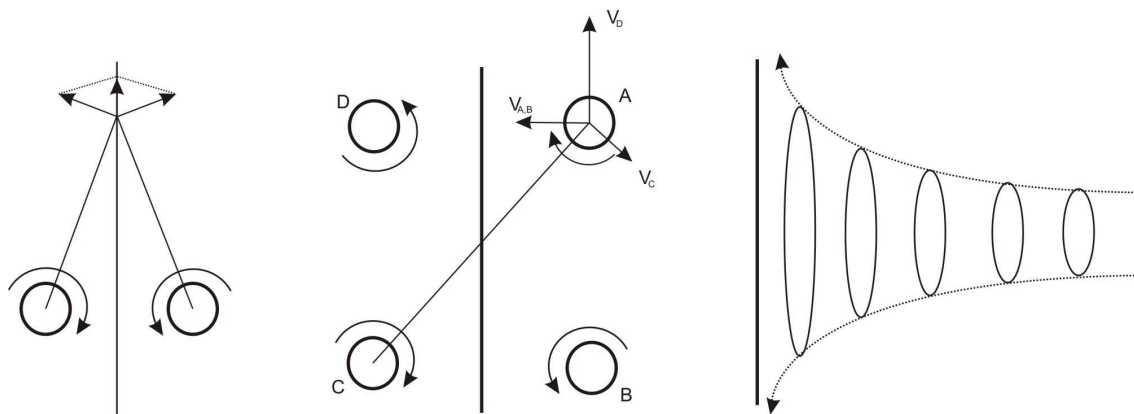
<sup>1</sup>Argumenty uvedené níže jsou povětšinou přebrány z [1], kap. 7, oddíl 7.2, případně z [3], kap. 3. Odvození závislosti stejného tvaru jako (2.44) lze nalézt také v [1], kap. 8, & 163, které však vychází z rozvoje eliptických integrálů (2.41) v blízkosti vírové trubice prstence a úvah o jeho kinetické energii a hybnosti.

<sup>2</sup>Tento výsledek uvedl bez důkazu v dodatku k překladu Helmholtzova článku, *Phil. Mag.* (4), xxxiii. 511 (1867) [*Papers*, iv. 67]

<sup>3</sup>Podobné úvahy o interakcích mezi prstenci jsou popsány v [3], kap. 4 nebo v [4], kap.5.

2.6. Důležitým vodítkem bude Helmholtzův teorém, který říká, že vírové čáry sledují pohyb kapaliny.

Prvně prozkoumáme dopad vírového prstence na zeď, která je rovnoběžná s rovinou prstence. Podmínkou pro tekutinu blízko stěny je nulovost normálové složky rychlosti tekutiny. To lze splnit metodou zrcadlení. Představme si druhý imaginární prsteneček na opačné straně stěny, který má stejnou velikost cirkulace, ale opačný směr. Prstence se tedy pohybují proti sobě a dále předpokládejme, že jejich vzdálenost od stěny je stejná. Na obr. 2.3 je znázorněna tato interakce. Na obrázku vlevo je naznačeno, že rychlost tekutiny blízko stěny bude



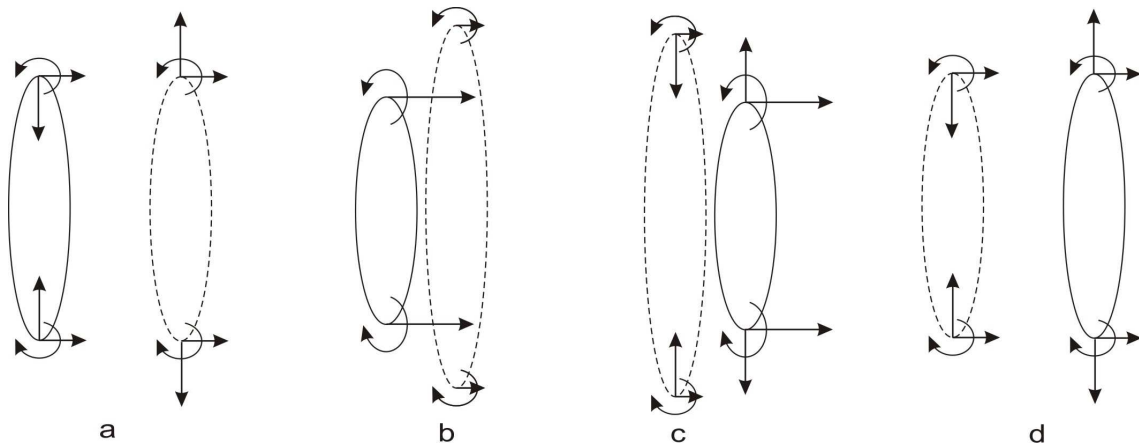
Obrázek 2.3: Dopad vírového prstence na stěnu

mít nenulovou složku rychlosti pouze v tečném směru vůči zdi. Jedná se o průřez rovinou symetrie obou prstenců, černá svislá čára představuje stěnu. Znázorněny jsou pouze dva průřezy prstencem a jejich rychlostní působení blízko zdi. Díky symetrii situace si však můžeme představit podobnou úvahu v kterémkoli bodě na stěně i od všech elementů obou prstenců.

Obrázek uprostřed poukazuje na vzájemné ovlivnění pohybu prstenců navzájem. Pro jednoduchost uvažujme pouze rychlostní působení na horní element pravého prstence. Rychlost  $V_A$  je způsobena indukovanou rychlostí samotného elementu díky lokální křivosti, stejný směr má i působení spodního elementu tohoto prstence. Rychlost od elementu  $D$  brzdí a zmenšuje poloměr pravého prstence. Poslední příspěvek urychluje element  $A$  svisle nahoru. Jak se budou prstence k sobě přibližovat, působení od elementu  $C$  bude přibližně stejné, zatímco působení od elementu  $D$  se bude rychle zvětšovat především pro malé vzdálenosti mezi elementy  $A$  a  $D$ . Pro malé vzdálenosti mezi prstenci tedy vidíme, že se budou zvětšovat jejich poloměry. V důsledku toho se bude snižovat jejich rychlost. Změna velikosti pouze skutečného prstence dopadajícího na stěnu je naznačena na pravém obrázku.

Jako druhou vzájemnou interakcí mezi dvěma vírovými prstenci se budeme zabývat dvěma prstenci stejné velikosti i směru cirkulace se stejnou osou symetrie. Tato situace je schématicky znázorněna na obrázku 2.4. Na obr. a vznikají všechny vodorovné rychlostní příspěvky ve vrcholech prstenců kvůli lokální křivosti samotných elementů. Dále jsou na obrázku vyznačeny příspěvky mezi horními a spodními elementy na vrcholcích prstenců. Je vidět, že zadní prsteneček zvětšuje poloměr předního a naopak. V důsledku toho se přední prsteneček zpomaluje a zadní zrychluje, jak je naznačeno na obrázku b. Může se stát, že zadní



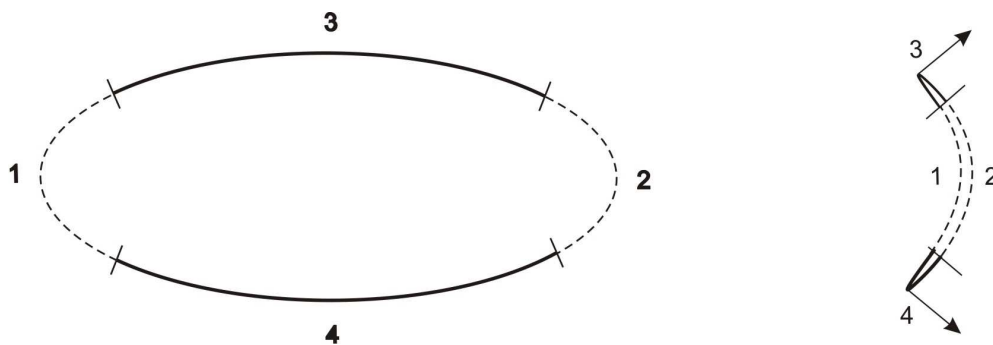


Obrázek 2.4: Vzájemná interakce dvou souběžných vírových prstenců

prsteneček prolétne předním a silové působení prstenců se změní (obr. c). Zadní prsteneček pak způsobuje zvětšování předního a naopak. Na obr. d je znázorněna výměna původních poloh prstenců, celý pohyb se může opakovat. Teoreticky by se v zcela neviskózní tekutině pohyb nebyl nijak tlumen difúzí vířivosti a můžeme předpokládat, že by výše popsaná situace opakovala do nekonečna.

## 2.11 Kmity eliptických prstenců

V této části se pokusíme opět spíše kvalitativním způsobem naznačit, proč a jakým způsobem kmitají eliptické vírové prstence. Nejdůležitějším vodítkem je v tomto případě fakt, že samoindukovaná rychlost prstence vzniká v důsledku jeho lokální křivosti a má binormální směr, viz druhý člen ve vztahu (2.35). Eliptické prstence lze generovat jednoduše tak, že místo kruhového otvoru, o který se utvoří prsteneček, použijeme eliptický. Vzniklý prsteneček je tedy ihned po svém zformování eliptického tvaru, viz obrázek 2.5 vlevo. V důsledku větší



Obrázek 2.5: Kmity eliptického vírového prstence

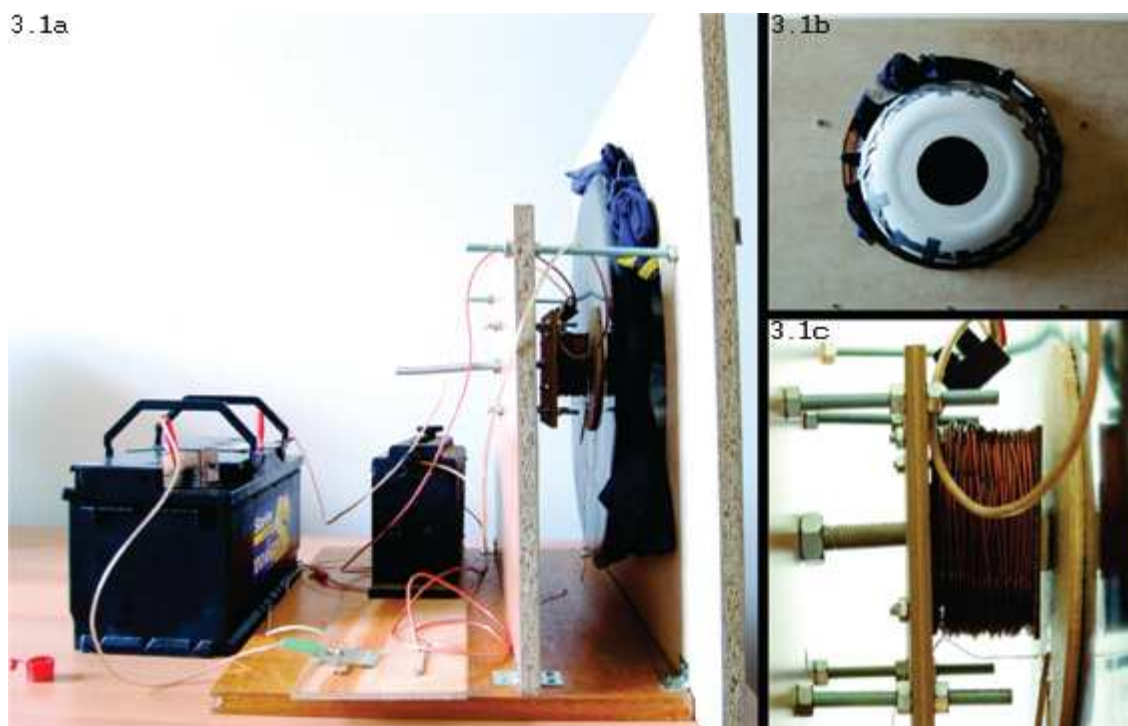
křivosti v úsecích označených 1 a 2 (vyznačeny čárkovanou čarou) zde vzniká větší indukovaná rychlost než v segmentech 3 a 4. Takové rozložení rychlostního pole podél prstence má za následek změnu tvaru z původně rovinné elipsy do deformovaného prostorového

útvary. Úseky 1 a 2 předbíhají úseky 3 a 4, při troše představivosti můžeme vidět (situaci jsem se pokusil znázornit na pravém obrázku, jedná se o pohled z boku), že vzniká nové zakřivení, právě kvůli trojrozměrnosti prstence. Rychlost indukovaná touto novou křivostí působí především na úseky 3 a 4, které urychluje směrem naznačeným na obrázku vpravo a zmenšuje tak křivost segmentů 1 a 2. Zároveň tato rychlost tlačí prstenec zpět do rovinného eliptického útvaru, jakým byl na začátku, elipsa však vypadá jako otočená o  $90^\circ$ . Naznačená situace se periodicky opakuje a prstenec takovým způsobem kmitá při svém pohybu prostorem.

# 3

## Experimentální zařízení

Od samého počátku této práce jsem řešil problém, jak generovat reprodukovatelně vírové prstence. Po několika návrzích a jejich prodiskutování se jako nejschůdnější možností jeví využití magnetu a cívky. Jak je známo, na dipól působí gradient pole. Pokud tedy zpola vložíme magnet do dutiny cívky a sepneme proud, magnet odskočí díky nehomogenitě magnetického pole cívky. Po několika pokusech se starými cívkami vše vypadalo realizovatelně. Byl proveden elementární matematický rozbor dané situace, který zde nebudu uvádět. Ukazuje se, že k docílení co největšího mg. pole je zapotřebí co nejsilnější drát. Použil jsem měděný lakovaný drát o průměru 1,48 mm. Kostru cívky jsem vyrobil ze sklolaminátu, poté cívku ručně navinul. Samotný přístroj je znázorněn na obr.3.1. Obrázek 3.1a zachycuje cel-



Obrázek 3.1: Generátor vírových prstenců

kový pohled z boku. Základem pro uchycení přístroje jsou dvě svislé rovnoběžné desky. Do přední desky je vyříznut kruhový otvor, ve kterém je umístěno umělohmotné umy-

vadlo. Přes otevřenou stranu umyvadla je natažená pružná gumová membrána a v jeho dně je kruhový otvor, o který se utváří prstence. Detail je na obrázku 3.1b. Magnet je pro zlepšení přenosu hybnosti přilepen ke kruhové destičce a ta je přilepena k membráně. Magnet je polovinou své délky zapuštěn v dutině cívky. Detail je na obrázku 3.1c. Jak je vidět, cívka je rovněž přišroubována k dřevěné destičce a čtyřmi šrouby připevněna k druhé svislé desce. Hloubka zapuštění magnetu v cívce je tedy měnitelná. Ve středu dutiny cívky je šroub z nemagnetického materiálu zakončený matkou z magnetického materiálu. Tento šroub dosahuje přibližně do poloviny délky dutiny cívky a slouží k tomu, že se magnet po elektrickém impulzu a jeho vychýlení zpět přitáhne k matce uprostřed cívky a nedokmitává volně na membráně. Tento volný pohyb by způsoboval vznik dalších nechtěných vírových prstenců. Celý obvod byl napájen z 12 V autobaterie. V obvodu je dále zapojen reostat, díky němu je možno měnit proud v obvodu a regulovat tak velikost impulzu magnetu. Před reostatem je vidět spínací zařízení, kterým byl spínán obvod.

Vírové prstence ve vodě byly vytvářeny pouze ručně pomocí plastového obalu od sapónátu. Do vody v akváriu jsem přidal mycí prostředek a voda se na povrchu napěnila. Pěnu jsem nabral do lahve společně s vodou. Stiskem obou stran lahve ponořené svisle do vody se u hrdla formoval vodní vírový prstenec, který díky sníženému tlaku v důsledku rotace nasál do své trubice i pěnu. Díky tomu byl prstenec viditelný.

# 4

## Experimenty

Po prostudování dostupné literatury a navržení teoretických modelů, které jsem popsal na konci druhé kapitoly, jsem přistoupil k jejich experimentálnímu potvrzení. Mým hlavním úkolem bylo především potvrdit nebo případně vyvrátit teoretické predikce. Úsilí bylo tedy zaměřeno na zjištění experimentálního postupu, jakým by bylo možné vytvořit dva stejně rychlé prstence těsně za sebou. Bylo jasné, že tento experiment se bude provádět s kouřovými prstenci, jelikož jsem schopen je v tomto prostředí reprodukovatelně vytvářet. Dopad prstence na stěnu je experimentálně snadno proveditelný, a proto pro tento pokus byly vybrány vodní prstence.

Obsahem této kapitoly bude měření rychlostí vírových prstenců v závislosti na jejich poloměru a několik snímků získaných při prokmitávání prstenců laserem. Tyto fotografie nabízí jistý pohled na uspořádání kouře ve vírové trubici i způsob cirkulace kouře kolem vírového prstence.

Během těchto experimentů jsem narazil na mnoho dalších, snad ještě zajímavějších jevů a vlastností vykazovaných prstenci. Jako příklad bude v této kapitole uvedeno spojování vírových trubíc dvou prstenců, odraz prstence od vodní hladiny a opětovné formování vírového prstence po narušení jeho struktury. Další zajímavou vlastností jsou kmity eliptických prstenců, o kterých jsem věděl hned od počátku. Nicméně jsem se domníval, že tyto kmity se odehrávají pouze v rovině. Až při pokusech se ukázalo, že tomu tak není. I tento fakt zde bude demonstrován.

Na tomto místě bych chtěl uvést ještě souhrný komentář k některým experimentům. Pokud se v této kapitole objeví obrázek složený z více snímků jdoucích po sobě, jedná se o pokus znázornit průběh některého jevu. Snímky mají v pravém dolním rohu číslo odpovídající pořadí snímku vzhledem k prvnímu. Kamera, kterou byly obrázky pořízeny měla vzorkovací frekvenci 25 Hz. Číslem 25 je tedy označen snímek zaznamenaný 1 sekundu po začátku znázorňovaného děje. Jednotlivé snímky mapují vždy přibližně stejné místo. U velmi rychlých prstenců vzniká na snímcích jejich rozdvojení, kamera je nestihla zaznamenat přesně.

## 4.1 Rychlost vírového prstence

Ihned po objevení vztahu (2.45) vznikla otázka, zda-li by tento vzorec nešel ověřit experimentálně. Bohužel v tomto vztahu vystupuje cirkulace kolem vírové trubice prstence  $\kappa$ . Tuto veličinu by bylo možné určit například interferencí ultrazvukových vln (Aharon-Bohmův jev). Toto měření však bylo zcela mimo naše experimentální možnosti. Další neznámou veličinou je poloměr průřezu vírové trubice  $\epsilon$ , který by v principu zřejmě bylo možné určit například prokmitáváním prstence laserem a nafocením (viz dále). Měření by zřejmě bylo zatíženo velkou chybou, ovšem vzhledem k nemožnosti určit cirkulaci se toto měření stejně nemohlo realizovat. Nicméně jak bylo ukázáno v teoretické části, translační rychlost vírového prstence (se stále stejnou cirkulací!) roste s klesajícím poloměrem. Toto tvrzení nám poskytlo možnost k experimentálnímu ověření.

Uspořádání experimentu tedy bylo následující. Asi 5 m proti přístroji na generaci vírových prstenců byl ve stejné výšce umístěn stroboskop, jehož frekvence byla nastavena na 4 Hz. Vše bylo zaznamenáváno digitálním fotoaparátem zboku ze vzdálenosti přibližně 6 m. Doba expozice byla 3 – 6 s podle poloměru prstence. Vyrobil jsem nástavce o poloměrech 6, 5, 4, 3 a 2 cm z tvrdé plastové folie a okraje zabrousil tak, aby byly hladké a zaoblené. Vzdálenosti jednotlivých poloh zachycení prstence jsem určoval v programu Gimp, na stěně byly vyznačeny vzdálenosti 0,5 m, z nichž jsem určil vzdálenost, která odpovídá jednomu pixelu na fotografii (1 pix = 1,748 mm). Pro každý nástavec jsem vyfotil přibližně 10 snímků. Rychlost byla určována ve vzdálenosti 1 m po vzniku prstence pro všechny poloměry. Bohužel se při zpracování ukázalo, že skoro polovina fotek je nepoužitelná, protože prstenec většinou hned po svém vzniku byl odchýlen buď proudem vzduchu v místnosti, nebo o jiný prstenec, který byl v prostoru od minulého měření. Proto je k dispozici pouze málo hodnot k určení rychlosti a měření je tedy nepřesné. Níže jsou uvedeny příklady fotek, z nichž jsem určoval rychlosti, následují tabulky, v nichž jsou výsledky mého měření. Pro poloměr  $r = 2$  cm zcela chybí údaje, prstence už byly tak rychlé, že se je nepodařilo zachytit fotoaparátem.

Grafy na obrázcích 4.5 a 4.6 odpovídají vývoji rychlosti mezi jednotlivými zachycenými polohami prstence. První graf je určen z obrázku 4.1, tedy pro poloměr prstence 6 cm, druhý graf je určen z obr 4.4, poloměr 3 cm.



Obrázek 4.1: Poloměr prstence  $r = 6$  cm



Obrázek 4.2: Poloměr prstence  $r = 5$  cm



Obrázek 4.3: Poloměr prstence  $r = 4$  cm



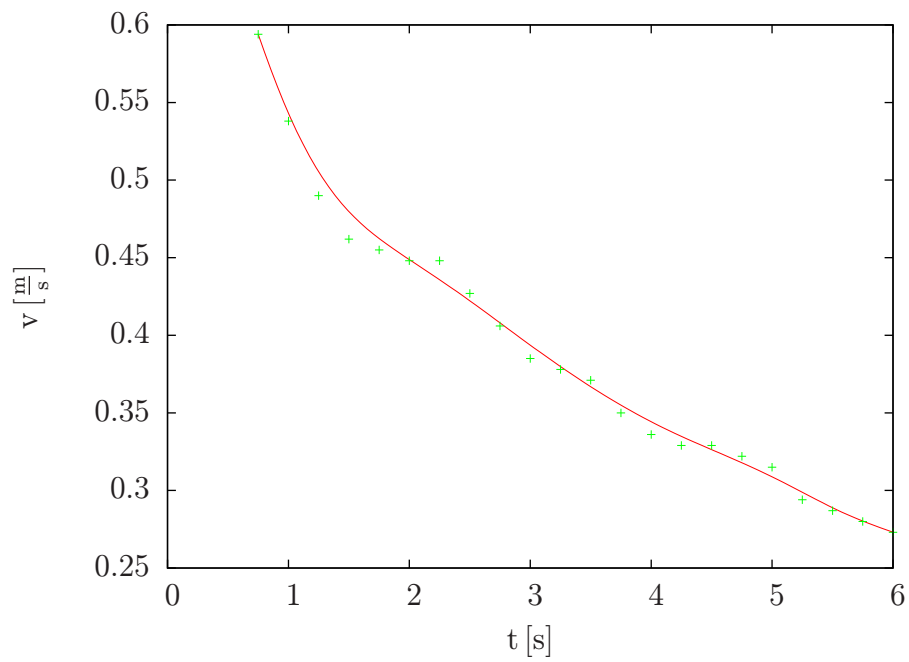
Obrázek 4.4: Poloměr prstence  $r = 3$  cm

Tabulka 4.1: Rychlost vírových prstenců

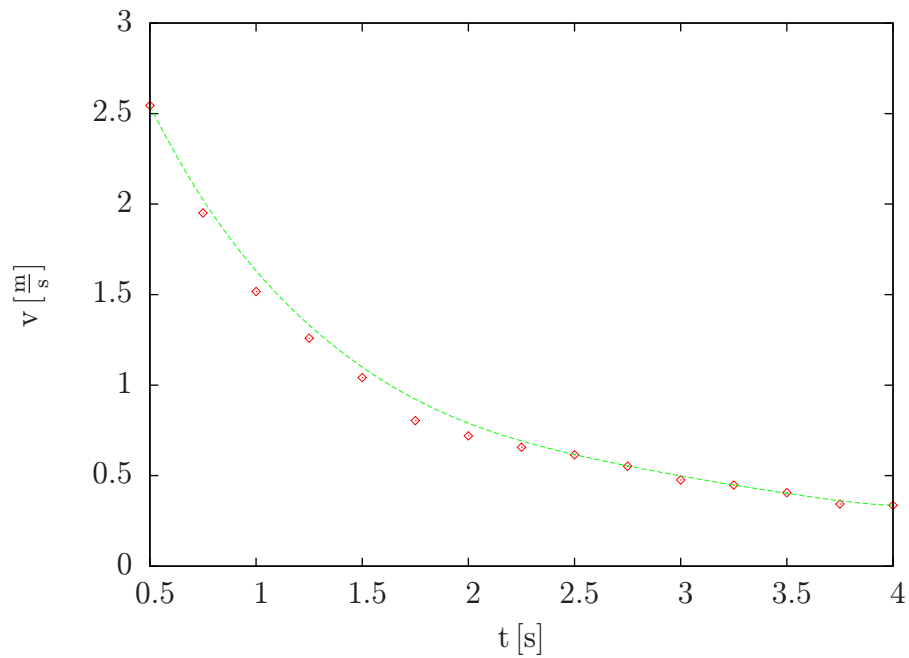
6 cm		5 cm		4 cm		3 cm	
pixely	$v [\frac{m}{s}]$	pixely	$v [\frac{m}{s}]$	pixely	$v [\frac{m}{s}]$	pixely	$v [\frac{m}{s}]$
63	0,441	112	0,783	233	1,629	276	1,930
65	0,454	107	0,748	225	1,573	275	1,923
64	0,448	109	0,762	232	1,622	256	1,790
		109	0,762	220	1,538	253	1,769
		104	0,727			256	1,790

Tabulka 4.2: Výsledky měření

$r$ [cm]	$v [\frac{m}{s}]$
6	$0,448 \pm 0,005$
5	$0,756 \pm 0,011$
4	$1,591 \pm 0,026$
3	$1,840 \pm 0,040$



Obrázek 4.5: Graf vývoje rychlosti prstence poloměru 6 cm



Obrázek 4.6: Graf vývoje rychlosti prstence poloměru 3 cm



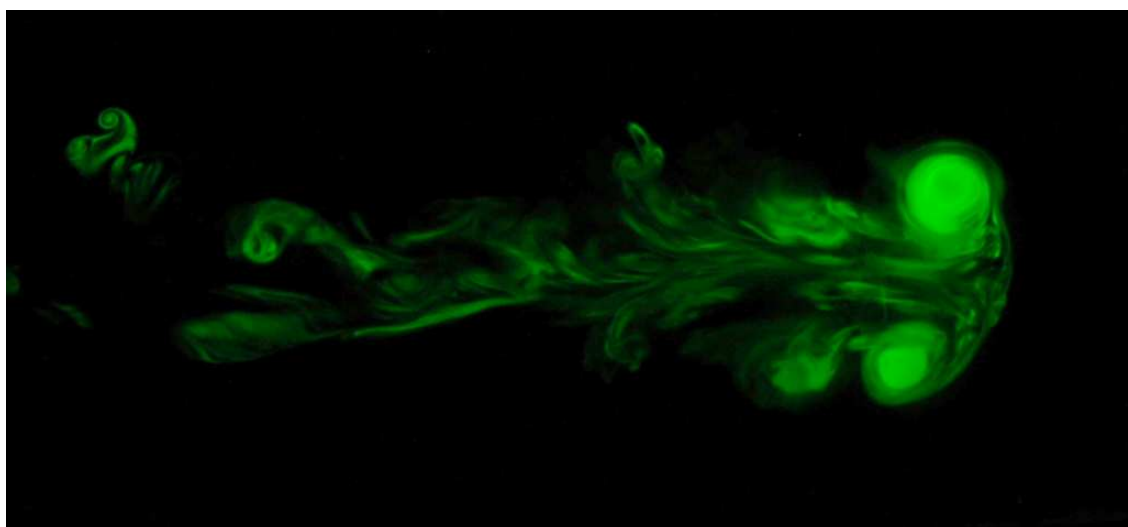
Z grafů je vidět, že rychlost prstence zpočátku klesá velmi rychle, v pozdější fázi klesá přibližně lineárně. Grafem 4.6 lze proložit exponenciálu jak je naznačeno zelenou křivkou, graf 4.5 však exponenciálou dobře nenafitujem. Červená křivka na tomto grafu je pouze pro zvýšení přehlednosti (jedná se o plynem vysokého řádu).

Nepříjemným faktem, který znehodnocuje relevantnost celého měření, je teoretický požadavek stejné cirkulace kolem vírové trubice prstence pro různé poloměry. Cirkulace bude zřejmě úzce souviset s formováním prstence a množstvím kouře jím neseného ve vírové trubici. Bohužel tyto informace zcela chybí a je velmi těžké je alespoň odhadnout. Jistou představu však měření o rychlostech prstenců přesto nabízí.

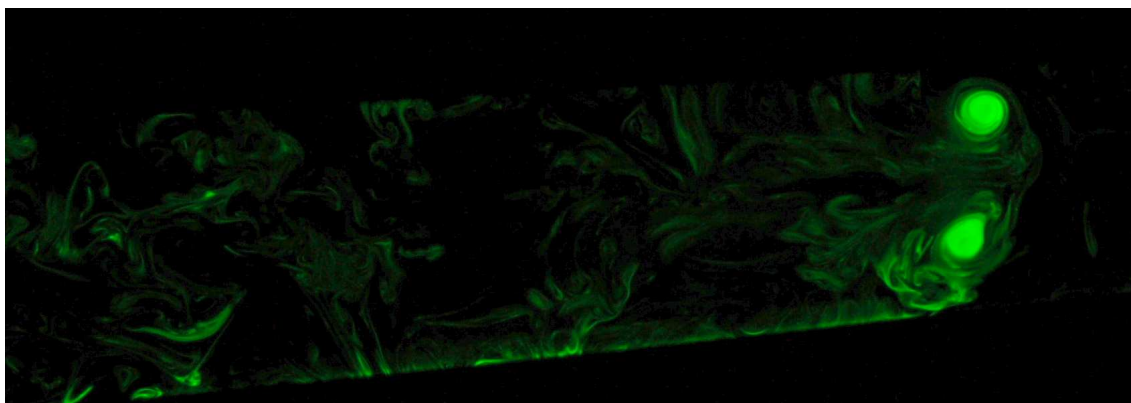
## 4.2 Prokmitávání vírové trubice laserem

---

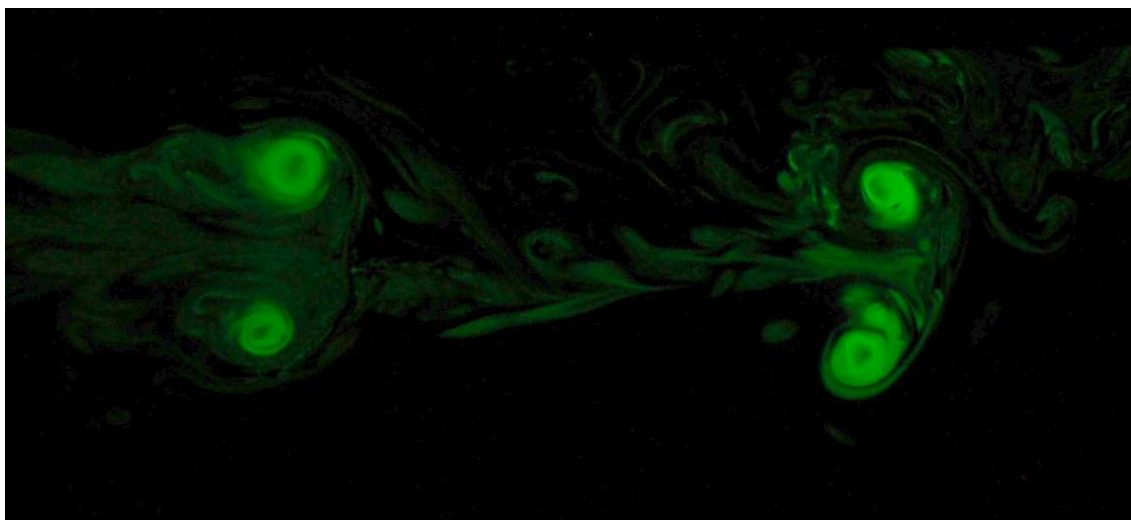
Jedním ze způsobů, jak zachytit strukturu vírové trubice i způsob rotace kouře kolem vírového prstence, je prokmitávání laserem. Vzniklý efekt je více než fascinující. Na obrázcích 4.7 a 4.8 je zachyceno právě takové prokmitnutí. Podařilo se dokonce zachytit dva prstence za sebou, což je na obr. 4.9. Můžeme vidět, že prstenec si s sebou nese velké množství kouře, což je patrné především z obr. 4.8. Prstenec při pohybu prostorem postupně ztrácí kouř kvůli difuzi vířivosti do okolí. To je dobře vidět na obr. 4.7. Průřez vírové trubice je, jak si můžeme všimnout, téměř kruhový, u rychlejších prstenců jsou průřezy však eliptické. Bohužel zachytit prokmitnutí rychlého prstence na fotografii je velmi obtížné a žádný vhodný snímek se mi nepodařilo pořídit.



Obrázek 4.7: Prokmitnutí vírového prstence laserem



Obrázek 4.8: Vírový prstenec z větší vzdálenosti



Obrázek 4.9: Dva vírové prstence

### 4.3 Dopad vírového prstence na stěnu

---

Na konci druhé kapitoly byl uveden teoretický rozbor situace dopadu vírového prstence na stěnu. Na obr. 4.10 je znázorněna právě tato situace. Jedná se o pohled z boku. Celý děj trvá přibližně 1,4 s. Dole na snímcích je přiloženo pásmo na určení vzdáleností, bohužel na obrázcích nepůjde zřejmě rozpoznat. Nicméně číselné údaje jsou uvedeny v tabulce 4.3. Tyto hodnoty jsem opět určoval podle počtu pixelů v programu Gimp, tyto údaje jsou pouze přibližné. Zkoušel jsem graficky znázornit závislost poloměru prstence na čase, graf však nevykazoval žádnou zřejmou závislost, a proto ho zde ani neuvádím.

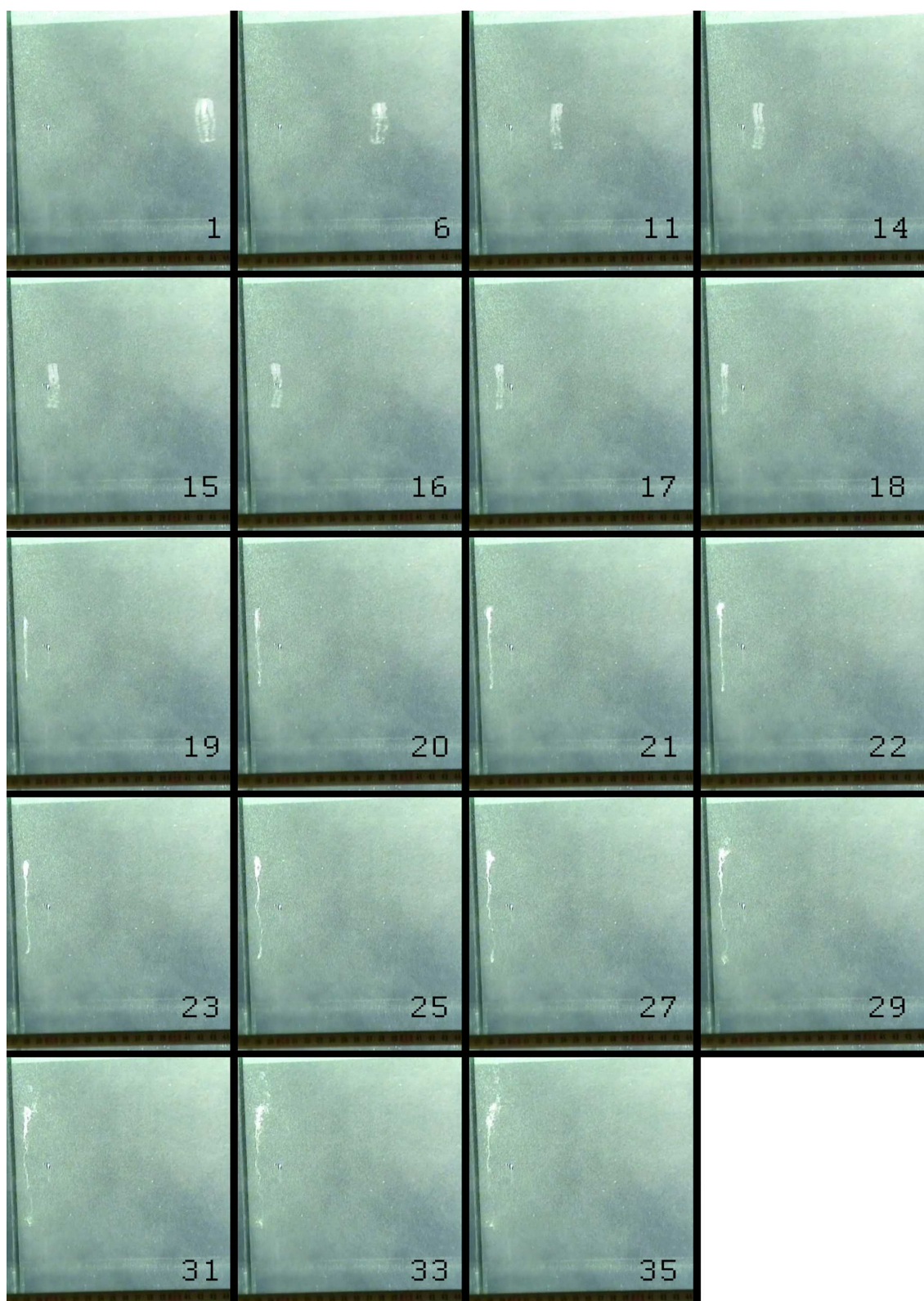
Z obrázku je vidět, že děj kvalitativně splňuje teoretický model. Se zmenšující se vzdáleností od stěny poloměr prstence roste a rychlost klesá. Bohužel se nepodařilo vypracovat matematicky korektní model, který by se mohl seriózně experimentálně ověřit. I kdyby se

takový model však podařilo najít, jeho ověření by bylo moje možnosti, opět kvůli neznalosti cirkulace kolem vírové čáry, která by v závislosti zřejmě vystupovala.

Od snímku č. 25 je vidět, že prstenec už není stabilní. Vírová trubice se přerušuje a prstenec rychle zaniká.

Tabulka 4.3: Dopad vírového prstence na stěnu, viz obr. 4.10

snímek č.	čas [s]	poloměr [cm]	vzdál. od stěny [cm]
1	0,04	2,14	15,05
6	0,24	1,92	10,8
11	0,44	2,11	6,1
14	0,56	2,16	3,6
15	0,6	2,05	2,7
16	0,64	2,03	2,1
17	0,68	2,13	1,52
18	0,72	2,37	0,95
19	0,76	3,05	0,68
20	0,8	3,66	0,65
21	0,84	3,79	0,68
22	0,88	4,08	0,68
23	0,92	4,32	0,68
24	0,96	4,47	0,68
25	1	4,79	0,68
27	1,08	5,24	0,63
29	1,16	5,37	0,63
31	1,24	5,51	0,63
33	1,32	5,68	0,63



Obrázek 4.10: Dopad vírového prstence na zeď

## 4.4 Vzájemná interakce dvou vírových prstenců

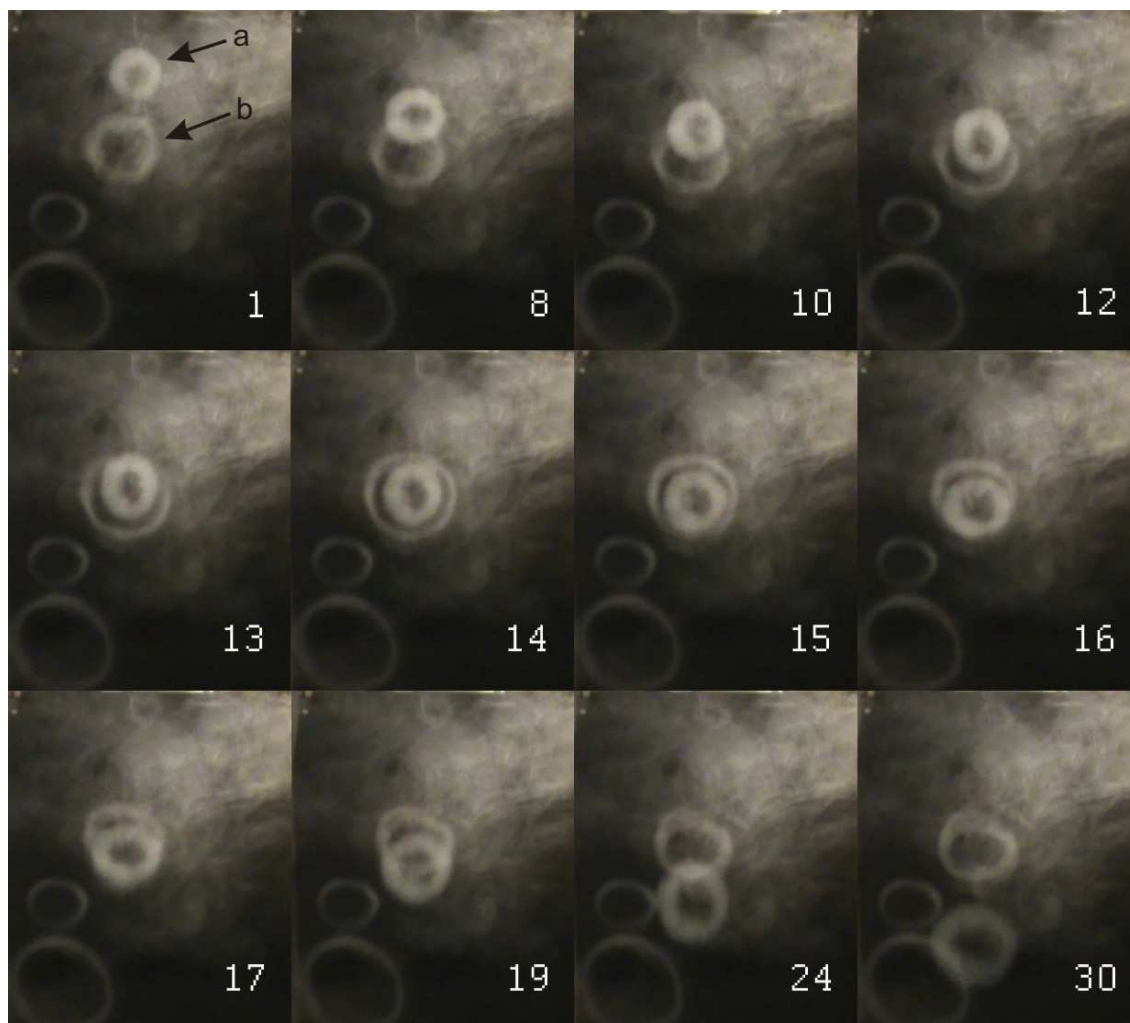
---

Nyní se budeme věnovat pokusům o potvrzení teoretické predikce z druhé kapitoly o vzájemné interakci dvou souběžných vírových prstenců. Bohužel se ukázalo, že pomocí mého zařízení nejsem schopen utvořit pár prstenců dostatečně si blízkých, aby spolu mohly navzájem interagovat. Proto jsem se musel spokojit s případem, kdy se zadní prstenec pohybuje rychleji než první. Navíc bylo v mých podmínkách téměř nemožné vytvořit dva prstence se stejnou osou symetrie. Z těchto důvodů se mi přímo nepodařilo pozorovat teoreticky předpovězený, periodicky se opakující děj.

Uvedu zde však několik argumentů, které tuto teorii podporují. Při těchto experimentech jsem několikrát pozoroval zmenšení zadního rychlejšího prstence a zvětšování předního. V okamžiku, kdy zadní prstenec prolétával předním, došlo z neznámé příčiny k jeho zániku. Tento jev proběhl natolik rychle, že nebylo v mých technických možnostech tento jev zdokumentovat tak, aby byla možná jeho pozdější podrobná rekonstrukce. V ojedinělých případech jsem dokonce zpozoroval průlet zadního prstence předním, náhlou změnu směru pohybu původně zadního prstence a jeho rychlý zánik. Tento jev se mi vůbec nepodařilo zachytit na videokameru.

Mám však k dispozici záběry, které vznikly náhodně při pokusech s eliptickými prstenci (obr. 4.11). V této sérii se budeme věnovat pouze dvěma zřetelnějším prstencům označenými na snímku 1 pro přehlednost písmeny  $a$ ,  $b$  (dva prstence v levých dolních rozích vznikly při předchozích pokusech a jsou pro nás nepodstatné). Snímek 1 a 8 ukazuje, že zadní prstenec  $a$  se pohyboval podstatně vyšší rychlostí. Na snímcích 12 a 13 je zachyceno zvětšování prstence  $b$ , 14. snímek dokumentuje průlet prstence  $a$  zvětšeným prstencem  $b$ . Z dalších záběrů (15,16,17 a 19) je patrné opětovné zmenšení prstence  $b$  téměř k původní velikosti. Prstenec  $a$  se vzdaluje.

Velikost prstence  $a$  se viditelným způsobem nezměnila. Vysvětluji si to tím, že přední prstenec  $b$  měl velmi malou sílu vírové trubice, což usuzuji z jeho pomalého translačního pohybu. Působení prstence  $b$  na prstenec  $a$  je tedy zanedbatelné a nikterak se neprojeví. Uvedený pokus naznačuje, že teoretická představa uvedená v druhé kapitole, je celkem oprávněná. Věřím, že pokud by se podařilo vytvořit vírový pár s velmi malou vzájemnou vzdáleností, popsáný děj by se skutečně periodicky opakoval, dokud by nebyl utlumen difuzí vířivosti.



Obrázek 4.11: Vzájemná interakce dvou prstenců

## 4.5 Kmity eliptických prstenců

---

V teoretické části této práce je naznačen způsob, jakým kmitají eliptické prstence. Na obrázku 4.12 je zobrazen pohyb eliptického prstence z boku. Bohužel záběr není zcela ostrý, je totiž velmi těžké ostřit kamerou do vzdálenosti prstence kvůli dalšímu kouři kolem prstence. Celý znázorněný děj trvá 1,12 s.

Na snímku č.3 vidíme, že prstenec je z našeho pohledu přibližně rovinný. Na snímcích 4,5,6,7 a 8 má už prstenec tvar obráceného písmena C. Dále je vidět, že jeho rozměr z našeho pohledu postupně roste. Můžeme usuzovat, že prstenec překmitává do polohy na obr. 9, kde je opět přibližně rovinnou elipsou. Rozměr této elipsy (z našeho pohledu) je však větší než původně na snímku 3. Původně tedy měla elipsa vedlejší poloosu rovnoběžnou s rovinou obrázku, na obr. 9 je však rovnoběžná s hlavní poloosou. Elipsa tedy vypadá, jakoby byla otočena o  $90^\circ$  vzhledem k elipse původní. Popsaný děj tedy tvoří jeden půlkmít prstence.

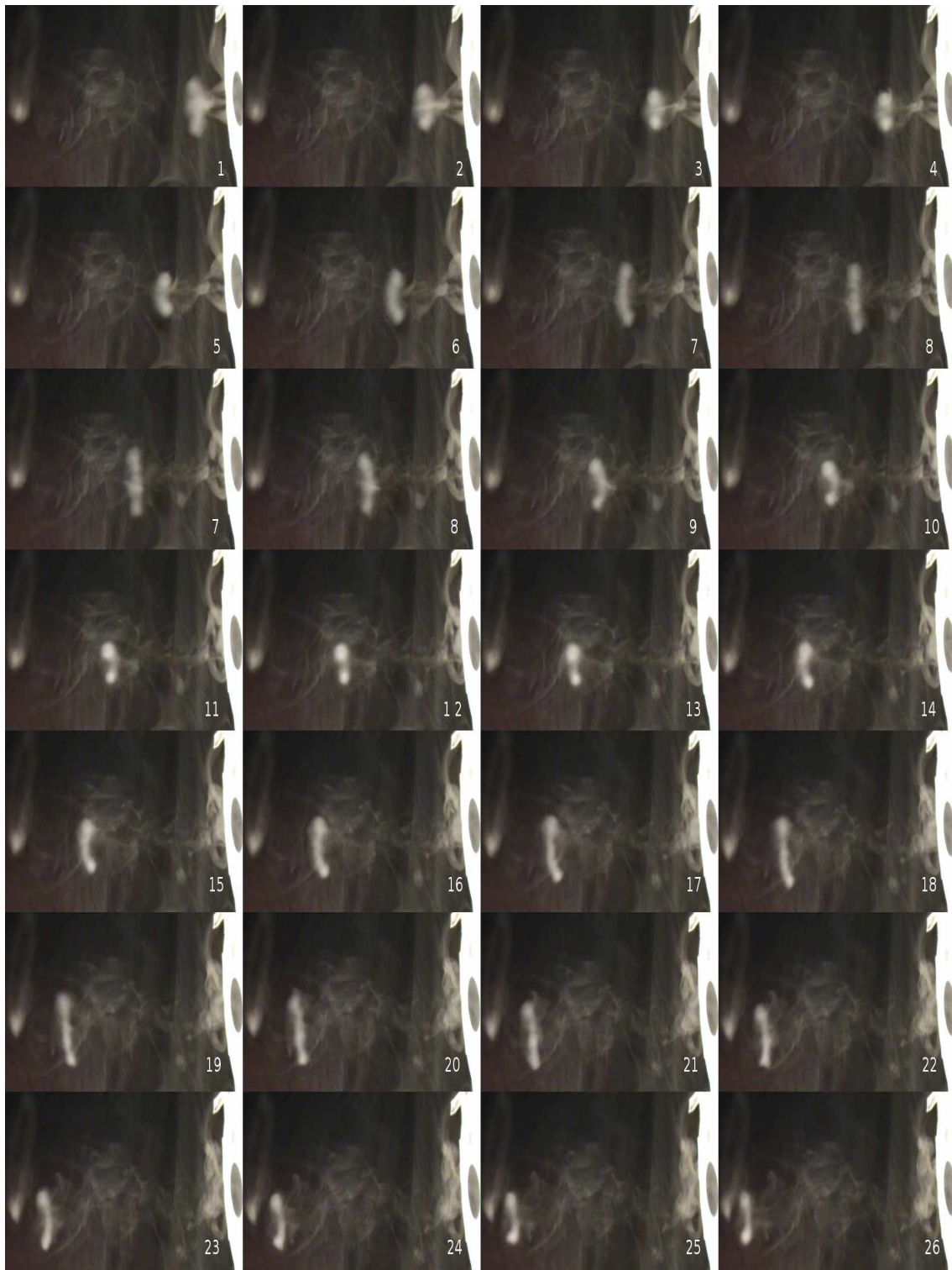
Tento rozbor sice samozřejmě zcela nepotvrzuje teoretický model, ale kvalitativním způsobem s ním souhlasí.

## 4.6 Přerušení vírové trubice prstence

---

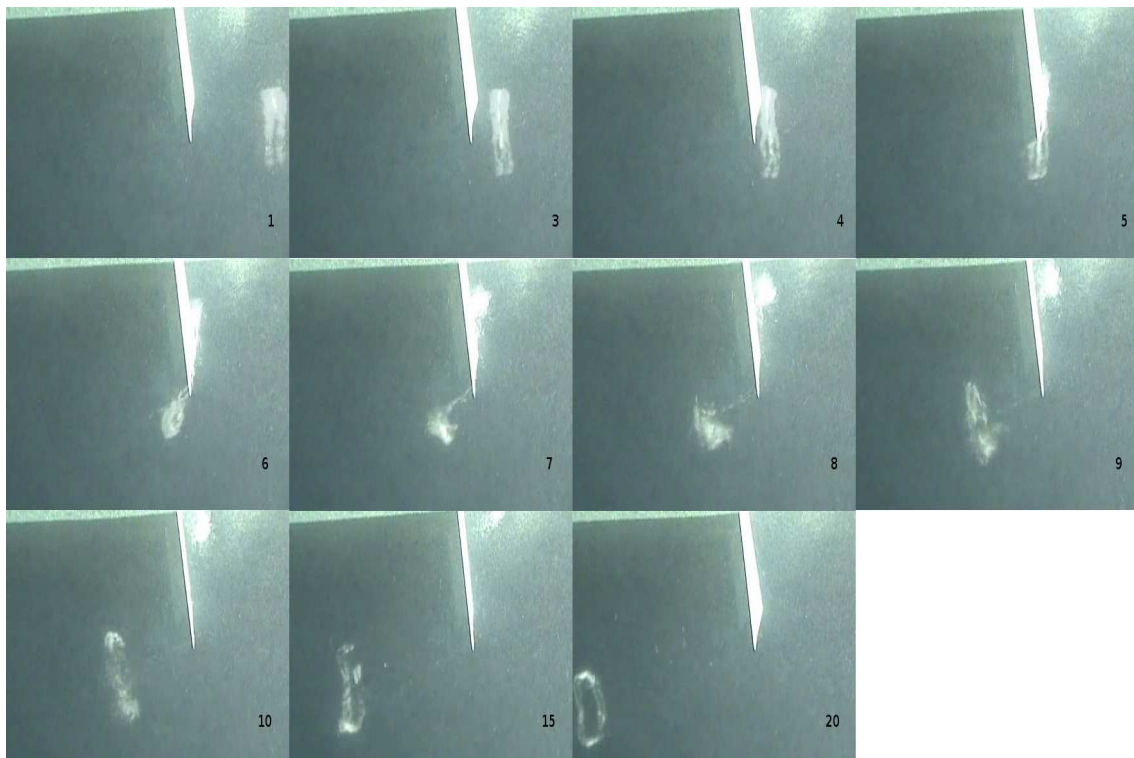
Zajímavou otázkou je, co nastane při přerušení vírové trubice prstence. Proto jsem se snažil narušit strukturu prstence vkládáním různých předmětů do jeho trajektorie. Podle rozměrů překážky se měnilo následné chování prstence. Dle očekávání se prstenec při nárazu na předmět o srovnatelných rozměrech jako poloměr prstence většinou rozpadl. Pro překážky menších rozměrů (tenká dřevěná tyčka o průměru přibližně 4 mm) se sice kruhová vírová trubice dočasně rozdělila na dvě polokružnice, ty se však téměř okamžitě opět spojily. Bylo vidět, že prstenec po rozdělení na dva fragmenty zpomalil, ale po jejich opětovném spojení se začal pohybovat rychlostí téměř stejnou jako před rozpadem.

Vůbec nejzajímavější jev jsem pozoroval při dopadu prstence horní polovinou na tvrdou plastovou fólii (obr. 4.13, snímek č. 5). Na obrázku je zachycen průběh opětovného zformování vírového prstence po nárazu. Na snímku č. 6 je spodní polovina prstence ještě zcela neuspořádaná, na následujícím záběru však již vidíme opětovné formování útvaru do kruhové podoby, ke které dospěje na snímku č. 9. Tento prstenec se dále šíří prostorem, jak je patrné z obrázků 10,15 a 20, zároveň je možné si povšimnout, že rychlost tohoto prstence je menší než rychlost prstence původního.



Obrázek 4.12: Kmity eliptického prstence

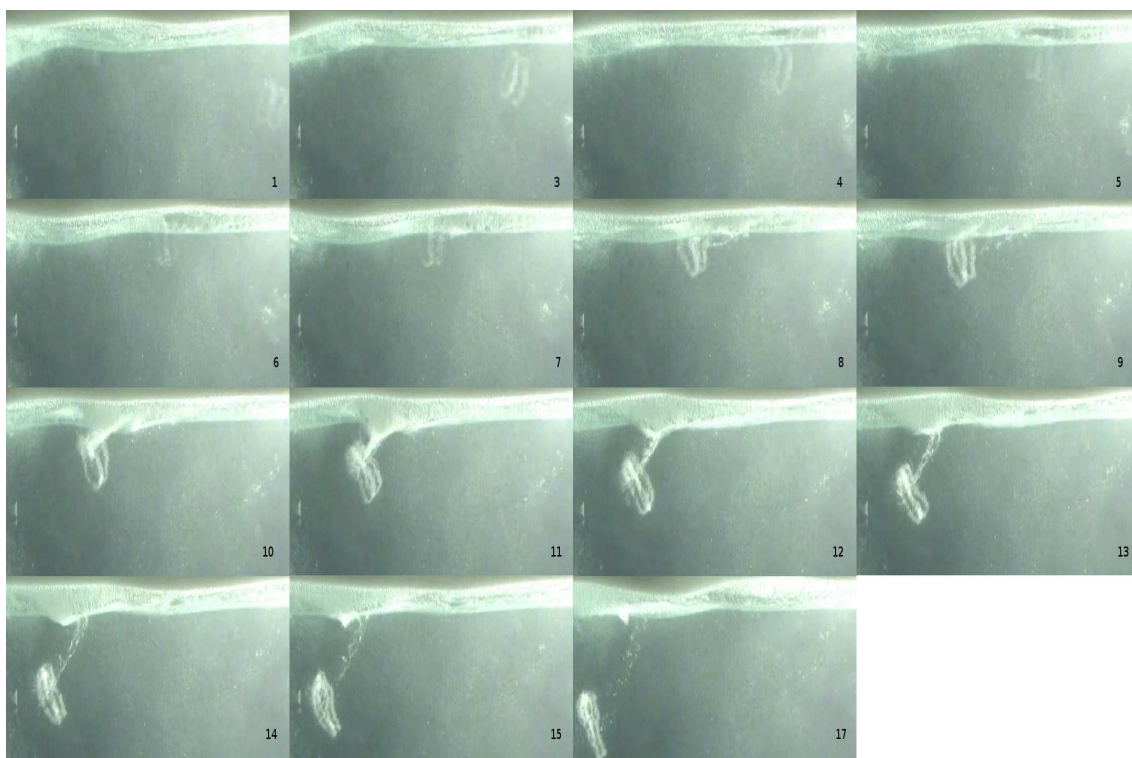




Obrázek 4.13: Dopad prstence na plastovou fólii

## 4.7 Odraz prstence od vodní hladiny

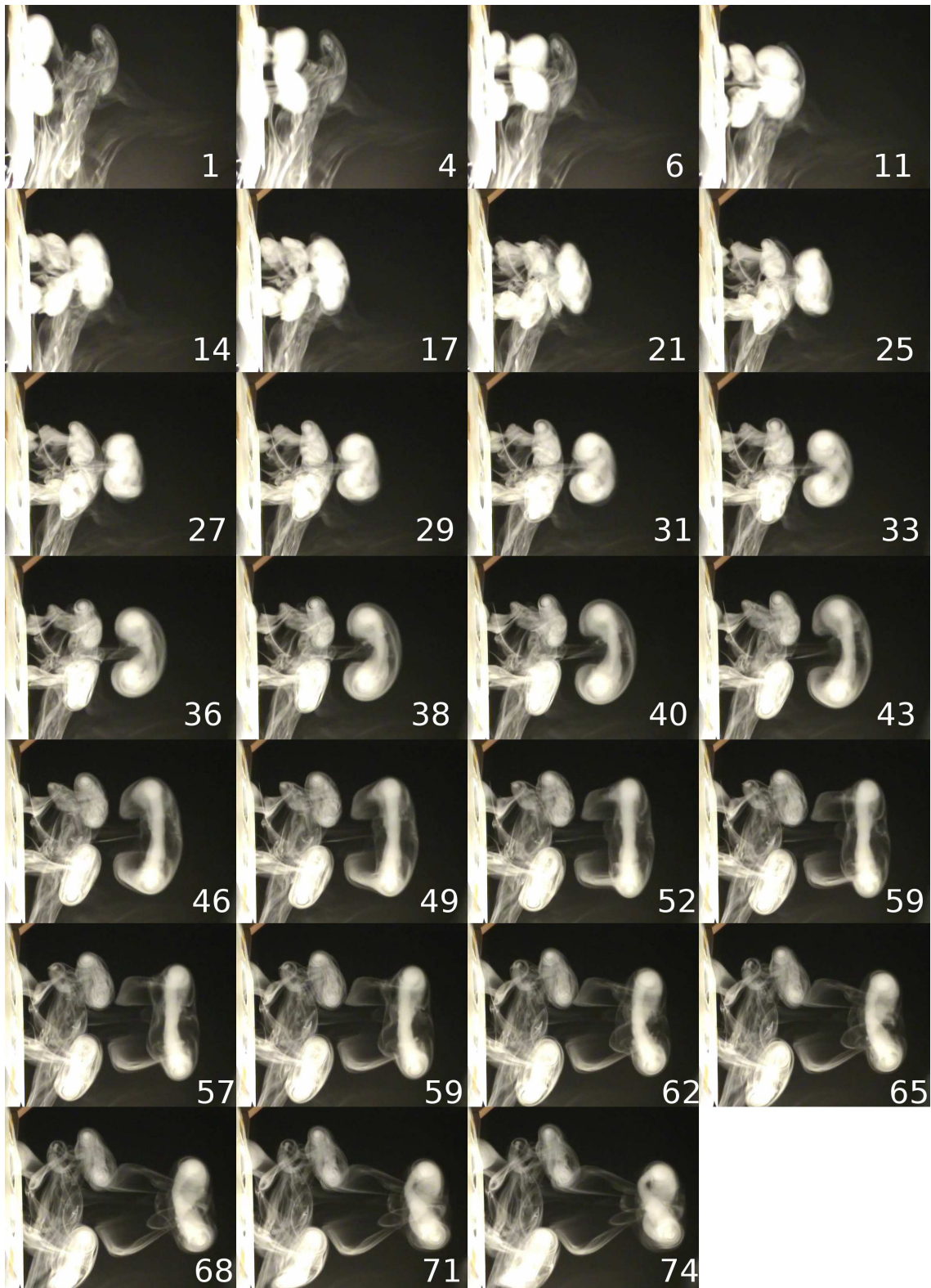
Obrazová dokumentace k tomuto ději je znázorněna v obr. 4.14. Uvádím ho zde pouze jako zajímavost, neboť jsem se jím v teoretické části nezabýval. Na snímcích je zachycena trajektorie prstence směrem k hladině (1,3,4), změnu směru jeho pohybu při kontaktu s hladinou (5,6,7,8,9,10) a výsledný pohyb od hladiny. Na snímcích je patrné, že během interakce s hladinou prstenec přibral do své vírové trubice vzduch. To dokazuje jeho zvýraznění na snímcích po odrazu. Ze záběrů není příliš patrný vznik vlny při kontaktu vírového prstence s vodní hladinou.



Obrázek 4.14: Odraz prstence od vodní hladiny

## 4.8 Dva prstence vedle sebe

Na obrázku 4.15 je zachycen průběh spojení zpočátku dvou oddělených prstenců. Jako nástavec na generátor vírových prstenců jsem totiž použil plastovou fólii s dvěma malými kruhovými otvory umístěnými vedle sebe. Na snímku 1 vidíme dva oddělené prstence. Elementárním rozborem situace podobným způsobem jako na konci kap. 2 není těžké ukázat, že takovéto dva prstence by se měly přitahovat, což můžeme vidět na snímcích 6 a 4. Na 11. snímku dochází ke kontaktu, na snímku 14 jsou prstence již zcela spojeny. Další vývoj zachycuje komplikovaný pohyb a kmity takto zvlněného útvaru. Na záběru č. 6 stojí za povšimnutí vznik dvou sekundárních prstenců, které měly menší cirkulaci a nedošlo k jejich spojení. Na následujících snímcích můžeme vidět, že se šíří prstencem odděleně.



Obrázek 4.15: Vzájemná interakce dvou prstenců

# 5

## Závěr

Hned od počátku této práce byla evidentní nutnost výroby přístroje, který by umožnil re-produkovatelným způsobem generovat vírové prstence. Během prací na tomto zařízení jsem zároveň studoval dostupnou literaturu, protože o fyzice vírů mně toho nebylo příliš známo. První, co poskytlo odrazový můstek, byl Helmholtzův vírový a Kelvinův cirkulační teorém. Tyto teorémy jsou, i když ne úplně matematicky rigorózně, v této práci popsány. Dalším důležitým faktem je formální podobnost rovnic pro rychlostní pole indukované vířivosti a magnetické pole vytvářené rozložením proudu. Tyto tři indicie s trochou představivosti a intuice nabízejí kvalitativní náhled do problematiky týkající se dynamiky vírových prstenců. V této práci se tímto způsobem věnuji vzájemné interakci mezi dvěma těsně za sebou se pohybujícími prstenci a dopadem vírového prstence na stěnu, jelikož podmínku kladenou na tekutinu blízko stěny lze splnit metodou zrcadlení. Ta spočívá v uvedení imaginárního prstence z druhé strany stěny. V případě jakéhokoli matematicky rigoróznějšího popisu situace spojené s vírovým prstencem se ukazuje jako nezbytné použití Stokesovy proudnicové funkce, pomocí níž lze využít v případě nestlačitelné tekutiny kruhové symetrie prstence. V této práci je tato funkce spočtena pro jeden vírový prsteneček pomocí eliptických integrálů prvního a druhého druhu. S tímto tvarem by zřejmě bylo nutné dále pracovat pro detailnější rozbor situací. Z mého hlediska asi největším úspěchem teoretické části této práce je vysvětlení vzniku samoindukovaného translačního pohybu vírové čáry v důsledku lokálního zakřivení. Tímto způsobem si vysvětluji schopnost vírového prstence překonat i poměrně velké vzdálenosti. Za pomoci tohoto faktu je v této práci i naznačeno, jakým způsobem pravděpodobně kmitají eliptické vírové prstence.

Experimentální zařízení se po několika měsících podařilo uvést v činnost. Přístroj rozhodně není dokonalý, nicméně k účelům této práce posloužil. Mám však několik nápadů, na vylepšení přístroje, které by zřejmě byly nutné k soustavnější experimentální činnosti.

V experimentální části této práce se věnuji hned několika jevům. Zde jsem však nucen se omezit povětšinou na pouhý popis pozorovaných jevů. To je způsobeno tím, že v mých experimentálních podmínkách nebylo možné určit cirkulaci kolem vírové trubice prstence, která vystupuje ve všech teoreticky odvozených vztazích. Je zde tedy popsán dopad vírového prstence na stěnu, který zhruba odpovídá modelu vytvořeného na základě metody zrcadlení. Interakce mezi dvěma souběžnými prstenci popsána v teoretické části přímo pozorována nebyla, nicméně je zde uvedeno několik faktů, které poukazují na správnost této úvahy. Vše je bohatě ilustrováno doprovodnými fotografiemi. Dále je v práci ukázáno, že kmity eliptických prstenců jsou opravdu třírozměrné, a že průběh přibližně odpovídá

kvalitativnímu modelu. V závěru experimentální části je jako zajímavost znázorněn odraz prstence od vodní hladiny a spojení dvou vírových prstenců v jeden kmitající prstenec.

Obsahem této práce zdaleka není ucelený výklad problematiky týkající se vírových prstenců. Samostatnou kapitolu by si jistě zasloužil především vznik vírů i podrobnější rozpracování difuze vířivosti.

# Literatura

- [1] LAMB, Horace. *Hydrodynamics*. 7th edition. London : Cambridge University Press, 1975. 738 s. ISBN 0 521 05515 6.
- [2] BATCHELOR, G.K. *An introduction to fluid dynamics*. 20th edition. London : Cambridge University Press, 2002. 615 s. ISBN 0 521 66396 2.
- [3] SOMMERFELD, Arnold. *Mechanics of deformable bodies*. 2nd edition. New York : Academic Press Inc., 1950. 396 s. ISBN 978-0126546507.
- [4] KUNDU, Pijush K., COHEN, Ira M. *Fluid Mechanics*. 2nd edition. London : Academic Press, 2002. 730 s. ISBN 0-12-178251-4.
- [5] BRDIČKA, Miroslav, SAMEK, Ladislav, SOPKO, Bruno. *Mechanika kontinua*. 3. vyd. Praha : Academia, 2005. 799 s. ISBN 80-200-1344-X.
- [6] SAFFMAN, P.G. *Vortex Dynamics*. 1st edition. New York : Cambridge University Press, 1992. 311 s. ISBN 0-521-42058-X.
- [7] CAYLEY, Arthur *An elementary treatise on elliptic functions*. 2nd edition. London : George Bell & Sons, 1895. 386 s.
- [8] FRAENKEL, L.E., BERGER, M.S. *The global theory of steady vortex rings in an ideal fluid*. Acta Mathematica. 1973, vol. 132, no. 1, s. 13-51. Dostupný z WWW: <<http://www.springerlink.com/content/18171227404474u1/>>.
- [9] WALKER, J.D.A., et al. *The impact of a vortex ring on a wall*. Journal of Fluid Mechanics. 1987, no. 181, s. 99-140.