

MASARYKOVA UNIVERZITA V BRNĚ
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
KATEDRA OBECNÉ FYZIKY

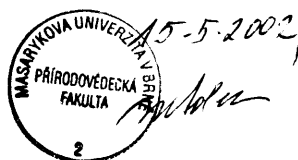
DIPLOMOVÁ PRÁCE

INTERPRETAČNÍ PROBLÉMY DEMONSTRAČNÍCH EXPERIMENTŮ

D = 12.6.04
REVIZE 2003

MASARYKOVA UNIVERZITA V BRNĚ
Přírodovědecká fakulta
KNIHOVNA FYZIKÁLNÍ SEKCE
2040 Ústav teoretické fyziky a astrofyziky
611 37 Brno, Kollářská 2

BRNO 2002



Jiří Bartoš

Na tomto místě bych rád poděkoval doc.RNDr. Janě Musilové, CSc za její rady a vedení diplomové práce. Dále chci poděkovat svým přátelům Tomáši Radličkovi a Viktoru Votrubovi za pomoc při numerickém zpracování výsledků.

Prohlašuji, že jsem na celé diplomové práci pracoval samostatně a užil jsem jen informací z citovaných zdrojů.

Demonstrační experiment je jednou z klíčových složek středoškolské výuky fyziky. Zkušenosti však, bohužel, ukazují, že není-li opomíjen zcela, nebývá věnována dostatečná pozornost jeho správné interpretaci. S nesprávnou interpretací bývá spojena i nevhodná realizace experimentu. Práce se zabývá vybranými demonstračními experimenty z mechaniky, jejichž průběh se může jevit jako neočekávaný, s důrazem na jejich důslednou fyzikální interpretaci a elementarizovaný výklad.

Obsah

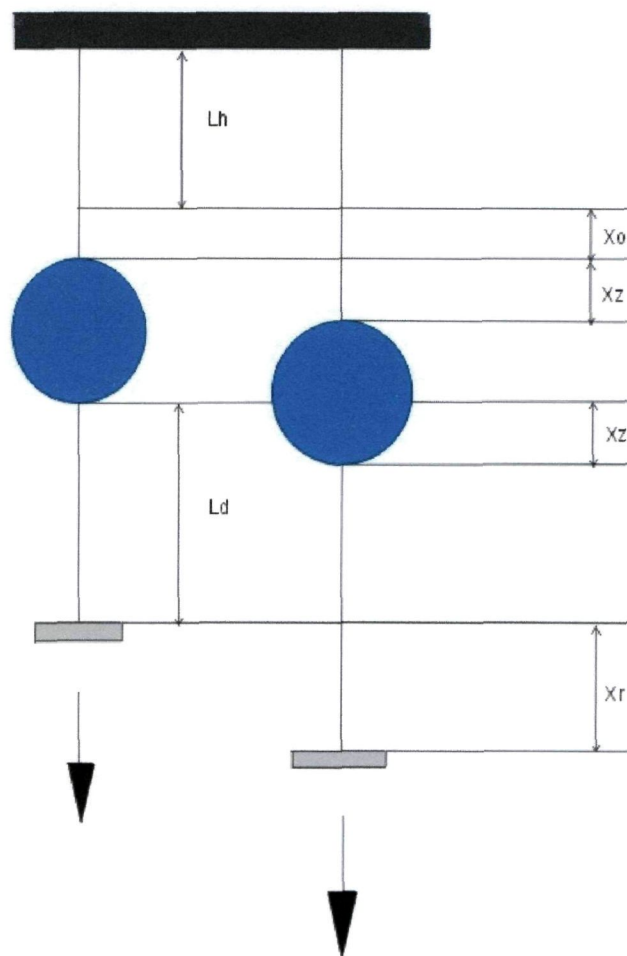
Úvod.....	1
1.Trhání provázku.....	2
2.Jak vytrhnout ubrus zpod svatební hostiny.....	10
3.Těleso pohybující se po nakloněné rovině nahoru.....	23
Použitá literatura.....	53

Úvod

Tato práce se zabývá demonstračními experimenty ve fyzice, které mají důležitou a nezastupitelnou roli v kurzech obecné fyziky na gymnaziální i základní univerzitní úrovni. Demonstrační experiment je ve výuce často zastoupen jen velmi okrajově. Výklad demonstračního experimentu zůstává často jen na kvalitativní úrovni i tam, kde by mohl být podložen elementárním výpočtem. Úskalím kvalitativního výkladu je však často jeho fyzikální nesprávnost. S nesprávnou interpretací bývá spojena i nevhodná realizace experimentu. Práce je sestavena ze tří demonstračních experimentů z mechaniky, jejichž průběh se může jevit jako neočekávaný, s důrazem na jejich důslednou fyzikální interpretaci a elementarizovaný výklad, řazených od nejjednoduššího k nejsložitějšímu. Úlohy jsou koncipovány tak, aby byla zachována struktura:

- popis experimentu
- sestavení a vyřešení pohybových rovnic
- grafické vyjádření výsledků

1. Trhání provázku



obr.1.1

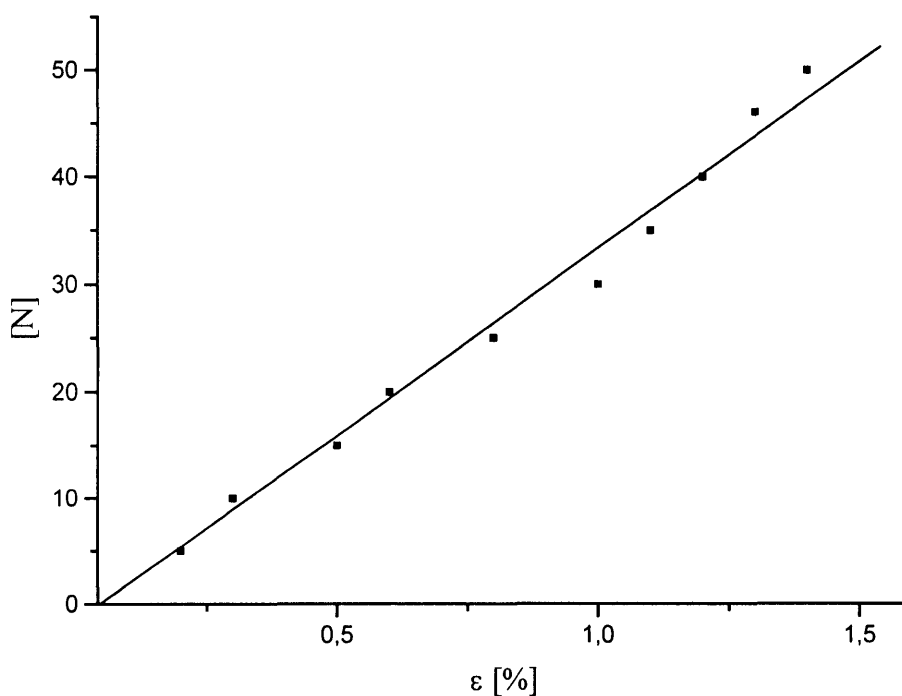
Jedním z nejznámějších demonstračních pokusů z mechaniky je pokus zvaný "trhání provázku", který je znázorněn na obr.1.1. Jedná se o závaží zavěšené mezi dvěma provázky stejných vlastností. Táhne-li za nit pomalu, praskne horní nit, při prudkém cuknutí se přetrhne nit spodní. Obvykle je tento pokus předváděn jako demonstrace setrvačnosti tělesa se zdůvodněním, že při přetržení pomalým tahem působí na horní nit navíc závaží svou tíhou, při šubnutí naopak setrvačnost závaží

přetržení horní nitě zabrání, mez pevnosti je dříve překročena u nitě spodní. Toto vysvětlení nelze považovat za dostatečné, neboť nezahrnuje dynamické úvahy. Je nutné provést kvantitativní analýzu jevu. Tato analýza je již numericky provedena v [1]. Zde jsem použil vlastních naměřených hodnot, předkládám analytické řešení úlohy a zároveň přidávám ještě jednu možnost, jak tento jev vysvětlit pro některé pro situace, které nejsou v [1] popsány.

Nejdříve je nutné proměřit deformační křivku použité nitě, tj. závislost velikosti tahové síly F na relativním prodloužení ε až do jejího přetržení. Toto měření provedeme postupným zatěžováním použité nitě jednotkové délky. Na obr.2.2 jsou uvedeny hodnoty $F(\varepsilon)$ v závislosti na ε , pro naše účely je možné tuto závislost považovat za lineární:

$$F = k\varepsilon = k \frac{\Delta l}{l}$$

Ze získaného grafu stanovit konstantu úměrnosti $k = (3490 \pm 20)$ N i mez pevnosti nitě $F_{max} = 53$ N.



obr.2.2

Pro jednoduchost budeme předpokládat, že za spodní nit táhneme tak, že se její konec pohybuje rovnoměrně zrychleně. Již tato jednoduchá aproximace umožňuje uspokojivě popsat a vysvětlit průběh pokusu.

Prodloužení horní nitě x_0 v situaci, kdy je těleso ve statické rovnováze, je určeno podmínkou rovnováhy tíhové síly a tahové síly niti:

$$x_0 = \frac{mgL_h}{k} \quad (1.1)$$

Dolní konec spodní nitě se pohybuje rovnoměrně zrychleně:

$$x_r = \frac{1}{2}a_r t^2 \quad (1.2)$$

Protažení dolní nitě x_d je dáno rozdílem posunutí ruky x_r a závaží x_z :

$$x_d = x_r - x_z \quad (1.3)$$

Protažení horní nitě x_h je dáno prodloužením x_0 způsobeným tíhou závaží spolu s posunutím závaží x_z :

$$x_h = x_0 + x_z \quad (1.4)$$

Tahová síla F_d spodní niti, souvisí s relativní deformací dolní nitě přímo úměrně:

$$F_d = k \frac{x_d}{L_d} \quad (1.5)$$

Obdobný vztah platí i pro tahovou sílu F_h působící na horní nit:

$$F_h = k \frac{x_h}{L_h} \quad (1.6)$$

L_d a L_h jsou délky dolní a horní nitě v nenapnutém stavu, x_d a x_h jsou prodloužení těchto nití.

Veličiny x_h, x_d, F_h, F_d jsou funkcemi času.

Zrychlení těžiště závaží a_z je určeno výslednicí působících sil a hmotností závaží m :

$$a_z = \frac{F_d + mg - F_h}{m} \quad (1.7)$$

Dosazením z (1.3), (1.4), (1.5) a (1.6) pak dostaneme:

$$a_z = \frac{k(x_r - x_z)}{mL_d} + g - \frac{k(x_0 + x_z)}{mL_h} \quad (1.8)$$

Tuto rovnici lze ještě upravit použitím vztahu (1.1) a dosazením za x_r ze vztahu (1.2).

Současně vyjádříme okamžité zrychlení závaží jako druhou derivaci x_z podle času a získáme diferenciální rovnici:

$$\frac{d^2 x_z}{dt^2} + Ax_z = Bt^2, \quad (1.9)$$

$$\text{kde } A = \frac{k}{mL_d} \left(1 + \frac{L_d}{L_h} \right) \text{ a } B = \frac{ka_r}{2mL_d} \quad (1.10)$$

Řešením této rovnice s počátečními podmínkami: $x_z(0) = 0$; $v_z(0) = 0$ dostaneme:

$$x_z(t) = \frac{2B}{A^2} (\cos \sqrt{A}t - 1) + \frac{B}{A} t^2 \quad (1.11)$$

Tahové síly jsou pak podle (1.5) a (1.6) dány vztahy:

$$F_d = \frac{k}{L_d} \left[\left(\frac{1}{2} a_r - \frac{B}{A} \right) t^2 - \frac{2B}{A^2} (\cos \sqrt{A}t - 1) \right]$$

$$F_h = mg + \frac{k}{L_h} \left[\frac{2B}{A^2} (\cos \sqrt{At} - 1) + \frac{B}{A} t^2 \right]$$

Řešení takovéto diferenciální rovnice není pro běžného studenta střední školy velký problém, jestliže využije výpočetní techniky s vhodným programovým vybavením, např. Maple V, které by mělo být k dispozici na všech běžných typech středních škol.

Použité parametry pokusu:

$m = 1$ kg (hmotnost závaží)

$g = 10$ ms⁻² (tíhové urychlení)

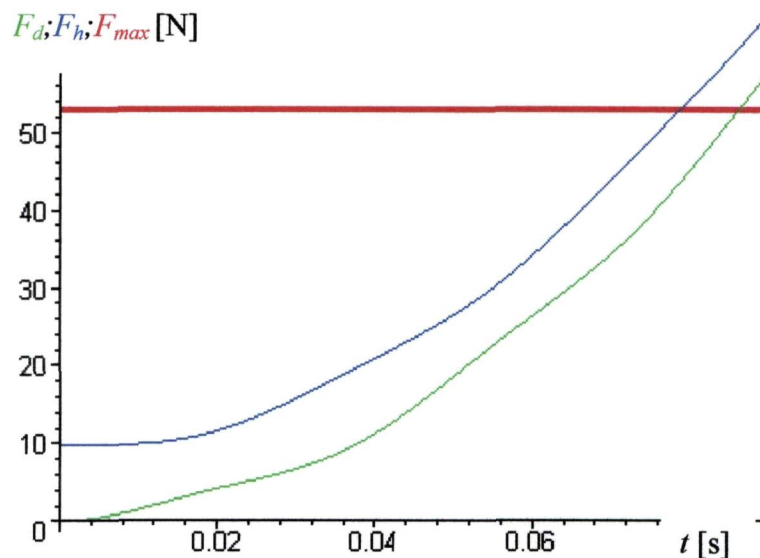
$L_d = 0,2$ m (klidová délka dolního provázku)

$L_h = 0,3$ m (klidová délka horního provázku)

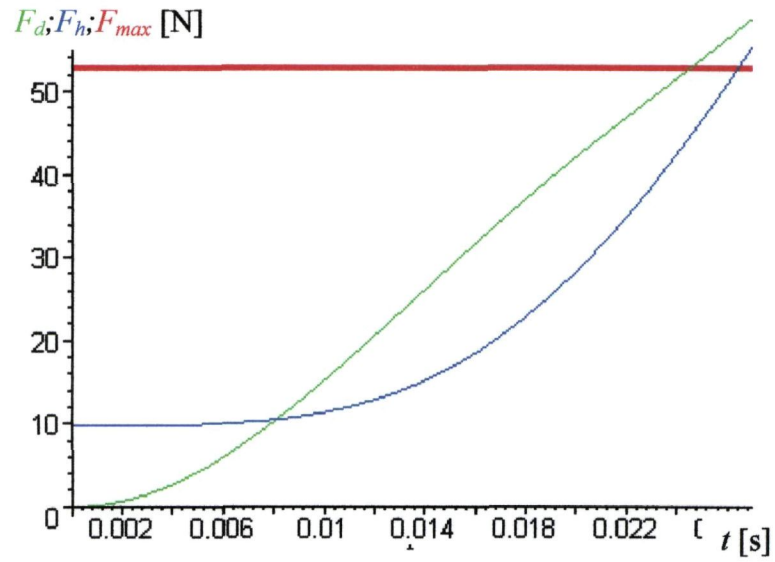
$k = 3500$ N (konstanta úměrnosti)

$a_r = 2$ ms⁻² resp. 20 ms⁻² (zrychlení ruky)

Průběh tahových sil na jednotlivé provázky pro $a_r = 2$ ms⁻² (resp. $a_r = 20$ ms⁻²) je znázorněn na obr. 1.3 (resp. obr. 1.4).



obr.1.3



obr.1.4

Při předvádění tohoto pokusu na střední škole je velmi efektní, když jeden dolní provázek nahradíme větším počtem (viz. obr. 1.5). Záleží jen na šikovnosti "trhače". Je ovšem nutné, aby závislost relativního prodloužení na napětí byla lineární, a to až po mez pevnosti, jinak by uvedené vysvětlení nebylo správné. Toto však splňují všechny běžné materiály.



obr.1.5

Nahradíme-li však dolní provázek n provázky stejného druhu, pak:

$$F_d = n \cdot k \frac{x_d}{L_d},$$

tj. "efektivní" konstanta úměrnosti k bude n -násobná a změní se hodnota konstanty A .

V případě, že bychom dosáhli velmi značných hodnot zrychlení dolního konce spodního provázku, nebo kdybychom trhali provaz (drát) z látky specifických vlastností, předchozí výpočet by nepostihoval všechny aspekty zkoumaného jevu.

Zpřesněné vysvětlení by muselo respektovat konečnou rychlost šíření interakce v provázku, kterou jsme zatím neuvažovali. Předpokládali jsme, že se šíří nekonečně velkou rychlostí. Tento předpoklad jsme si mohli skutečně dovolit, protože tato rychlost je skutečně velmi vysoká.

Rychlost šíření interakce v pevné látce je dána vztahem:

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}},$$

kde E je Youngův modul pružnosti v tahu a ρ je hustota látky.

Změřit hustotu provázku je značně velkým problémem. Předchozí vztah pro rychlost v však lze nahradit vyrazem:

$$v = \sqrt{\frac{k}{\mu}},$$

jehož hodnotu lze naopak zjistit snadno, kde k je již uvedená konstanta úměrnosti a $\mu = \frac{m}{l}$ je lineární hustota provázku. Měření lineární hustoty provázku provedeme opakovaným měřením délky a hmotnosti.

Tabulka naměřených hodnot lineární hmotnosti provázku:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
μ [g.m ⁻¹]	0.72	0.69	0.70	0.68	0.73	0.71	0.69	0.66	0.74	0.70

Hodnota pro provázek použitý v našem experimentu je $\mu = (0,70 \pm 0,02) \text{ g.m}^{-1}$.

Pak rychlost šíření interakce v použitém provázku má hodnotu $v = (2200 \pm 30) \text{ ms}^{-1}$.

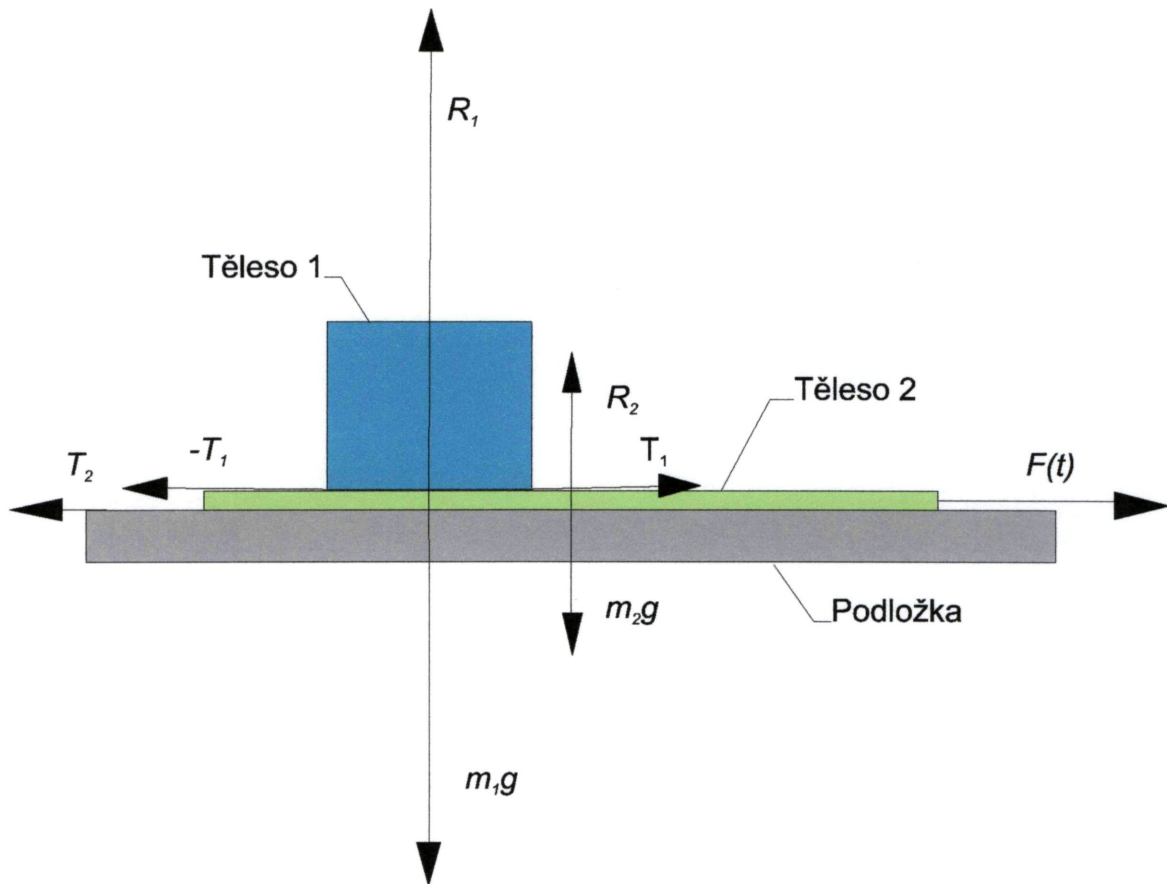
Z výsledku je zřejmé, že pokud se v pokusu s provázkem o konstantě $k = 3490 \text{ N}$ a o délce dolního provázku $L_d = 0,2 \text{ m}$ měl uplatnit efekt konečné rychlosti šíření mechanické vlny v provázku, musel by celý děj proběhnout v čase kratším, než $0,01 \text{ s}$. Tato situace nastane jakmile zrychlení ruky překročí hodnotu $a_r = 100 \text{ m.s}^{-2}$.

Jestliže budeme hledat látku, ve které se interakce šíří pomaleji, najdeme například olovo. Zde je rychlost šíření interakce $v_{pb} = 1240 \text{ m.s}^{-1}$. Jestliže bychom experiment zopakovali tak, že bychom pouze zaměnili provázek za olověný drát, pak by se dalo přetržení spodního drátu zdůvodnit pomocí šíření interakce už při hodnotách zrychlení ruky převyšujících hodnoty $a_r = 20 \text{ m.s}^{-2}$.

Je evidentní, že efekt rychlosti šíření mechanické vlny "trhaným" materiálem se výrazně projevuje u materiálů s velkou hustotou a malým Youngovým modulem pružnosti v tahu. Dalšími materiály, které by se chovaly jako olovo, jsou cín a zlato.

2. Jak vytrhnout ubrus zpod svatební hostiny

Tento název kapitoly je velmi nadnesený, nebudeme se zde snažit odhalit tajemství různých "figlů" jak toto zvládnout, ale ukážeme zde velmi podrobně, jak za pomoci přiměřeného modelu a výpočetní techniky objasnit jevy spojené s pokusem "vytržení listu papíru zpod vázy", zobrazeném na obr.2.1. Těleso 1 představuje vázu, těleso 2 papír.



obr.2.1

$\vec{F}(t)$... síla, již působíme na těleso 2, její časový průběh je zadán.

\vec{T}_1 ... třecí síla již působí těleso 2 na těleso 1

$-\vec{T}_1$... třecí síla již působí těleso 1 na těleso 2

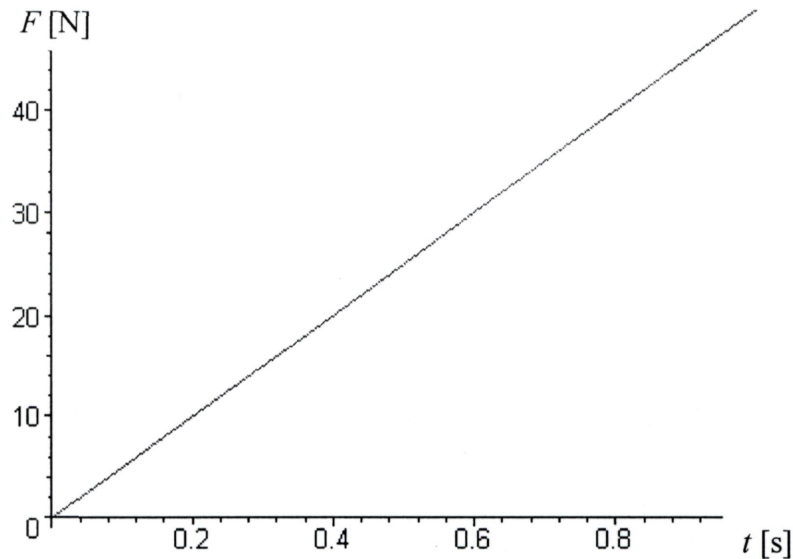
\vec{T}_2 ... třecí síla, již působí podložka na soustavu těles 1+2 (resp. na těleso 2)

\vec{R}_1 ... tlaková síla, již působí těleso 2 na těleso 1

\vec{R}_2 ... výslednice tlakových sil, jimiž působí na těleso 2 podložka a těleso 1

Koeficient statického (resp. dynamického) tření mezi tělesy 1 a 2 je f_{s1} (resp. f_{d1}), odpovídající koeficienty mezi tělesem 2 a podložkou jsou f_{s2} (resp. f_{d2}).

Pro naše úvahy zvolíme takový model, že síla, jíž táhneme za list papíru, roste lineárně s časem, tedy $F(t) = A \cdot t$ (viz. graf.2.1 pro $A=50$).



graf.2.1

Tělesa 1 a 2 se budou pohybovat pouze ve směru osy x (vazební podmínka), svislé složky sil působících na jednotlivá tělesa jsou tedy kompenzovány. Začnou-li se tělesa pohybovat vůči sobě, změní se statické tření na dynamické. V našem modelu se toto bude dít skokově.

Z obr.2.1 je vidět, jak budou vypadat pohybové rovnice pro těleso 1 a 2.

$$m_1 a_1 = T_1 \tag{2.1}$$

$$m_2 a_2 = F(t) - T_1 - T_2$$

Pohyb této soustavy těles budeme sledovat ve třech časových intervalech.

- 1) $\langle 0, t_1 \rangle$ Tělesa se nepohybují.
- 2) $\langle t_1, t_2 \rangle$ Tělesa se pohybují společně (těleso 1 se nepohybuje vůči tělesu 2).
- 3) $\langle t_2, \infty \rangle$ Tělesa se pohybují jak vůči sobě tak vůči podložce.

Nyní se budeme postupně věnovat jednotlivým intervalům.

- 1) Tento interval označíme jako interval 1. Tělesa se nepohybují. Tahová síla působící na papír je tedy zřejmě kompenzována statickou silou třecí opačného směru a stejného časového průběhu, jíž působí podložka na soustavu těles 1 a 2. Síly \vec{T}_1 a $-\vec{T}_1$ jsou nulové, tj.:

$$a_1 = a_2 = 0$$

$$T_1 = 0$$

$$T_2(t) = F(t) = At$$

Určení okamžiku t_1 :

V intervalu $\langle 0, t_1 \rangle$ platí pro velikost třecí síly vztah $T_2(t) = F(t) \Rightarrow T_2(t) = At$ až do okamžiku t_1 , kdy T_2 nabude nejvyšší přípustné hodnoty statické třecí síly určené koeficientem statického tření f_{s2} . Pak:

$$T_2(t_1) = At_1 = (m_1 + m_2) \cdot g \cdot f_{s2}$$

$$t_1 = \frac{m_1 + m_2}{A} \cdot g \cdot f_{s2} \quad (2.2)$$

2) Tento interval označíme jako interval 2. Zde se pohybuje papír (těleso 2) společně s vázou (těleso 1). Je již překonána hranice statického tření mezi podložkou a papírem, tedy se již uplatňuje tření dynamické. Ovšem mezi vázou a papírem je tření stále ještě statické.

Pohybová rovnice vychází ze soustavy rovnic (2.1) pro tento časový interval takto:

$$(m_1 + m_2) \cdot a = F(t) - T_2, \quad (2.3a)$$

kde a je společná hodnota veličin a_1, a_2 .

$$(m_1 + m_2) \frac{d^2 x(t)}{dt^2} = A \cdot t - (m_1 + m_2) \cdot g \cdot f_{d2} \quad (2.3b)$$

Tělesa se pohybují společně, tedy platí:

$$a_1 = a_2 = \frac{A \cdot t}{m_1 + m_2} - g \cdot f_{d2}$$

$$T_1 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} A \cdot t - m_1 \cdot g \cdot f_{d2}$$

$$T_2 = (m_1 + m_2) \cdot g \cdot f_{d2}$$

Určení okamžiku t_2 , kdy se začne pohybovat těleso 1 vůči tělesu 2:

Okamžiku t_2 odpovídá situace, kdy velikost statické třecí síly T_1 nabude maximální hodnoty dané koeficientem statického tření f_{s1} , tj.:

$$T_1(t_2) = m_1 \cdot g \cdot f_{s1} \Rightarrow \frac{m_1}{m_1 + m_2} A \cdot t_2 - m_1 \cdot g \cdot f_{d2} = m_1 \cdot g \cdot f_{s1}$$

$$t_2 = \frac{m_1 + m_2}{A} g (f_{s1} + f_{d2}) \quad (2.4)$$

3) Tento označíme jako interval 3. Zde již dojde k pohybu obou těles soustavy vzhledem k podložce a zároveň i k vzájemnému pohybu těles 1 a 2.

V tomto intervalu budou pohybové rovnice pro soustavu těles 1 a 2 již shodné s tvarem (2.1), tj. po přepisu do diferenciálního tvaru a vyjádření jednotlivých sil získáme tvar:

$$m_1 \frac{d^2 x_1(t)}{dt^2} = m_1 \cdot g \cdot f_{d1} \quad (2.5a)$$

$$m_2 \frac{d^2 x_2(t)}{dt^2} = A \cdot t - m_1 \cdot g \cdot f_{d1} - (m_1 + m_2) \cdot g \cdot f_{d2} \quad (2.5b)$$

Stanovili jsme okrajové body intervalů a mohli bychom přistoupit ke konkrétním výpočtům. K tomuto však potřebujeme zjistit, zda a za jakých podmínek probíhá experiment tak, jak jsme předpokládali, tj. okamžik t_2 následuje po t_1 (resp. je totožný s t_1). Zde se tedy naše úloha dělí na dvě části:

a) $t_2 > t_1$

Ze vztahů (2.2) a (2.4) vidíme, že okamžik t_2 následuje po t_1 , když platí:

$$f_{s1} + f_{d2} > f_{s2} \quad (2.6)$$

b) $t_2 = t_1$

Ze vztahů (2.2) a (2.4) vidíme, že okamžik t_2 je shodný s t_1 , když platí:

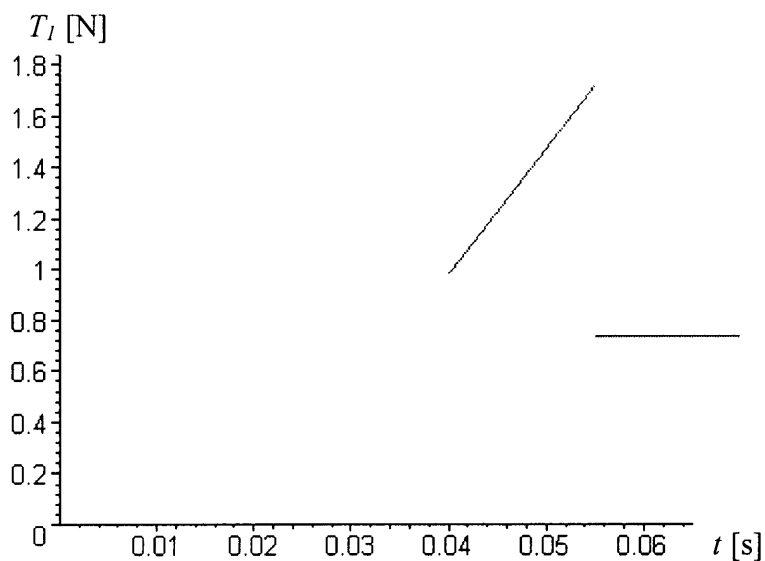
$$f_{s1} + f_{d2} \leq f_{s2} \quad (2.7)$$

Nyní již můžeme přistoupit ke konkrétním výpočtům.

a) $t_1 < t_2$

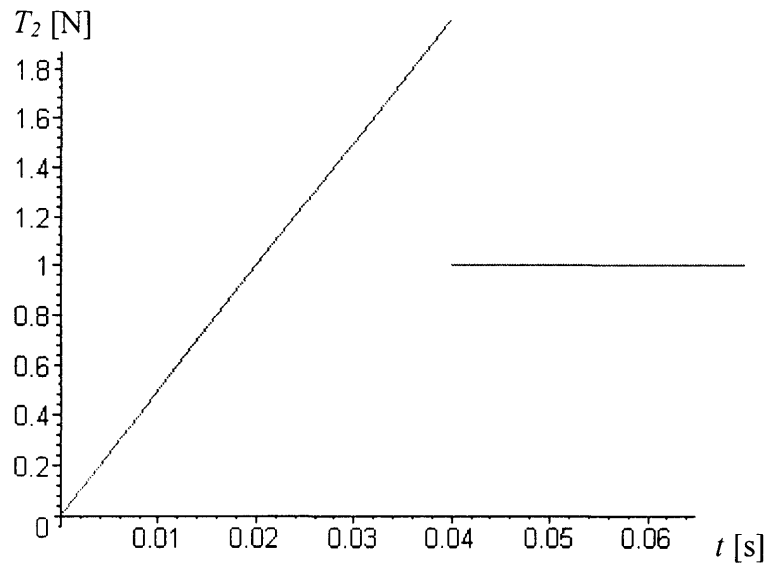
Hned na začátku můžeme určit průběh třecích sil a výsledné síly působící na těleso 2 ($F_2 = m_2 \cdot a_2$). Použili jsme zde hodnoty reálného experimentu (parametry.2.1, viz. str.17)

Graf závislosti velikosti třecí síly T_1 na čase (v intervalu $\langle 0; 0.04 \rangle$ s je $T_1 = 0$).



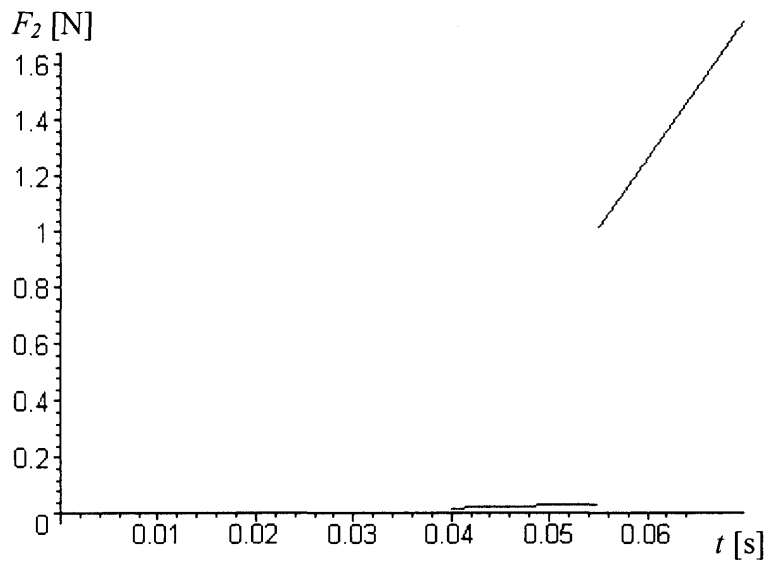
graf.2.2

Graf závislosti velikosti třecí síly T_2 na čase.



graf.2.3

Jak je vidět z grafu 2.4 v závislosti této síly na čase v okamžicích t_1 a t_2 jsou výrazné skoky, související se změnami statického tření na dynamické (v intervalu $\langle 0; 0.04 \rangle$ s je $F_2 = 0$).



graf.2.4

První interval:

Pro interval 1 jsme již stanovili, že se tělesa 1 ani 2 nepohybují vůči podložce ani vůči sobě.

Druhý interval:

Pohyb těles zde popisují rovnice (2.2) v časovém intervalu $\langle t_1 ; t_2 \rangle$. Jejím řešením dostaneme časovou závislost společné polohy těles 1 a 2 vůči podložce na čase:

$$x(t) = \frac{1}{6} \frac{(At - m_1 \cdot g \cdot f_{s2} - m_2 \cdot g \cdot f_{s2})^2 (At - 3m_1 \cdot g \cdot f_{d2} - 3m_2 \cdot g \cdot f_{d2} + 2m_1 \cdot g \cdot f_{s2} + 2m_2 \cdot g \cdot f_{s2})}{(m_1 + m_2) \cdot A^2} \quad (2.8)$$

Časovou závislost získáme i pro rychlost:

$$v(t) = \frac{\partial x(t)}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{(At - m_1 \cdot g \cdot f_{s2} - m_2 \cdot g \cdot f_{s2})(At - 2m_1 \cdot g \cdot f_{d2} - 2m_2 \cdot g \cdot f_{d2} + m_1 \cdot g \cdot f_{s2} + m_2 \cdot g \cdot f_{s2})}{(m_1 + m_2) \cdot A} \quad (2.9)$$

Závislosti (2.8) a (2.9) jsou výstupem z programu Maple pro zadané počáteční podmínky.

Třetí interval:

Pohyb těles zde popisuje soustava rovnic (2.5) v časovém intervalu $(t_2 ; \infty)$. Její řešení určuje časovou závislost polohy jednotlivých těles vůči podložce. Na tomto místě uvedeme pouze obecné řešení soustavy rovnic (2.5), partikulární řešení s použitím pouze proměnných vstupujících do výpočtu uvádět nebudeme, protože je příliš nepřehledné, ale později si uvedeme toto řešení pro konkrétní případ, kde použijeme číselné konstanty.

Obecné řešení (2.5):

$$x_1(t) = C_1 + C_2 \cdot t + \frac{1}{2} t^2 \cdot g \cdot f_{d1}$$

$$x_2(t) = \frac{1 - 6 \cdot C_3 \cdot m_2 - 6 \cdot C_4 \cdot t \cdot m_2 - A \cdot t^3 + 3t^2 \cdot m_1 \cdot g \cdot f_{d1} + 3t^2 \cdot m_1 \cdot g \cdot f_{d2} + 3t^2 \cdot m_2 \cdot g \cdot f_{d2}}{m_2} \quad (2.10)$$

Nyní ukážeme jak by vypadalo řešení pro konkrétní případ, kde je samozřejmě nutné uvést všechny parametry, které do výpočtu vstupují a mají samozřejmě význam i pro provedení případného experimentu.

Vstupní parametry:

$g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$	$m_1 = 0,50 \text{ kg}$	$m_2 = 0,01 \text{ kg}$
$A = 50$	$f_{s1} = 0,35$	$f_{s2} = 0,40$
	$f_{d1} = 0,15$	$f_{d2} = 0,20$

parametry.2.1

Kde A - konstanta úměrnosti ; g - tíhové zrychlení ; m_1 , m_2 - hmotnosti těles 1 a 2 ; f_{s1} , f_{d1} - koeficienty statického a dynamického tření mezi tělesem 1 a tělesem 2 ; f_{s2} , f_{d2} - koeficienty statického a dynamického tření mezi tělesem 2 a podložkou.

Jestliže budeme považovat počáteční stav soustavy za takový, že všechna její tělesa mají nulové polohy a rychlosti, pak můžeme řešení uvést v tomto tvaru:

V intervalu 1 nedochází k žádnému pohybu.

V intervalu 2 je závislost polohy na čase tato:

$$x(t) = 16,339t^3 - 0,981t^2 + 0,005 \quad (2.11)$$



Závislost rychlosti na čase:

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = 49.020t^2 - 1.962t \quad (2.12)$$

V intervalu 3 jsou závislosti poloh a rychlostí tyto:

Polohy:

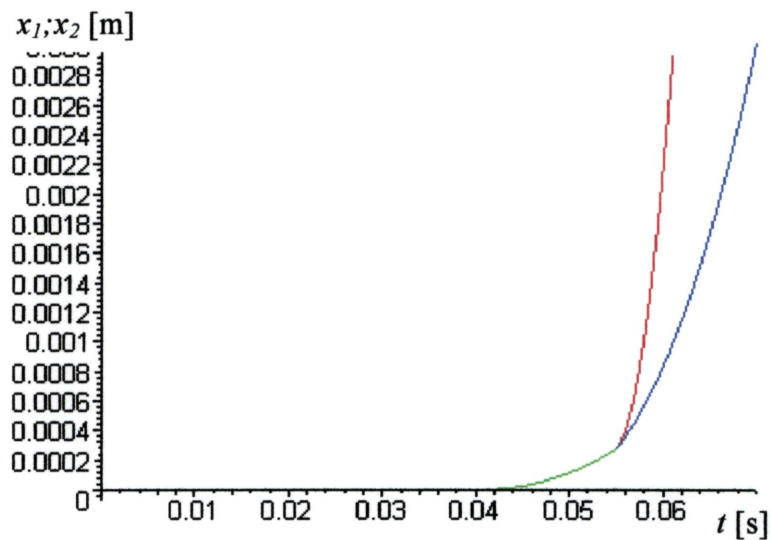
$$x_1(t) = 65,36t^3 - 4,905t^2 + 0,027t + 0,003 \quad (2.13)$$

$$x_2(t) = 898,694t^3 - 5,641t^2 + 2,092t + 0,015$$

Známe-li nyní závislosti poloh a rychlostí těles, můžeme je znázornit i graficky.

Graf závislosti poloh těles 1 a 2 na čase vůči podložce:

(získáme zkombinováním funkčních závislostí (2.11) a (2.13) v odpovídajících intervalech)



graf.2.5

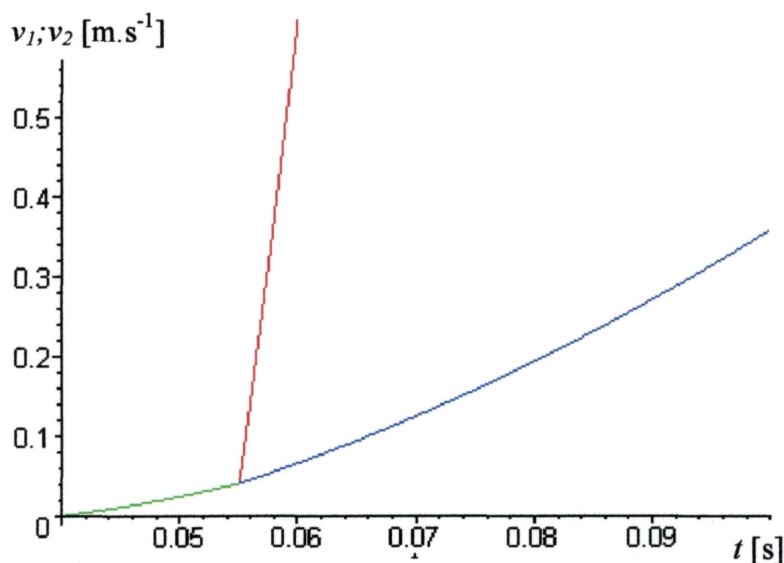
Rychlosti:

$$v_1(t) = \frac{dx_1(t)}{dt} = 49.012t^2 - 0.491t - 0.810 \quad (2.14)$$

$$v_2(t) = \frac{dx_2(t)}{dt} = 2549.020t^2 - 175.599t + 1.984$$

Graf závislosti rychlostí na čase vůči podložce:

(získáme zkombinováním funkčních závislostí (2.12) a (2.14) v odpovídajících intervalech)



graf.2.6

Zelená křivka vyjadřuje společný pohyb těles 1 a 2 , modrá křivka vyjadřuje pohyb tělesa 1 (vázy) od okamžiku t_2 , červená křivka vyjadřuje pohyb tělesa 2 (papíru) od téhož okamžiku.

Nespojitost v okamžiku t_2 mezi zelenou a modrou křivkou není příliš patrná, ale pokud bychom vypočetli hodnoty prvních derivací podle času zelené a modré křivky v bodě t_2 , zjistili bychom, že v tomto bodě se funkce jak souřadnice, tak rychlosti mění skokem (tj. derivace se nerovnají).

b) $t_1 = t_2$

Situace se na rozdíl od předchozího změní tak, že vypadne druhý interval, tj. $\langle t_1; t_2 \rangle$. Má tedy smysl uvažovat pouze o dějích v třetím intervalu.

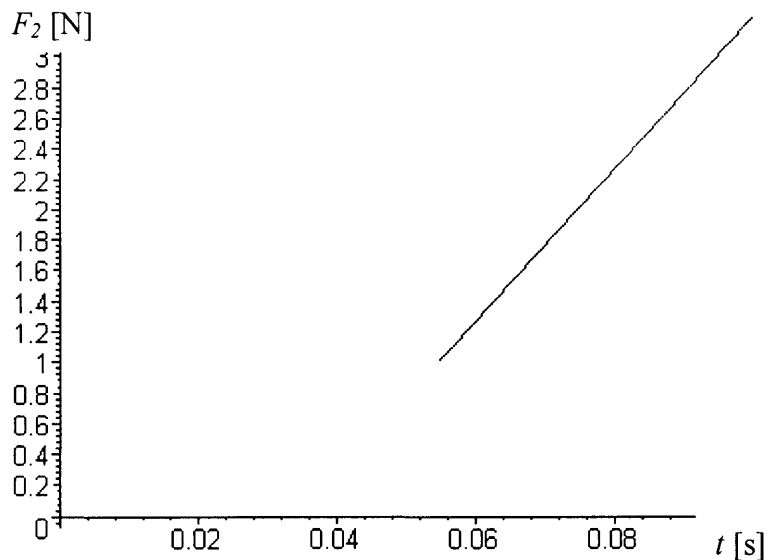
Pro to aby splynuly okamžiky t_1 a t_2 musí být splněna podmínka (2.7), například zadáním těchto vstupních parametrů:

$g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$	$m_1 = 0,50 \text{ kg}$	$m_2 = 0,01 \text{ kg}$
$A = 50$	$f_{s1} = 0,35$	$f_{s2} = 0,55$
	$f_{d1} = 0,15$	$f_{d2} = 0,20$

parametry.2.2

Průběhy třecích sil T_1 a T_2 budou shodné s případem a), až na směrnice a okamžik přechodu ze statického na dynamické tření (použijeme parametry.2.2).

V tomto případě je v grafu závislosti celkové síly F_2 působící na těleso 2 pouze jeden skok.



graf.2.7

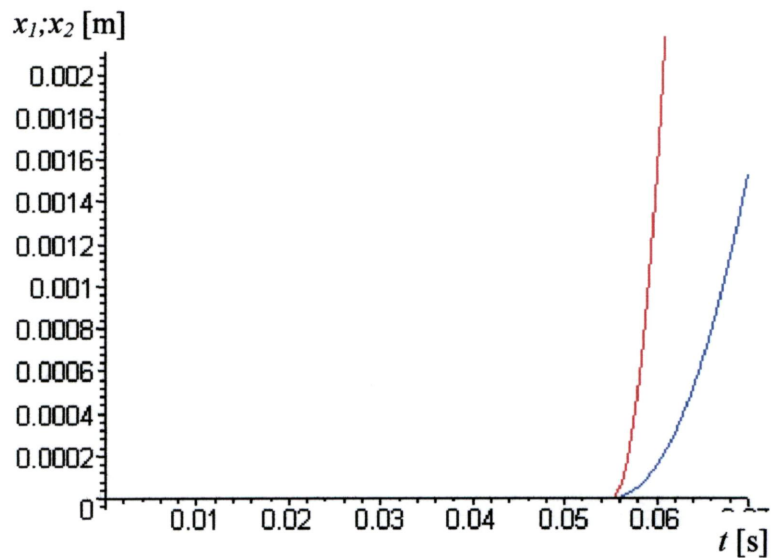
Závislosti poloh a rychlostí v závislosti na čase těles 1 a 2:

Polohy:

$$x_1(t) = 65,36t^3 - 4,905t^2 - 0,054t + 0,007 \quad (2.15)$$

$$x_2(t) = 898,694t^3 - 92,459t^2 + 2,011t + 0,0196$$

Graf závislosti poloh v závislosti na čase těles 1 a 2:



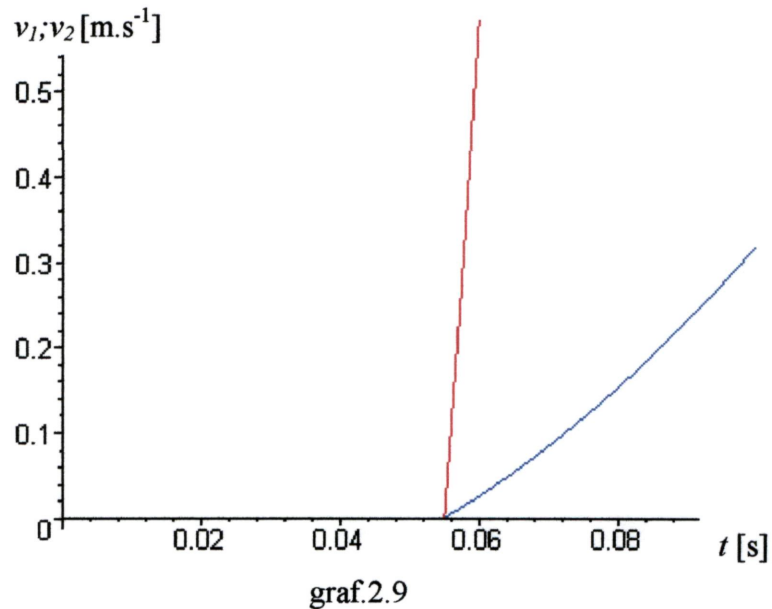
graf.2.8

Rychlosti:

$$v_1(t) = \frac{dx_1(t)}{dt} = 49,020t^2 - 0,490t - 0,121$$

$$v_2(t) = \frac{dx_2(t)}{dt} = 2549,020t^2 - 175,599t + 1,944$$

Graf závislosti rychlostí v závislosti na čase těles 1 a 2:



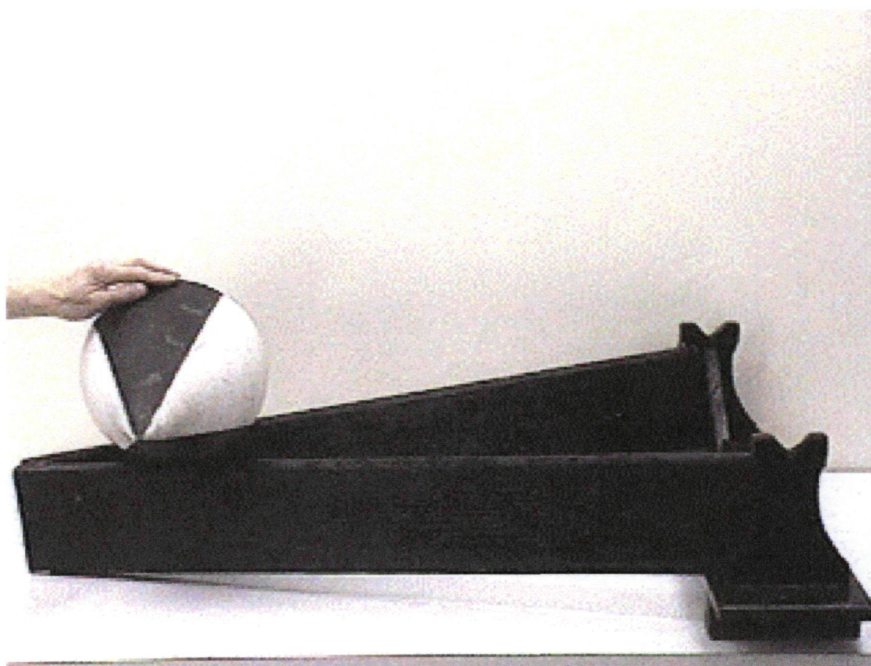
Jak si zajisté pozorný čtenář všimnul neuvažujeme děje, které by nastaly v momentě, kdy těleso 1 (váza) dospěje na konec podložky a začne se z ní sesouvat, což v našem modelu znamená, že jak podložka, tak i těleso 2 (papír) jsou nekonečné části rovnoběžných polorovin. V tomto momentu by se tato úloha rozvětvila do několika dalších částí podle toho, jak by se těleso 1 chovalo v částečném kontaktu s tělesem 2 a podložkou. Tato situace by však pro běžného čtenáře byla příliš nepřehledná a překročila by rámeček jevů, které jsme chtěli objasnit.

3. Těleso pohybující se po nakloněné rovině nahoru.

V této kapitole se budeme zabývat pohybem tělesa, které se pohybuje po nakloněné rovině nahoru. Tento pohyb je pouze zdáním, protože, jak víme, každá soustava má tendenci přecházet do stavu s minimální energií. Touto úlohou můžeme ukázat, že při prvním pohledu na věc není vždy zřejmé, proč se daná soustava chová „jaksi podivně“.

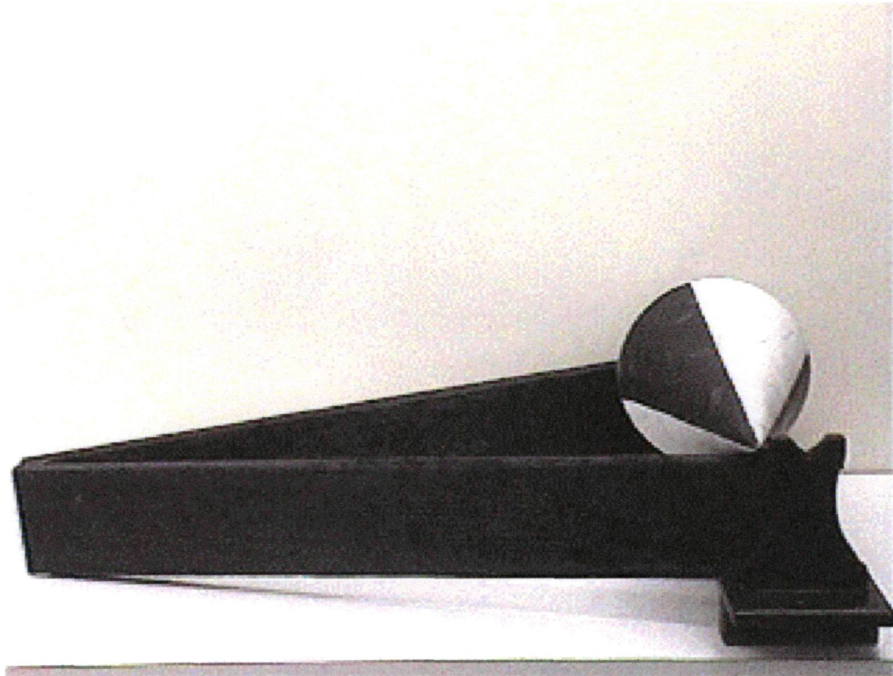
Naše soustava se skládá z nakloněné roviny, kterou tvoří dvě rozbíhající se kolejnice, a na nich umístěného dvojkuželu (tj. dvou kuželů stejných rozměrů slepených k sobě podstavami, viz. obr.3.1).

Jestliže tento pokus provedeme, vidíme, že se dvojkužel valí po kolejnicích tak, že se styčné body dvojkužele s kolejnicemi pohybují vzhůru po přímce o stejném sklonu jako je úhel vodorovné roviny s kolejnicemi.



obr.3.1

Po proběhnutí děje se bude kužel nacházet v horní části nakloněné roviny (viz. obr.3.2). Obvyklý komentář k tomuto pokusu se omezuje na konstatování, že se nejedná o žádný paradox, neboť těžiště valčího se dvojkůžele klesá. Pokusme se však popsat trajektorii těžiště i rotační pohyb dvojkůžele.



obr.3.2

Chceme-li úlohu řešit kvantitativně, musíme sestavit pohybové rovnice dvojkůžele a určit vazební podmínku mezi translačním a úhlovým zrychlením. K tomu je třeba najít křivku, po níž se pohybuje těžiště dvojkůžele a křivku, kterou vytvoří na kuželi dotykový bod s kolejnicí.

Umístíme souřadnicové osy tak, aby osa x byla orientována po směru pohybu dvojkůžele a ležela ve rovině tvořené kolejnicemi, osa y měla směr rotační osy symetrie dvojkůžele a osa z měla směr normály k rovině tvořené kolejnicemi. Počátek soustavy souřadnic umístíme do těžiště dvojkůžele, právě když leží hroty na kolejnicích.

Stanovení křivky po níž se pohybuje těžiště dvojkužele:

Pro odvození pohybu těžiště použijeme podmínku dotyku kuželové plochy s kolejnicemi (není nutné řešit dotyk s oběma kolejnicemi, stačí vyřešit pouze pro jednu, protože úloha je symetrická).

Souřadnice polohy těžiště označíme:

$$T = [\xi; 0; \zeta]$$

Rovnice kuželové plochy:

$$\left(\frac{y-h}{h}\right)^2 = \frac{(x-\xi)^2 + (z-\zeta)^2}{R^2}$$

kde R je poloměr podstavy kužele a h jeho výška. Označme dále $\mu = \frac{R}{h} = \operatorname{tg} \vartheta$ tangentu vrcholového úhlu kužele (ϑ je úhel mezi osou kužele a libovolnou povrchovou přímkou).

Po úpravě:

$$\mu^2 (y-h)^2 = (x-\xi)^2 + (z-\zeta)^2 \quad (3.1)$$

Rovnice přímky reprezentující kolejnici:

$$\begin{aligned} y &= x \operatorname{tg} \alpha + h \\ z &= 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

kde α je úhel mezi kolejnicí a osou úhlu sevřeného kolejnicemi (viz. obr.3.4).

Společné body, tj. dosazení rovnice přímky do rovnice kuželové plochy:

$$\mu^2 x^2 \operatorname{tg}^2 \alpha = (x - \xi)^2 + \zeta^2$$

po úpravě:

$$x^2 (1 - \mu^2 \operatorname{tg}^2 \alpha) - 2x\xi + \xi^2 + \zeta^2 = 0 \quad (3.3)$$

Dotyk přímky s kuželovou plochou nastává právě tehdy, je-li diskriminant kvadratické rovnice nulový:

$$\xi^2 - (1 - \mu^2 \operatorname{tg}^2 \alpha)(\xi^2 + \zeta^2) = 0 \quad (3.3a)$$

$$\xi^2 \mu^2 \operatorname{tg}^2 \alpha - (1 - \mu^2 \operatorname{tg}^2 \alpha) \zeta^2 = 0$$

Pak je-li:

a) $1 - \mu^2 \operatorname{tg}^2 \alpha > 0$

$$\zeta = \pm \frac{\mu \operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1 - \mu^2 \operatorname{tg}^2 \alpha}} \xi \quad (3.4)$$

Těžiště dvojkužele se pohybuje po přímce.

Znaménko - vyhovuje, v případě + se kužel nachází pod kolejnicí.

b) $1 - \mu^2 \operatorname{tg}^2 \alpha < 0$

V tomto případě vyhovuje rovnici (3.3a) pouze řešení: $\xi = 0$; $\zeta = 0$

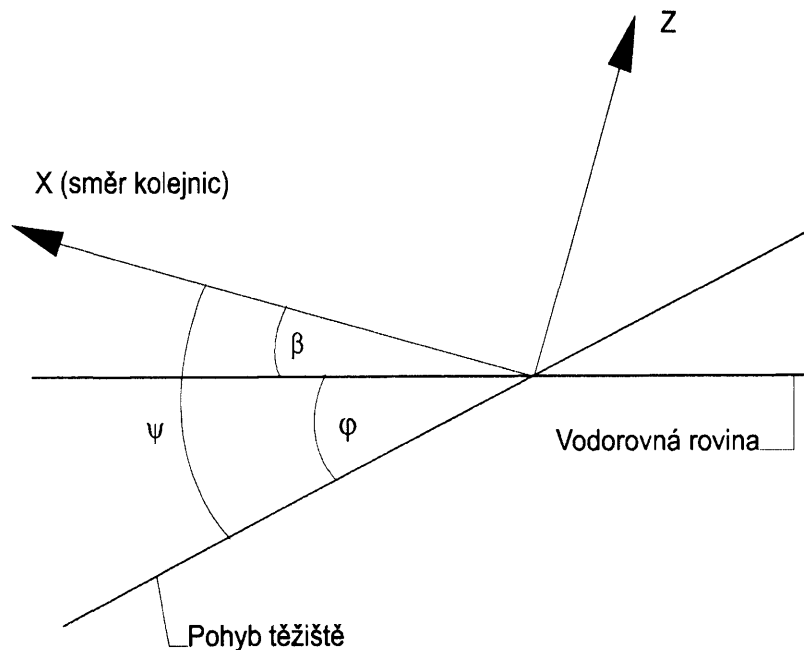
c) $1 - \mu^2 \operatorname{tg}^2 \alpha = 0$

Rovnici (3.3a) vyhovuje řešení: $\xi = 0$; ζ libovolné, z rovnice (3.3) dostáváme $\zeta = 0$.

Odvodili jsme směrnici přímky, po níž se pohybuje těžiště v souřadnicové soustavě popsané výše, nyní provedeme transformaci souřadnic do soustavy takové, která bude vůči původní pootočená o úhel β , a to tak, že osa x bude ležet ve vodorovné rovině, osa y zůstane v původním směru a osa z se pootočí v rovině xz o úhel β . Touto transformací získáme směrnici přímky, po níž klesá těžiště, vzhledem k vodorovné rovině.

Směrnice přímky v původních souřadnicích je $-tg\psi$, kde

$$tg\psi = \frac{\mu tg\alpha}{\sqrt{1 - \mu^2 tg^2\alpha}} \quad (3.5)$$



obr. 3.3

Z obr. 3.3 je patrné, že naším úkolem je zjistit $\operatorname{tg}\varphi$, tj. sklon přímky pohybu těžiště vzhledem k vodorovné rovině.

$$\varphi = \psi - \beta$$

ze součtových vzorců vyplývá:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\operatorname{tg}\psi - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\psi \cdot \operatorname{tg}\beta}$$

užitím (3.5) dostaneme:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\frac{\mu \operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1 - \mu^2 \operatorname{tg}^2 \alpha}} - \operatorname{tg}\beta}{1 + \frac{\mu \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}{\sqrt{1 - \mu^2 \operatorname{tg}^2 \alpha}}}$$

po úpravě:

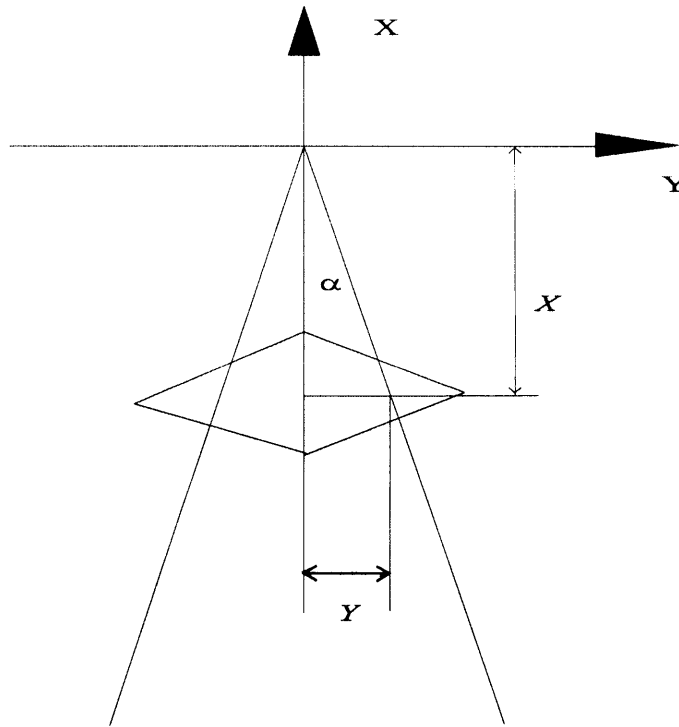
$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\mu \operatorname{tg}\alpha - \sqrt{1 - \mu^2 \operatorname{tg}^2 \alpha} \cdot \operatorname{tg}\beta}{\sqrt{1 - \mu^2 \operatorname{tg}^2 \alpha} + \mu \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta} \quad (3.6)$$

Pro realizaci experimentu je nutné zaručit podmínku, aby se těžiště dvojkužele pohybovalo po přímce s negativním sklonem, tj. je nutné, aby odchylka roviny tvořené kolejnicemi vůči vodorovné rovině, byla menší než odchylka přímky pohybu těžiště od vodorovné roviny. Tuto podmínku lze vyjádřit vztahem:

$$\operatorname{tg}\beta < \frac{\mu \operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1 - \mu^2 \operatorname{tg}^2 \alpha}} \quad (3.7)$$

Nyní stanovíme křivku, kterou při pohybu vytvoří na kuželové ploše body jejího dotyku s kolejnicemi. Tato křivka se nazývá zobecněná šroubovice.

Přistoupíme tedy k odvození parametrické rovnice této křivky:
Zajímají nás souřadnice dotykového bodu kolejnice s kuželem.



obr.3.4

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg} \alpha \Rightarrow y = x \cdot \operatorname{tg} \alpha \quad (3.8)$$

Vyplyvá z podobnosti trojúhelníků:

$$\frac{R}{h} = \frac{r}{h-y} \Rightarrow r = (h-y) \frac{R}{h} \quad (3.9)$$

R - poloměr podstavy kužele

h - výška kužele

r - okamžitý poloměr

ϕ - úhel otočení kužele

Platí:

$$dx = r \cdot d\phi$$

Po dosazení z (3.8) a (3.9) dostaneme:

$$dx = (h - y) \frac{R}{h} d\phi$$

$$\frac{dy}{\operatorname{tg}\alpha} = (h - y) \frac{R}{h} d\phi$$

$$\frac{dy}{d\phi} = \operatorname{tg}\alpha \cdot (h - y) \frac{R}{h}$$

Provedeme substituci:

$$y - h = \tau \Rightarrow dy = d\tau$$

A získáme diferenciální rovnici prvního řádu se separovatelnými proměnnými:

$$\frac{d\tau}{d\phi} = -\operatorname{tg}\alpha \frac{R}{h} \tau$$

Po separaci získáme:

$$\frac{d\tau}{\tau} = -\operatorname{tg}\alpha \frac{R}{h} d\phi$$

Řešením dostáváme obecné řešení:

$$\ln \tau = -\operatorname{tg}\alpha \frac{R}{h} \phi + C$$

$$\tau = A \cdot e^{-\operatorname{tg}\alpha \frac{R}{h} \phi}$$

Zpětnou substitucí $y = \tau + h$ dostaneme:

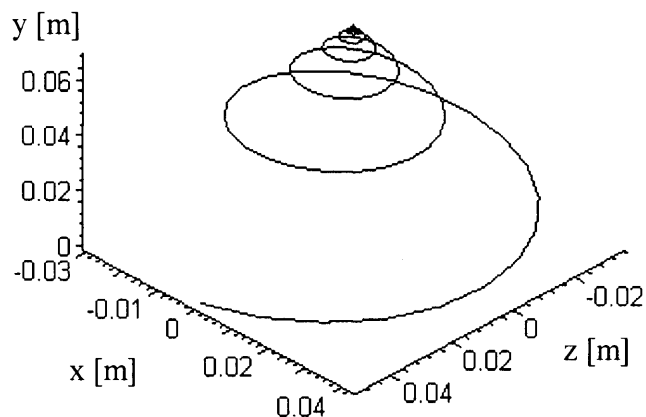
$$y = A.e^{-\frac{R}{h}\alpha\phi} + h$$

Dosazením počátečních podmínek ($\phi = 0, y = 0$) a dosazením za y do (3.9) získáme:

$$y = h(1 - e^{-\frac{R}{h}\alpha\phi}) \quad (3.10)$$

$$r(\phi) = (h - y)\frac{R}{h} = R.e^{-\mu.\alpha\phi}$$

Rovnice (3.10) jsou parametrické rovnice křivky (obecné šroubovice na kuželové ploše) v cylindrických souřadnicích, kterou opíše dotkový bod kolejnice s kuželem. Pro námi konkrétně užitý kužel a pro deset otáček vypadá tato křivka takto:



Stanovení vazební podmínky mezi translačním a úhlovým zryhlením:

Jestliže bychom valili po námi užitých kolejnicích válec, pohyboval by se dotkový bod válce a kolejnice po šroubovici vzhledem k pozorovateli spojenému

s nerotující těžišťovou soustavou a souvislost mezi translačním a úhlovým zrychlením by byla dána známým vztahem:

$$\varepsilon = \frac{a}{r}$$

My ovšem valíme po kolejnicích dvojkužel, proto musíme vazební podmínku mezi úhlovým zrychlením a zrychlením těžiště dvojkužele elementárně odvodit. Předpokládáme, že se dvojkužel valí bez prokluzu.

Nyní se opět vracíme do souřadnicové soustavy používané na začátku článku, protože bude pro naše následující výpočty jednodušší.

Má-li kvadratická rovnice (3.3) pouze jediné řešení, pak bod dotyku má souřadnice:

$$\begin{aligned} x &= \frac{\xi}{1 - \mu^2 \operatorname{tg}^2 \alpha} \\ y &= \frac{\xi \operatorname{tg} \beta}{1 - \mu^2 \operatorname{tg}^2 \alpha} + h \\ z &= 0 \end{aligned} \tag{3.11}$$

$$\begin{aligned} dx &= \frac{d\xi}{1 - \mu^2 \operatorname{tg}^2 \alpha} \\ dy &= \frac{d\xi \operatorname{tg} \alpha}{1 - \mu^2 \operatorname{tg}^2 \alpha} \end{aligned} \tag{3.12}$$

Elementární dráhu uraženou těžištěm dl lze vyjádřit pomocí (3.4):

$$dl^2 = d\xi^2 + d\zeta^2 = d\xi^2 + \left[\frac{\mu \operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1 - \mu^2 \operatorname{tg}^2 \alpha}} d\xi \right]^2$$

$$dl = \frac{d\xi}{\sqrt{1 - \mu^2 \operatorname{tg}^2 \alpha}} \quad (3.13)$$

Odpovídající elementární posunutí bodu dotyku ds po kolejnici lze vyjádřit pomocí (3.12):

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = d\xi^2 \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \beta}{(1 - \mu^2 \operatorname{tg}^2 \alpha)^2} = d\xi^2 \frac{1}{\cos^2 \alpha \cdot (1 - \mu^2 \operatorname{tg}^2 \alpha)^2}$$

$$ds = \frac{d\xi}{\cos \alpha \cdot (1 - \mu^2 \operatorname{tg}^2 \alpha)}$$

Použitím vztahu (3.13) dostaneme:

$$ds = \frac{dl}{\cos \alpha \cdot \sqrt{1 - \mu^2 \operatorname{tg}^2 \alpha}} \quad (3.14)$$

Je zřejmé, že:

$$ds = \frac{r \cdot d\phi}{\cos \alpha} \quad (3.15)$$

$$\frac{dl}{dt} = v \quad \text{translační rychlost těžiště} \quad (3.16)$$

$$\frac{d\phi}{dt} = \omega \quad \text{úhlová rychlost rotace dvojkužele} \quad (3.17)$$

Srovnáním vztahů (3.14), (3.15) a dosazením ze vztahů (3.16), (3.17) získáme vazební podmínku pro rychlost těžiště a úhlovou rychlost rotace dvojkužele:

$$\frac{v}{\sqrt{1-\mu^2tg^2\alpha}} = r.\omega \quad (3.18)$$

Derivováním vztahu (3.18) dostaneme vazební podmínku pro zrychlení těžiště a úhlové zrychlení rotace dvojkužele:

$$\frac{a}{\sqrt{1-\mu^2tg^2\alpha}} = r.\varepsilon + \dot{r}.\omega \quad (3.19)$$

Po dosazení rovnic (3.10) do vztahů (3.18) a (3.19) dostaneme vazební podmínky jako funkce úhlu otočení dvojkužele ϕ .

$$v = R.\omega.\sqrt{1-\mu^2tg^2\alpha}.e^{-\mu.tg\alpha.\phi} \quad (3.20)$$

$$a = R.\varepsilon.\sqrt{1-\mu^2tg^2\alpha}.e^{-\mu.tg\alpha.\phi} - \mu.tg\alpha.R.\omega^2.\sqrt{1-\mu^2tg^2\alpha}.e^{-\mu.tg\alpha.\phi} \quad (3.21)$$

$$a = (\varepsilon - \omega^2 \mu.tg\alpha) R.\sqrt{1-\mu^2tg^2\alpha}.e^{-\mu.tg\alpha.\phi}$$

Stanovili jsme vazební podmínky (3.20) a (3.21) a můžeme tedy přistoupit k popisu pohybu dvojkužele.

Nejprve pro ilustraci vyjádříme úhlovou a translační rychlost v závislosti na ϕ . K tomuto použijeme energetické úvahy, a to konkrétně zákon zachování mechanické energie.

Jednotlivé příspěvky mechanické energie, které připadají v našem případě v úvahu jsou: tíhová potenciální energie, translační kinetická energie a rotační kinetická energie. Můžeme tedy zákon zachování mechanické energie zapsat ve tvaru:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\omega^2 + mgw \quad (3.22)$$

w - značí okamžitou výšku těžiště nad nulovou hladinou potenciální energie. Nulovou hladinu tíhové potenciální energie umístíme na úroveň těžiště na počátku experimentu, tj. v okamžiku, kdy $\phi = 0$, $v = 0$, $\omega = 0$. Pak $E = 0$.

Ve vztahu (3.22) vystupují jako neznámé translační rychlost v a úhlová rychlost ω , jednu však můžeme vyjádřit pomocí druhé z podmínky (3.20). Nyní můžeme tedy napsat rovnici pro jednu neznámou ω :

$$\frac{1}{2}mR^2 \cdot \omega^2 \cdot (1 - \mu^2 tg^2 \alpha) \cdot e^{-2\mu tg \alpha \cdot \phi} + \frac{1}{2}J\omega^2 + mgw = 0 \quad (3.23)$$

Vytknutím ω z prvních dvou členů a převedením výrazu pro potenciální energii dostaneme:

$$\omega^2 \left[\frac{1}{2}mR^2 \cdot (1 - \mu^2 tg^2 \alpha) \cdot e^{-2\mu tg \alpha \cdot \phi} + \frac{1}{2}J \right] = -mgw \quad (3.24)$$

Pro přehlednost označme výraz $\mu tg \alpha$ jako A (současně je $A = \sin \psi$)

Rovnici (3.24) prepíšeme do tvaru:

$$\omega^2 \left[\frac{1}{2}mR^2 \cdot (1 - A^2) \cdot e^{-2\mu tg \alpha \cdot \phi} + \frac{1}{2}J \right] = -mgw \quad (3.25)$$

Abychom mohli dále rovnici (3.25) upravit, je nutné vypočítat moment setrvačnosti dvojkužele. Moment setrvačnosti rotačního tělesa vytvořeného rotací plochy křivočarého lichoběžníka ohraničeného obloukem čáry $y = f(x)$, $x \in \langle a, b \rangle$, $a < b$, je:

$$I_x = \frac{\pi}{2} \rho \int_a^b y^4 dx$$

kde ρ je hustota materiálu dvojkužele.

V našem případě je pro jednu polovinu dvojkužele $y = \left(\frac{R}{h} x \right)$, tj:

$$I_x = \frac{\pi}{2} \rho \int_0^h \left(\frac{R}{h} x \right)^4 dx = \frac{1}{10} \pi \rho R^4 h \quad (3.26)$$

Moment setrvačnosti jsme určili pouze pro polovinu dvojkužele, proto pro celý dvojkužel bude jeho hodnota dvojnásobná, tj: $J = 2I_x$.

Vyjádříme I_x ve tvaru:

$$I_x = \text{const.} \cdot m \cdot R^2 \quad (3.27)$$

Toto dosáhneme jestliže vyjádříme hmotnost kužele ve vztahu (3.27) a porovnáme ze vztahem (3.26). Takto získáme vyjádření pro moment setrvačnosti dvojkužele:

$$J = \frac{3}{5} \cdot m \cdot R^2 \quad (3.28)$$

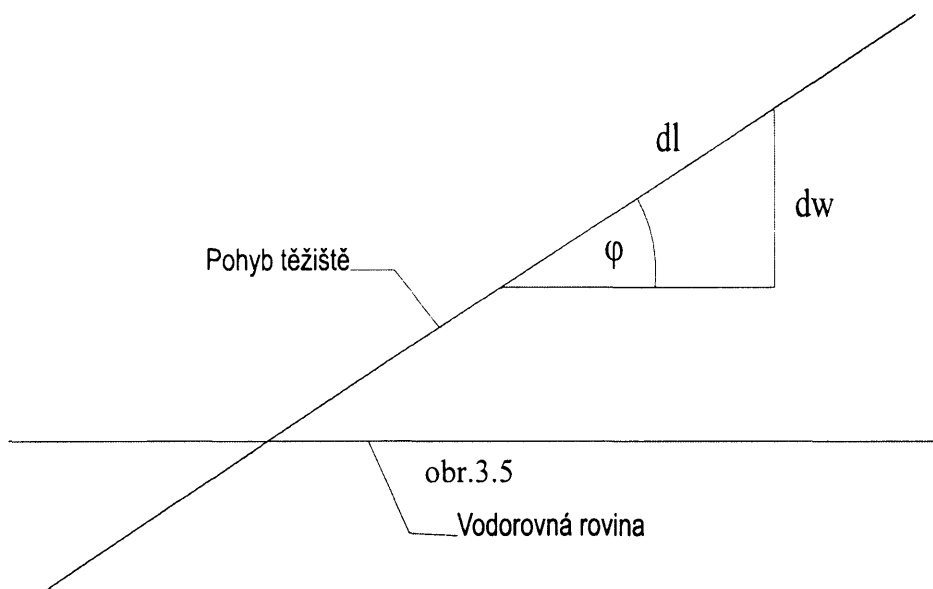
Dosadíme-li do vztahu (3.25) dostaneme:

$$\omega^2 \left[\frac{1}{2} m R^2 \cdot (1 - A^2) \cdot e^{-2\mu \cdot g \alpha \cdot \phi} + \frac{3}{10} \cdot m \cdot R^2 \right] = -mgw$$

Celou rovnici vydělíme m , vynásobíme 2 a použijeme vztah (3.18):

$$\omega^2 \left[r^2 \cdot (1 - A^2) + \frac{3}{5} \cdot R^2 \right] = -2gw \quad (3.29)$$

Pro konečné vyjádření úhlové rychlosti ω jako funkce úhlu otočení ϕ nám zbývá vyjádřit pouze okamžitou výšku w těžiště dvojkužele nad nulovou hladinou potenciální energie.



Z obr. 3.5 je vidět, že:

$$dw = dl \cdot \sin \varphi \quad (3.30)$$

Porovnáním vztahů (3.14) a (3.15) získáme výraz pro dl a po dosazení do vztahu (3.30) dostaneme:

$$dw = r(\varphi) \sqrt{1 - A^2} \sin \varphi \cdot d\varphi$$

Za r dosadíme ze vztahu (3.10):

$$dw = R \cdot e^{-\mu \cdot g \cdot \alpha \cdot \varphi} \sqrt{1 - A^2} \sin \varphi \cdot d\varphi \quad (3.31)$$

Funkci w získáme integrací výrazu (3.31) v mezích od $\varphi=0$ do φ a po zpětném dosazení r ze vztahu (3.10) dostaneme:

$$w = -R \cdot \sin \varphi \frac{\sqrt{1 - A^2}}{A} \left(1 - \frac{r(\varphi)}{R} \right) \quad (3.32)$$

Vztah (3.32) dosadíme do rovnice (3.29):

$$\omega^2 \left[r^2(\phi) \cdot (1 - A^2) + \frac{3}{5} \cdot R^2 \right] = 2 \cdot g \cdot R \cdot \sin \varphi \frac{\sqrt{1 - A^2}}{A} \left(1 - \frac{r(\phi)}{R} \right)$$

Jednoduchou úpravou získáme vyjádření úhlové rychlosti ω jako funkce úhlu otočení ϕ dvojkužele:

$$\omega = \sqrt{\frac{2 \cdot g \cdot R \cdot \sin \varphi \frac{\sqrt{1 - A^2}}{A} \left(1 - \frac{r(\phi)}{R} \right)}{\left[r^2(\phi) \cdot (1 - A^2) + \frac{3}{5} \cdot R^2 \right]}} \quad (3.33)$$

kde $r(\phi) = R \cdot e^{-\mu \cdot g \cdot \alpha \cdot \phi}$

Abychom získali vyjádření translační rychlosti těžiště dvojkužele stačí použít vztahy (3.18) a (3.33):

$$v = r \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot g \cdot R \cdot \sin \varphi \frac{\sqrt{1 - A^2}}{A} \left(1 - \frac{r(\phi)}{R} \right)}{\left[r^2(\phi) \cdot (1 - A^2) + \frac{3}{5} \cdot R^2 \right]}} \cdot \sqrt{1 - A^2} \quad (3.34)$$

Do této chvíle jsme pracovali s naprosto obecným dvojkuželem a obecnou nakloněnou rovinou sestavenou se stoupajícími a rozbíhajícími se kolejnic. Jestliže však chceme mít názornou představu o tom, jak se pohybuje skutečný dvojkužel po skutečných kolejnicích, budeme je muset použít i v našich výpočtech. Použitý dvojkužel a kolejnice mají tyto parametry:

$$R = 3,98 \text{ cm}$$

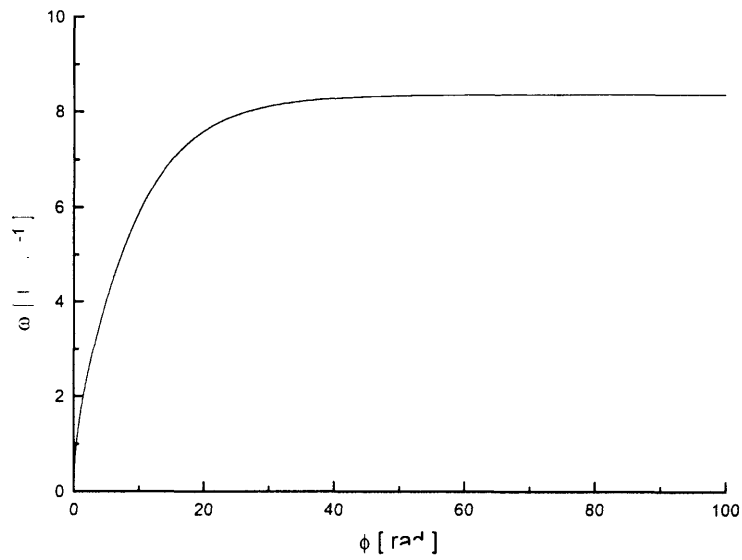
$$h = 5,50 \text{ cm}$$

$$\alpha = 0,131 \text{ rad}$$

$$\beta = 0,087 \text{ rad}$$

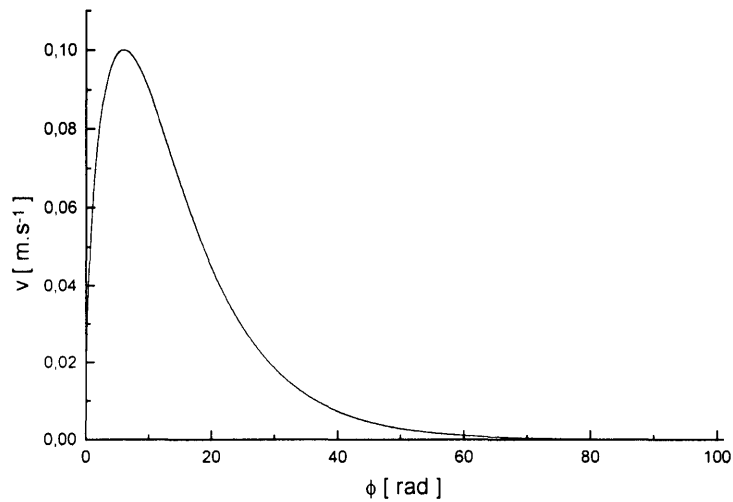
$$g = 9,81 \text{ ms}^{-2}$$

Jestliže použijeme tyto parametry a vyneseme do grafu závislost úhlové rychlosti ω na otočení dvojkužele ϕ o 100 rad, získáme takovouto závislost:



graf.3.1

Vyneseme-li podobně velikost translační rychlosti těžiště, získáme tuto závislost:



graf.3.2

Na grafu 3.1 je patrné, že hodnota úhlové rychlosti ω konverguje pro $\phi \rightarrow \infty$ (tj. dosáhne jí po nekonečném počtu otáček) k určité hodnotě, v našem experimentu je:

$$\lim_{\phi \rightarrow \infty} \omega = \sqrt{\frac{10}{3} g \cdot \sin \phi \frac{\sqrt{1-A^2}}{A \cdot R}} = 8,36 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

Z grafu 3.2 je velmi dobře vidět, že pro tutéž situaci konverguje hodnota velikosti translační rychlosti těžiště dvojkuželu k hodnotě 0, tj.:

$$\lim_{\phi \rightarrow \infty} v = 0$$

Tyto limitní případy popisují situaci, že se dvojkužel otáčí konstantní úhlovou rychlostí na hrotech a nijak jinak se nepohybuje.

Další zajímavostí v grafu 3.2 je, že hodnota velikosti rychlosti v nabývá v při určité hodnotě úhlu otočení ϕ své maximální hodnoty. Tento jev zcela zřejmý, jestliže si uvědomíme, že na počátku děje je $v = 0$ a na jeho konci taktéž.

My se nyní budeme zabývat tím, pro jaký úhel ϕ je v maximální:

Podmínka pro maximum funkce:

$$\frac{dv}{d\phi} = 0$$

Vyřešíme-li tuto rovnici vzhledem k ϕ , získáme jedinou reálnou hodnotu:

$$\phi = 5.975 \text{ rad}$$

Pro tuto hodnotu ϕ je velikost translační rychlosti:

$$v = 0,1 \text{ ms}^{-1}$$

Ukázali jsme jak se chovají úhlová a translační rychlost dvojkužele v závislosti na úhlu otočení ϕ .

Nyní sestavíme pohybovou rovnici pro dvojkužel. K tomu však potřebujeme znát všechny síly, které na dvojkužel působí a jejich momenty.

Na dvojkužel budou působit normálové tlakové síly od kolejnic (\vec{N}_+ a \vec{N}_-), síly tření (\vec{T}_+ a \vec{T}_-) a síla tíhová.

V následujícím se budeme věnovat normálovým silám:

Spočteme normály ke kuželové ploše v bodech dotyku dvojkužele s kolejnicemi:

Jestliže je v rovnici (3.3) je nulový diskriminant, pak body dotyku mají souřadnice:

$$Q_{\pm} = \left(\frac{\xi}{1 - \mu^2 \operatorname{tg}^2 \alpha}, \pm \left[h + \frac{\xi \operatorname{tg} \alpha}{1 - \mu^2 \operatorname{tg}^2 \alpha} \right], 0 \right)$$

Parametrické rovnice kuželové plochy, na níž leží bod Q_+ jsou (použijeme-li x a z jako parametry a vyjádříme y):

$$x = x$$

$$y = h - \frac{1}{\mu} \sqrt{(x - \xi)^2 + (z - \zeta)^2}$$

$$z = z$$

Tečné vektory ke kuželové ploše:

$$\vec{\tau}_x = \left(1, \frac{\partial y}{\partial x}, 0 \right)$$

$$\vec{\tau}_z = \left(0, \frac{\partial y}{\partial z}, 1 \right)$$

Normála:

$$\vec{\tau}_x \times \vec{\tau}_z = \left(\frac{\partial y}{\partial x}, -1, \frac{\partial y}{\partial z} \right) = \left(-\frac{1}{\mu} \frac{x - \xi}{\sqrt{(x - \xi)^2 + (z - \zeta)^2}}, -1, \frac{z - \zeta}{\sqrt{(x - \xi)^2 + (z - \zeta)^2}} \right)$$

Výpočet jednotkové vnitřní normály v bodě dotyku Q_+ , tj. směr síly \vec{N}_+ :

$$\left(\vec{\tau}_x \times \vec{\tau}_z\right)_Q = \left(\begin{array}{c} -\frac{1}{\mu} \frac{\mu^2 \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 - \mu^2 \operatorname{tg}^2 \alpha} \xi \frac{1}{\sqrt{\xi^2 \left(\frac{\mu^2 \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 - \mu^2 \operatorname{tg}^2 \alpha}\right)^2 + \xi^2 \frac{\mu^2 \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 - \mu^2 \operatorname{tg}^2 \alpha}}}, -1, \\ -\frac{1}{\mu} \frac{\mu \operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1 - \mu^2 \operatorname{tg}^2 \alpha}} \xi \frac{1}{\sqrt{\xi^2 \left(\frac{\mu^2 \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 - \mu^2 \operatorname{tg}^2 \alpha}\right)^2 + \xi^2 \frac{\mu^2 \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 - \mu^2 \operatorname{tg}^2 \alpha}}} \end{array} \right)$$

Po úpravě:

$$\left(\vec{\tau}_x \times \vec{\tau}_z\right)_Q = \left(\operatorname{tg} \alpha, -1, \frac{\sqrt{1 - \mu^2 \operatorname{tg}^2 \alpha}}{\mu} \right) \quad (3.35)$$

Velikost normály:

$$\left|\vec{\tau}_x \times \vec{\tau}_z\right|_Q = \left(\operatorname{tg}^2 \alpha + 1 + \frac{1 - \mu^2 \operatorname{tg}^2 \alpha}{\mu^2} \right) = \frac{\sqrt{1 + \mu^2}}{\mu}$$

Směry normálových sil \vec{N}_+ a \vec{N}_- (\vec{N}_+ a \vec{N}_- jsou symetrické podle roviny xz):

$$\vec{n}_+ = \frac{\mu}{\sqrt{1 + \mu^2}} \left(\operatorname{tg} \alpha, -1, \frac{\sqrt{1 - \mu^2 \operatorname{tg}^2 \alpha}}{\mu} \right) \quad (3.36)$$

$$\vec{n}_- = \frac{\mu}{\sqrt{1 + \mu^2}} \left(\operatorname{tg} \alpha, 1, \frac{\sqrt{1 - \mu^2 \operatorname{tg}^2 \alpha}}{\mu} \right)$$

Normálové síly:

$$\begin{aligned}\vec{N}_+ &= \frac{\mu N}{\sqrt{1+\mu^2}} \left(\operatorname{tg} \alpha, -1, \frac{\sqrt{1-\mu^2 \operatorname{tg}^2 \alpha}}{\mu} \right) \\ \vec{N}_- &= \frac{\mu N}{\sqrt{1+\mu^2}} \left(\operatorname{tg} \alpha, 1, \frac{\sqrt{1-\mu^2 \operatorname{tg}^2 \alpha}}{\mu} \right)\end{aligned}\quad (3.37)$$

Statické třecí síly:

$$\begin{aligned}\vec{T}_+ &= T(-\cos \alpha, -\sin \alpha, 0) \\ \vec{T}_- &= T(-\cos \alpha, \sin \alpha, 0)\end{aligned}\quad (3.38)$$

Tíhová síla:

$$m\vec{g} = (-mg \sin \alpha, 0, -mg \cos \alpha)$$

Celková působící síla:

$$\vec{F} = \left(-2T \cdot \cos \alpha + \frac{2\mu N}{\sqrt{1+\mu^2}} \operatorname{tg} \alpha - m \cdot g \cdot \sin \beta, 0, \frac{2N\sqrt{1-\mu^2 \operatorname{tg}^2 \alpha}}{\sqrt{1+\mu^2}} - m \cdot g \cdot \cos \beta \right) \quad (3.39)$$

Momenty sil vůči těžišti:

souřadnice těžiště:

$$H = (\xi, 0, -\xi \cdot \operatorname{tg} \psi)$$

ramena sil \vec{r}_\pm (po úpravě):

$$\vec{r}_{\pm} = Q_{\pm} - H = (x_0, \pm y_0, z_0) = \left(\xi \cdot \text{tg}^2 \psi, \pm \left[h + \xi \frac{\text{tg} \alpha}{\cos^2 \psi} \right], \xi \cdot \text{tg} \psi \right)$$

Moment síly \vec{N}_+ vůči těžišti:

$$\vec{r}_+ \times \vec{N}_+ = \frac{\mu N}{\sqrt{1 + \mu^2}} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_0 & y_0 & z_0 \\ \text{tg} \alpha & -1 & \frac{1}{\mu} \cos \psi \end{vmatrix} = \frac{\mu N}{\sqrt{1 + \mu^2}} \left(\frac{y_0}{\mu} \cos \psi + z_0, z_0 \cdot \text{tg} \alpha - \frac{x_0}{\mu} \cos \psi, -x_0 - y_0 \cdot \text{tg} \alpha \right)$$

Moment síly \vec{N}_- vůči těžišti:

$$\vec{r}_- \times \vec{N}_- = \frac{\mu N}{\sqrt{1 + \mu^2}} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_0 & -y_0 & z_0 \\ \text{tg} \alpha & 1 & \frac{1}{\mu} \cos \psi \end{vmatrix} = \frac{\mu N}{\sqrt{1 + \mu^2}} \left(-\frac{y_0}{\mu} \cos \psi - z_0, z_0 \cdot \text{tg} \alpha - \frac{x_0}{\mu} \cos \psi, x_0 + y_0 \cdot \text{tg} \alpha \right)$$

Celkový moment normálových sil vůči těžišti (po dosazení a úpravě):

$$\vec{M}_N = \vec{r}_+ \times \vec{N}_+ + \vec{r}_- \times \vec{N}_- = \vec{0}$$

Celkový moment statických třecích sil vůči těžišti:

$$\vec{M}_T = \vec{r}_+ \times \vec{T}_+ + \vec{r}_- \times \vec{T}_- = (0, -2T \cdot z_0 \cdot \cos \alpha, 0) = (0, -2T \cdot \xi \cdot \text{tg} \psi \cdot \cos \alpha, 0)$$

Moment tíhové síly vůči těžišti:

$$\vec{M}_G = \vec{0}$$

Výsledný moment sil vůči těžišti:

$$\vec{M}_{\text{vysl.}} = (0, -2T \cdot \xi \cdot \text{tg} \psi \cdot \cos \alpha, 0) \quad (3.40)$$

Ze vztahů (3.11) a (3.13) dostaneme závislost x -ové souřadnice těžiště na těžištěm uražené vzdálenosti:

$$\xi = l \cdot \cos \psi - \frac{h \cdot \cos^2 \psi}{\text{tg} \alpha} \quad (3.41)$$

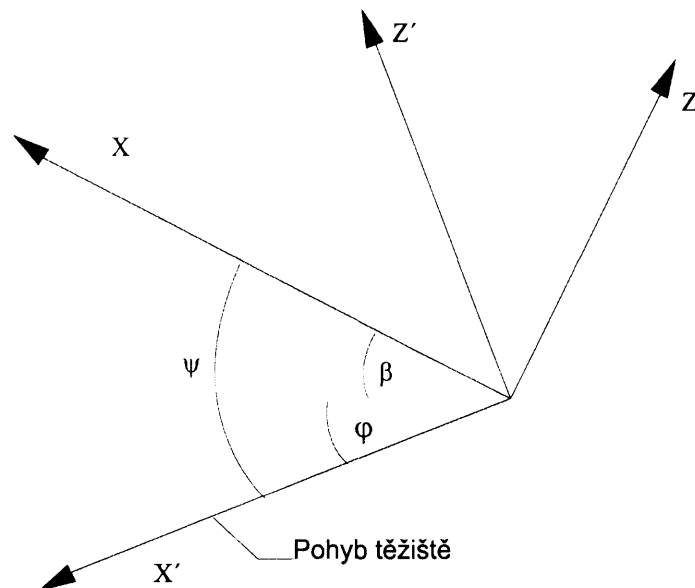
Můžeme psát:

$$dl = r(\phi) \cdot \cos \psi \cdot d\phi = R \cdot e^{-\phi \cdot \sin \psi} \cos \psi \cdot d\phi$$

$$l = \int_0^{\phi} R \cdot e^{-\phi \cdot \sin \psi} \cos \psi \cdot d\phi = \frac{R \cdot \cos \psi}{\sin \psi} (1 - e^{-\phi \sin \psi}) \quad (3.42)$$

$$\vec{M}_{\text{vysl.}} = \left(0, -2T \cdot \frac{R \cdot \cos^2 \psi}{\sin \psi} (1 - e^{-\phi \sin \psi}) - \frac{h \cdot \cos^2 \psi}{\text{tg} \alpha} \cdot \text{tg} \psi \cdot \cos \alpha, 0 \right) \quad (3.43)$$

Nyní máme vše potřebné, abychom mohli sestavit pohybové rovnice. Matematické pohodlí nás však vede k provedení ještě jedné transformace souřadnic, a to otočení souřadnicové soustavy kolem osy y o úhel ψ (viz obr.3.6)



obr.3.6

$$(x', z') = (x, z) \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi \\ -\sin \psi & \cos \psi \end{pmatrix} = (x \cdot \cos \psi - z \cdot \sin \psi, x \cdot \sin \psi + z \cdot \cos \psi)$$

$$\vec{F} = (F_x \cdot \cos \psi - F_z \cdot \sin \psi, 0, F_x \cdot \sin \psi + F_z \cdot \cos \psi)$$

$$F'_x = \left(-2T \cdot \cos \alpha + \frac{2\mu N}{\sqrt{1+\mu^2}} \operatorname{tg} \alpha - m \cdot g \cdot \sin \beta \right) \cos \psi - \left(\frac{2N \sqrt{1-\mu^2 \operatorname{tg}^2 \alpha}}{\sqrt{1+\mu^2}} - m \cdot g \cdot \cos \beta \right) \sin \psi$$

po úpravě:

$$F'_x = -2T \cdot \cos \alpha \cdot \cos \psi + m \cdot g \cdot \sin \varphi \quad (3.44)$$

$$F'_z = -2T \cdot \cos \alpha \cdot \sin \psi + \frac{2N}{\sqrt{1+\mu^2}} - m \cdot g \cdot \cos \varphi$$

Z vazební podmínky, tj., že dvojkužel se pohybuje pouze ve směru osy x , vyplývá $F'_z = 0$, tj.

$$-2T \cdot \cos \alpha \cdot \sin \psi + \frac{2N}{\sqrt{1+\mu^2}} - m \cdot g \cdot \cos \varphi = 0$$

Z předchozího vztahu přímo dostaneme souvislost mezi velikostí normálové a třecí síly:

$$N = \sqrt{1+\mu^2} \left(T \cdot \mu \cdot \sin \alpha + \frac{1}{2} m \cdot g \cdot \cos \varphi \right) \quad (3.45)$$

Nyní můžeme zapsat pohybové rovnice:

$$ma = -2T \cdot \cos \alpha \cdot \cos \psi + m \cdot g \cdot \sin \varphi \quad (3.46a)$$

$$J\varepsilon = -2T \cdot \operatorname{tg} \psi \cdot \cos \alpha \cdot \xi \quad (3.46b)$$

Z rovnice (3.46b) a pomocí vztahů (3.41) a (3.42) vyjádříme velikost třecí síly T :

$$T = \frac{J \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}}{2R \cdot \cos \alpha \cdot \cos \psi \cdot e^{-\phi \cdot \sin \psi}} \quad (3.47)$$

Dosazením vztahu (3.47) do rovnice (3.46a) dostaneme:

$$ma = -\frac{J \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}}{R \cdot e^{-\phi \cdot \sin \psi}} + m \cdot g \cdot \sin \varphi \quad (3.48)$$

Úpravou vztahu (3.48) pomocí výrazu (3.21) získáme nelineární diferenciální rovnici druhého řádu:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \left[m \cdot R^2 \cdot \cos \psi \cdot e^{-2\phi \cdot \sin \psi} + J \right] - \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 \left[m \cdot R^2 \cdot \cos \psi \cdot \sin \psi \cdot e^{-2\phi \cdot \sin \psi} \right] - m \cdot g \cdot R \cdot \sin \varphi \cdot e^{-\phi \cdot \sin \psi} = 0$$

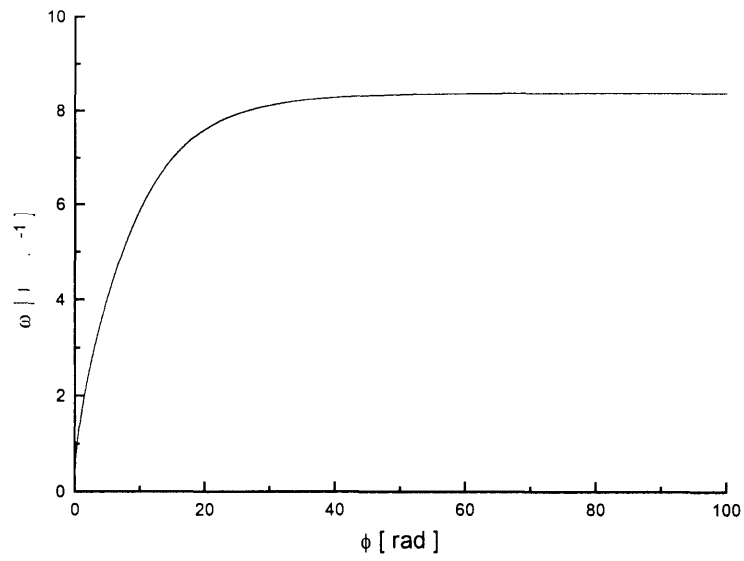
Pomocí vztahu (3.28) ještě upravíme na tvar:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \left[R^2 \cdot \cos \psi \cdot e^{-2\phi \cdot \sin \psi} + \frac{3}{5} R^2 \right] - \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 \left[R^2 \cdot \cos \psi \cdot \sin \psi \cdot e^{-2\phi \cdot \sin \psi} \right] - g \cdot R \cdot \sin \varphi \cdot e^{-\phi \cdot \sin \psi} = 0 \quad (3.49)$$

Rovnici (3.49) nelze vyřešit analyticky, proto ji budeme řešit numerickými metodami.

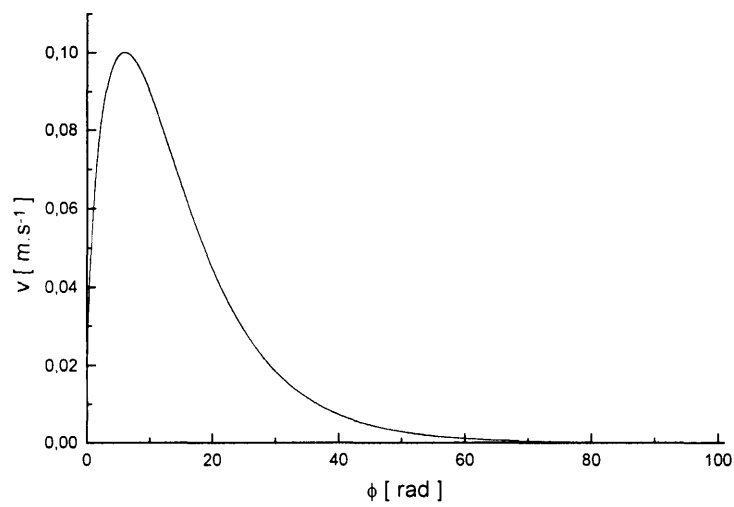
Po výpočtu v programu Octave získáme jako výstup tyto grafické závislosti:

Graf závislosti úhlové rychlosti ω na úhlu otočení ϕ .



graf.3.3

Graf závislosti translační rychlosti těžiště v na úhlu otočení ϕ .

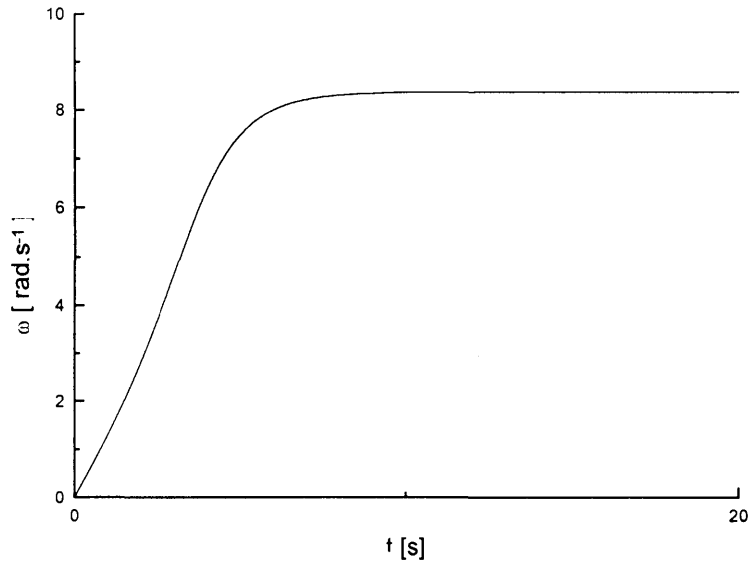


graf.3.4

Porovnáním grafů 3.1, 3.3 a grafů 3.2, 3.4, je patrné, že řešením rovnice (3.49) jsme dospěli ke stejným výsledkům jako pomocí zákona zachování mechanické energie (3.22).

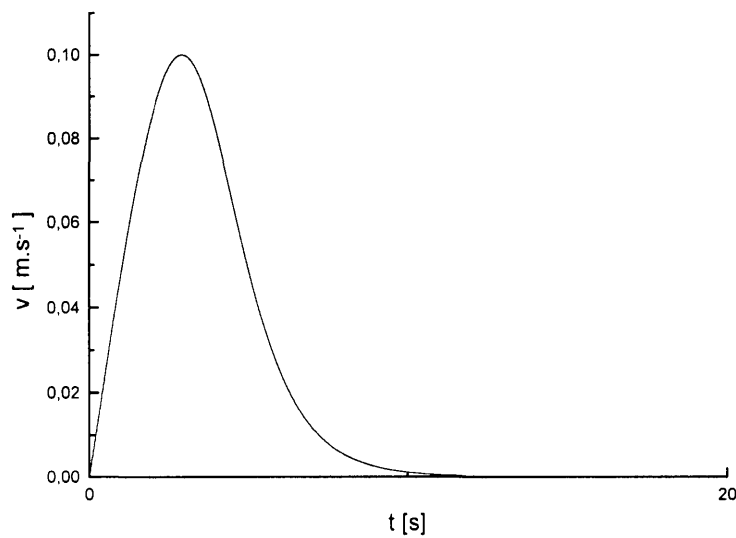
Řešení rovnice (3.49) nám však umožňuje graficky znázornit i časové závislosti.

Graf závislosti úhlové rychlosti ω na čase t .



graf.3.5

Graf závislosti translační rychlosti těžiště v na čase t .



graf.3.6

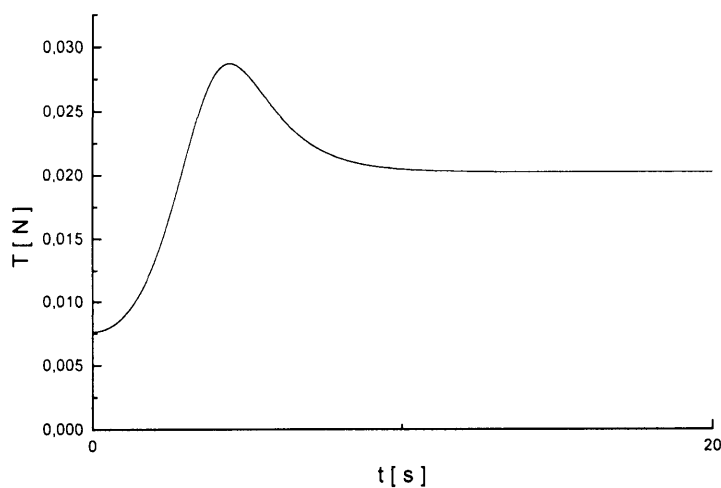
Na začátku výpočtů jsme předpokládali, že se dvojkůžel pohybuje po kolejnicích bez prokluzu. Vztah (3.47) udává velikost třecí síly T a vztah (3.45) velikost normálové síly N . Jestliže se má dvojkůžel valit bez prokluzu musí být splněna podmínka:

$$N \cdot f_s > T, \quad (3.50)$$

kde f_s je koeficient statického tření mezi dvojkůželem a kolejnicemi.

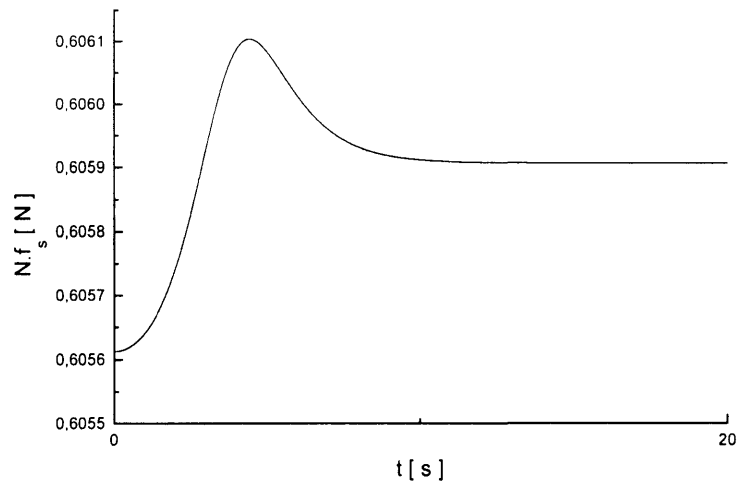
V našem experimentu je dvojkůžel ocelový a kolejnice mosazné. Koeficient statického tření mezi těmito dvěma materiály má hodnotu $f_s = 0,2$. V našem experimentu k prokluzu nedojde, jak je vidět z grafů 3.7 a 3.8.

Graf závislosti třecí síly na čase.



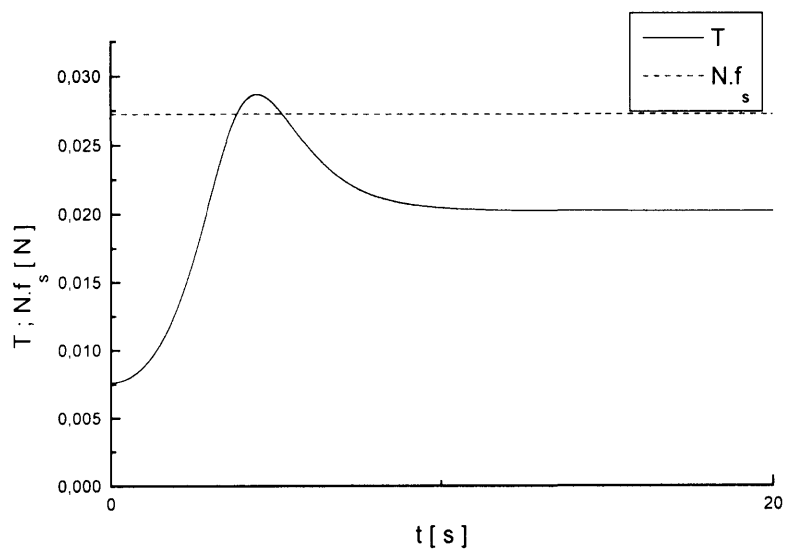
graf.3.7

Graf závislosti normálové síly na čase.



graf.3.8

K prokluzu by mohlo dojít v případě, kdy by koeficient smykového tření mezi dvojkůželem a kolejnicemi byl menší než 0,0095. Na grafu 3.9 vidíme závislost třecí a normálové síly na čase v případě, že koeficient statického tření mezi dvojkůželem a kolejnicemi má hodnotu $f_s = 0,009$. Tato situace nemůže v reálném experimentu nastat, protože nejnižší koeficienty statického tření jsou alespoň třikrát větší (např. ocel na ledu - $f_s = 0,027$).



graf.3.9

V našem experimentu se tedy dvojkužel pohybuje v souladu s pohybovými rovnicemi, s tím, že zanedbáváme valivé tření.



Seznam literatury

- [1] Matematika, fyzika, informatika. číslo 2, ročník 1992/93, strana 79 - 85

- [2] Feynmanove prednášky z fyziky. Zv. 1 / *R.P. Feynman, R.B. Leighton, M. Sands*. - 1. vyd.. - Bratislava : Alfa, c1980 - 451 s.

- [3] Fyzika : vysokoškolská učebnice obecné fyziky. Část 1 , Mechanika / *David Halliday, Robert Resnick, Jearl Walker* : redakce českého překladu *Jana Musilová, Jan Obdržálek, Petr Dub*. - 6. vyd..- Brno : VUTIUM, 2000 - xvi, 328 s.

- [4] <http://www.physics.umd.edu/deptinfo/facilities/lecdem/demolst.htm#o1>
(obr.3.1 a obr.3.2)

List oprav

V kapitole 2. Jak vytrhnout ubrus zpod svatební hostiny, na straně 18 a 21, jsou špatně uvedeny koeficienty v rovnicích (2.13) a (2.15). Zde jsou uvedeny odpovídající rovnice ve správném tvaru:

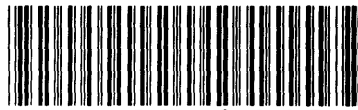
$$x_1(t) = 16,3339t^3 - 0,246t^2 - 0,81t + 0,003 \quad (2.13)$$

$$x_2(t) = 849,673t^3 - 87,800t^2 + 1,984t + 0,015$$

$$x_1(t) = 16,3339t^3 - 0,245t^2 - 0,121t + 0,007 \quad (2.15)$$

$$x_2(t) = 849,673t^3 - 87,800t^2 + 1,944t + 0,019$$

Knihovna PŘF MU



3 1 4 5 3 1 3 6 5 5

