1. ÚVOD

Fyzika patří spíše k předmětům, které studenti příliš v oblibě nemají. Připadá jim velmi složitá a hlavně nepraktická. Není divu. Když prolistujeme současnými středoškolskými učebnicemi a sbírkami (viz. Literatura), zjistíme, že formulace příkladů jsou opravdu velmi často odtržené od běžného života. Přitom slovo fyzika pochází z řeckého slova physis, což v překladu znamená příroda. Nebudeme pátrat, kdy a kde přestal význam slova fyzika odpovídat obsahu středoškolských učebnic a sbírek, ale budeme se zabývat otázkou, jak tuto nedokonalost odstranit. Jedinou možností, jak přesvědčit studenta, že fyzika není nudnou disciplínou, je ukázat, že do každodenního života kohokoliv z nás jednoduše patří.
Nejstarším oborem fyziky je mechanika, kterou se zabývali učenci již ve starověkém Řecku. Mechanika také tvoří vstupní bránu do středoškolské fyziky, neboť právě tento obor zasahuje do našich životů nejvíce a student tedy může porovnávat nabyté poznatky s vlastní zkušeností. Proto je nutné již v začátku studia na střední škole vyvrátit fámu o „nepochopitelném předmětu, který nemá s realitou nic společného“.
A to je cíl této diplomové práce. Chtěla bych ukázat, že příklady nemusí být jen rutinní a nudné, ale že mohou být zajímavé, vtipné a hlavně užitečné.

Diplomová práce je členěna podle jednotlivých odvětví mechaniky. Největší pozornost je ve sbírce věnována kapitolám Kinematika hmotného bodu a Dynamika hmotného bodu. Důvod je prostý: Vše se kolem nás pohybuje a je důležité bezpečně vědět, jak a proč. Následující kapitoly tvoří Mechanická práce a energie, Gravitační pole a Mechanika tuhého tělesa. Dalším tématickám okruhem mechaniky je Mechanika kapalin a plynů. V diplomové práci se této části však nevěnuji, neboť tímto tématem jsem se podrobně zabývala v ročníkové práci ([5]) .
Každá kapitola se skládá ze dvou podkapitol. První podkapitoly obsahují krátký teoretický přehled základních poznatků z dané části mechaniky. Těžiště práce tvoří podkapitoly druhé, které obsahují otázky a řešené i neřešené příklady na dané téma. Většina příkladů modeluje situace z běžného života, ale občas je zařazen i příklad standardní, jehož řešení má pro pochopení dané látky rovněž význam. Zejména v prvních dvou kapitolách se může čtenář setkat také s jednoduchými příklady typu „dosazení do vzorce“. Tyto příklady jsou ve sbírce zařazeny z toho důvodu, aby si středoškolský student uvědomil rozmanitost a možnosti aplikace mechaniky v nejrůznějších oborech. Sbírka obsahuje i některé rutinní příklady (např. v kapitole Gravitační pole), aby student získal také přímou představu o číselných výsledcích.
Velká část příkladů je doprovázena obrázky, které vystihují situaci ze zadání, neboť obrázek či fotografie je pravým důkazem použitelnosti fyziky v praxi. Pokud nebude řečeno jinak, jsou obrázky a údaje v zadání příkladů převzaty z [13]. Konstanty jsou vesměs převzaty z [8].
Práce je tvořena převážně vlastními otázkami a příklady, ale občas se stalo, že otázku či příklad, který jsem sama vymyslela, jsem později v uvedené literatuře v podobném znění objevila. V těchto případech uvádím odkaz na příslušný pramen.

Přála bych si, aby tato práce přiměla středoškolského studenta přiznat si, že fyzika není nudnou disciplínou. Mnoho štěstí při řešení!

2. KINEMATIKA HMOTNÉHO BODU

2.1. Přehled základních poznatků z kinematiky

Kinematika popisuje pohyb hmotného bodu bez ohledu na příčiny pohybu, přičemž hmotným bodem nahrazujeme těleso, jehož tvar a rozměry nejsou při daném pohybu podstatné. Hmotný bod je tedy pouze fyzikální model.
Mějme na paměti, že pohyb (resp. klid) je pojem relativní, tzn. záleží na vztažné soustavě, ve které pohyb (resp. klid) hmotného bodu sledujeme. Například zaparkovaný automobil je vzhledem k ostatním automobilům na parkovišti nebo vzhledem k okolním budovám v klidu, nepohybuje se. Avšak automobil se pohybuje spolu se Zemí kolem Slunce.

Než přistoupíme k řešení konkrétních příkladů, je nutné ujasnit si význam některých veličin a pojmů, které budeme později užívat.
V souvislosti s pojmem rychlost rozlišujeme :

- průměrnou rychlost $\vec{v}_p$,
- okamžitou rychlost $\vec{v}$,
- průměrnou dráhovou rychlost v_{pd},
- okamžitou dráhovou rychlost v_d [1].

Nyní si každý z předešlých pojmů postupně nadefinujeme a přiblížíme na ilustrativních příkladech.
Obecně je ale nutné uvědomit si, že první dvě rychlosti jsou vektorové fyzikální veličiny, tzn. obsahují informaci nejen o velikosti rychlosti, ale i o směru této fyzikální veličiny. Průměrná dráhová rychlost a okamžitá dráhová rychlost jsou skalární veličiny, a tudíž informaci o směru postrádají.

Průměrná rychlost $\vec{v}_p$ je definována jako podíl vektoru posunutí $\Delta\vec{r}$ v daném časovém intervalu Δt a délky tohoto intervalu. Tedy $\vec{v}_p = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$.

<u>Ilustrativní příklad 1</u>: Určete průměrnou rychlost chodce, který se vydal na nejkratší část turistického pochodu Praha-Prčice a zpět, víte-li, že cesta tam a zpátky trvala 8 hodin.

<u>Řešení</u>: $\Delta t = 8\text{h}$
$\vec{v}_p = ?$

Pro výpočet průměrné rychlosti $\vec{v}_p$ užijeme definiční vztah $\vec{v}_p = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$, proto je nutné nejdříve určit vektor posunutí

[1] Pojem průměrná dráhová rychlost a okamžitá dráhová rychlost je převzat z [12].

$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$. Turista se však vrací do výchozího bodu, tedy $\vec{r}_1 = \vec{r}_2$, tj. $\Delta\vec{r} = \vec{0}$. Po dosazení je $\vec{v}_p = \frac{\vec{0}\,\mathrm{km}}{8\,\mathrm{h}} = \vec{0}$.

Průměrná rychlost chodce je nulovým vektorem.

Komentář: Všimněte si, že pro náš výpočet nebylo nutné znát délku pochodu Praha-Prčice a zpět.

Z příkladu je patrné, že průměrná rychlost není příliš výstižnou charakteristikou pohybu. I když turista celý den někde pochodoval, trmácel se do kopce a zase z kopce, nemůžeme v tomto případě o konkrétním průběhu jeho pohybu mnoho říci. Pro získání lepší informace se zavádí další fyzikální veličiny, a to okamžitá rychlost $\vec{v}$, průměrná dráhová rychlost v_{pd} a okamžitá dráhová rychlost v_d.

Okamžitá rychlost $\vec{v}$ je dána podílem vektoru posunutí $\Delta\vec{r}$ ve velmi malém časovém intervalu Δt a délky tohoto intervalu. Okamžitá rychlost je tedy limitním případem průměrné rychlosti $\vec{v}_p$ pro velmi malý časový interval, tj. pro $\Delta t \to 0$.

Platí: $\vec{v} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$, kde $\Delta t \to 0$.

Okamžitá rychlost je nejvýstižnější charakteristikou pohybu, protože určuje, jak rychle se v daném okamžiku hmotný bod pohybuje, neboli určuje, jak rychle se v daném okamžiku mění jeho poloha s časem.

Velikost okamžité rychlosti značíme $|\vec{v}| = v$ a definujeme jako podíl velikosti vektoru posunutí a příslušného velmi krátkého časového intervalu.

Tedy $|\vec{v}| = v = \frac{|\Delta\vec{r}|}{\Delta t}$, kde $\Delta t \to 0$.

Velikost okamžité rychlosti již postrádá informaci o směru pohybu.

Kdybychom se vrátili k ilustrativnímu příkladu 1 a chtěli bychom určit okamžitou rychlost, resp. velikost okamžité rychlosti, museli bychom znát informaci o polohovém vektoru v každém okamžiku. Ze zadaných údajů tedy nelze vypočíst ani okamžitou rychlost v daném okamžiku, ani její velikost.

Průměrná dráhová rychlost v_{pd} je skalární fyzikální veličina, tudíž neobsahuje informaci o směru pohybu. Je určena celkovou dráhou Δs, kterou hmotný bod urazí nezávisle na směru pohybu za určitý časový interval Δt. Tedy[2]: $v_{pd} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$.

---

[2] Nyní může být středoškolský student zmaten, neboť pojem průměrná rychlost je ve většině současných středoškolských učebnic ([2], [11]) nesprávně definován jako skalární veličina, která je dána podílem celkové dráhy s a doby t, za kterou hmotný bod tuto dráhu urazí. Tedy $v_p = \frac{s}{t}$.

Porovnáme-li tuto definici s výše uvedenými, zjistíme, že autoři středoškolských učebnic měli zřejmě pod pojmem průměrná rychlost na mysli zde definovanou průměrnou dráhovou rychlost.

Ilustrativní příklad 2: Určete průměrnou dráhovou rychlost chodce, který se vydal na nejkratší část turistického pochodu Praha-Prčice, která měří 23 km, a zpět, víte-li, že cesta tam a zpátky trvala 8 hodin.

Řešení: $\Delta t = 10\ \text{h}$
$\Delta s = 46\ \text{km}$
$v_{pd} = ?$

Pro výpočet průměrné dráhové rychlosti užijeme definiční vztah $v_{pd} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{46\ \text{km}}{10\ \text{h}} = 4{,}6\ \text{km} \cdot \text{h}^{-1}$.
Průměrná dráhová rychlost chodce na trase Praha-Prčice a zpět je přibližně $4{,}6\ \text{km} \cdot \text{h}^{-1}$.

Komentář: Průměrná dráhová rychlost se od průměrné rychlosti liší také v tom, že je určena skutečně uraženou dráhou chodce. Započítává se ta dráha, kterou chodec skutečně ujde. Průměrnou rychlost ovšem definujeme pouze pomocí vektoru posunutí, který nemusí být vždy velikostně roven skutečně uražené dráze.

Okamžitá dráhová rychlost v_d je skalární veličina, která je limitním případem průměrné dráhové rychlosti v_{pd}. Je tedy určena celkovou dráhou Δs, kterou hmotný bod urazí ve velmi malém časovém intervalu Δt, pro který platí $\Delta t \to 0$.
Tedy $v_d = \frac{\Delta s}{\Delta t}$, kde $\Delta t \to 0$.
Tuto rychlost ukazuje například tachometr automobilu.
Z definice okamžité rychlosti a okamžité dráhové rychlosti plyne: $|\vec{v}| = v_d$.
Ze zadání ilustrativního příkladu 1 ani ze zadání ilustrativního příkladu 2 opět nelze vypočíst okamžitou dráhovou rychlost.

Po vyložení pojmu rychlost se zabývejme pojmem zrychlení.
Průměrné zrychlení $\vec{a}_p$ je vektorová fyzikální veličina, která je určena změnou rychlosti $\Delta\vec{v}$ hmotného bodu za určitý časový interval Δt. Tedy $\vec{a}_p = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$.

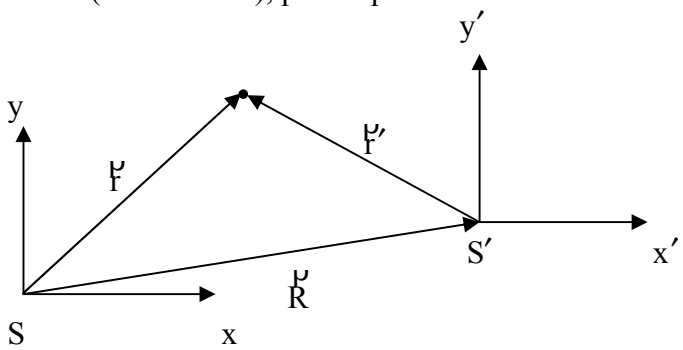
Okamžité zrychlení $\vec{a}$ je vektorová fyzikální veličina, která je limitním případem průměrného zrychlení $\vec{a}_p$ pro velmi malý časový interval Δt, tj. Pro $\Delta t \to 0$.
Tedy $\vec{a} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$, kde $\Delta t \to 0$.

Velikost okamžitého zrychlení značíme $|\vec{a}| = a$. Pro velikost okamžitého zrychlení platí vztah $|\vec{a}| = a = \frac{|\Delta\vec{v}|}{\Delta t}$, kde $|\Delta\vec{v}|$ je velikost změny rychlosti a $\Delta t \to 0$.

Nyní připomeneme některé důležité pojmy (resp. závěry) kinematiky. Jedná se zejména o skládání pohybů a klasifikaci pohybů

Skládání pohybů a rychlostí: Popis pohybu hmotného bodu závisí na volbě vztažné soustavy. Vzhledem k jedné vztažné soustavě může být hmotný bod v klidu, vzhledem k jiné se může určitým způsobem pohybovat a vzhledem k další může hmotný bod vykonávat úplně jiný druh pohybu. Hmotný bod tedy může konat vzhledem k různým vztažným soustavám různé pohyby. Např. cestující, který prochází rozjetým vlakem, se pohybuje vzhledem k vlaku, a protože se vlak pohybuje vzhledem k Zemi, pohybuje se vzhledem k Zemi i cestující. Země se navíc otáčí kolem své osy a obíhá kolem Slunce.

Ptejme se: Jak se pohybuje cestující vzhledem k Slunci? Pohyby se dají navzájem skládat následujícím způsobem: Mějme dvě vztažné soustavy S a S′, jejichž souřadnicové osy jsou stejně orientovány. Nechť $\vec{r}$ je polohový vektor hmotného bodu vzhledem k vztažné soustavě S, $\vec{r}'$ je polohový vektor téhož hmotného bodu vzhledem k vztažné soustavě S′ a nechť $\vec{R}$ značí posunutí počátků vztažných soustav S a S′ (viz. obr. 2.1), potom platí $\vec{r}' = \vec{r} - \vec{R} \Rightarrow \vec{r} = \vec{R} + \vec{r}'$.



Obr. 2.1

Pohyb hmotného bodu je charakterizován zejména svojí rychlostí. Věnujme tedy pozornost skládání rychlostí: Nechť $\vec{v}$ značí rychlost hmotného bodu vzhledem k vztažné soustavě S, $\vec{v}'$ je rychlost hmotného bodu vzhledem k vztažné soustavě S′ a nechť se vztažné soustavy vůči sobě pohybují konstantní rychlostí $\vec{V}$. Pak $\vec{v} = \vec{V} + \vec{v}'$.

Klasifikace pohybů: ⟨
- přímočaré (nemění se směr rychlosti) × křivočaré (mění se směr rychlosti)
- rovnoměrné (nemění se velikost rychlosti) × nerovnoměrné (mění se velikost rychlosti)

Rovnoměrný pohyb je pohyb, při kterém hmotný bod urazí za libovolně velké, ale pevně zvolené, časové intervaly stejné dráhy. Pro velikost rychlosti při tom platí $v = \frac{s}{t}$, kde s je dráha, kterou hmotný bod urazí za dobu t. Dráha rovnoměrného pohybu je dána vztahem $s = s_0 + vt$, kde s_0 je uražená dráha v počátečním čase $t = 0$. Vztah pro rychlost v a dráhu s platí jak pro přímočarý, tak i pro křivočarý pohyb. Všimněte si, že velikost rychlosti rovnoměrného přímočarého pohybu je totožná s průměrnou dráhovou rychlostí v_{pd} (zdůvodněte).

Rovnoměrně zrychlený (resp. zpomalený) pohyb je pohyb, při kterém hmotný bod za libovolně velké, ale pevně zvolené, časové intervaly zvětší (resp. zmenší) velikost své rychlosti o stejnou hodnotu. Pro velikost rychlosti takového pohybu platí $v = v_0 \pm at$, kde a je velikost zrychlení, a = konst., v_0 je počáteční rychlost. Dráhu rovnoměrně zrychleného (resp. zpomaleného) pohybu určíme ze vztahu $s = v_0 t \pm \frac{1}{2} at^2$. Vztahy opět platí pro přímočarý i pro křivočarý pohyb. Speciálním případem rovnoměrně zrychleného pohybu je **volný pád**, pro nějž $\vec{a} = \vec{g}$, kde $\vec{g}$ je tíhového zrychlení. Pro velikost tíhového zrychlení v naší zeměpisné šířce přibližně platí $g \approx 9{,}81\,m \cdot s^{-2}$.

Rovnoměrný pohyb po kružnici je nejjednodušší křivočarý pohyb, při kterém je velikost rychlosti konstantní. Rychlost jakožto vektor tedy konstantní není. Rovnoměrný pohyb po kružnici je periodický pohyb s periodou T, pro kterou platí $T = \frac{1}{f}$, kde f je frekvence pohybu.

Úhlová rychlost ω je fyzikální veličina[3], pro kterou platí: $\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$, kde $\Delta\varphi$ je velikost úhlu, který opíše polohový vektor hmotného bodu za dobu Δt, T je perioda a f je frekvence.
Mezi velikostí okamžité rychlosti hmotného bodu v a úhlovou rychlostí ω platí vztah $v = \omega r$, kde r je poloměr kružnice.
Při rovnoměrném pohybu po kružnici se neustále mění směr rychlosti. S každou změnou rychlosti je spojeno zrychlení, které v případě rovnoměrného pohybu hmotného bodu po kružnici nazýváme dostředivé zrychlení $\vec{a}_d$. Toto zrychlení směřuje do středu kružnice a pro jeho velikost platí $a_d = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r$.

[3] Úhlová rychlost ω je vektorová fyzikální veličina, jejíž směr určíme podle pravidla pravé ruky: Přiložíme-li pravou ruku k hmotnému bodu tak, aby prsty ukazovaly směr jeho pohybu, pak natažený palec ukazuje směr vektoru úhlové rychlosti. Pro účely fyziky na střední škole však postačí zavést pouze její velikost.

2.2. Otázky a příklady z kinematiky

2.2.1. Otázky z kinematiky

Otázka 1: Vyberte situace, při nichž lze zvolené těleso považovat za hmotný bod:
a) Země při oběhu kolem Slunce,
b) Země při rotaci kolem své osy,
c) pád cihly ze střechy mrakodrapu,
d) automobil při parkování.

Otázka 2: Muž stojící v prvním patře obchodního domu sleduje svoji ženu, která k němu přijíždí z přízemí na eskalátoru. Popište vztažnou soustavu, vzhledem k níž je:
a) žena v klidu,
b) muž v klidu,
c) žena v pohybu,
d) muž v pohybu.

Otázka 3[4]: S čím spojuje moderátor počasí vztažnou soustavu, tvrdí-li, že Slunce vychází a zapadá?

Otázka 4: Rozhodněte, které z pohybů jsou přímočaré a které křivočaré:
a) pohyb hrotu propisky při psaní,
b) pád kapky vody,
c) pohyb výtahu ve výtahové šachtě,
d) pohyb zubů kotoučové pily.

Otázka 5: Rozhodněte, v kterých z následujících situací se velikost zjištěné rychlosti blíží velikosti okamžité rychlosti:
a) autobus, který urazí vzdálenost 15 km za 35 minut,
b) tachometr motocyklu Suzuki, který ukazuje 140 $\mathrm{km \cdot h^{-1}}$,
c) automobil, kterému policisté naměřili radarem v obci rychlost o velikosti 65 $\mathrm{km \cdot h^{-1}}$,
d) kůň, který vyhrál v čase 9:20,6 Velkou pardubickou[5], což je dostih na 6900 m.

[4] Převzato z [9].

[5] Hodnoty získány z [15].

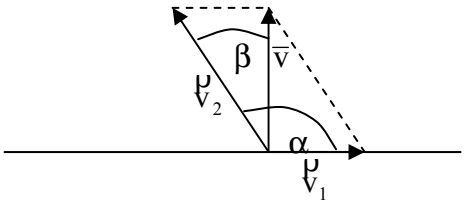
2.2.2. Příklady z kinematiky

A) Řešené příklady

Příklad 1: Podle bájí člověk, který zemře, musí zaplatit převozníkovi Cháronovi, aby ho převezl přes posvátnou řeku Stix. Předpokládejme, že velikost rychlosti proudu v řece je 2,5 $km \cdot h^{-1}$ a Cháronův prám může vyvinout rychlost o velikosti 3,5 $km \cdot h^{-1}$. Pod jakým úhlem vzhledem k proudu řeky musí převozník hnát svůj prám, aby se prám pohyboval kolmo k břehům řeky? Jak velkou rychlostí se prám vzdaluje od břehu?

Řešení: $v_1 = 2{,}5\ km \cdot h^{-1}$
$v_2 = 3{,}5\ km \cdot h^{-1}$
$v = ?$
$\alpha = ?$

Pro výpočet rychlosti prámu vzhledem k břehům řeky vyjdeme z obr. 2.2, do kterého zakreslíme situaci ze zadání příkladu.



Obr. 2.2

Z obrázku vidíme, že rychlost prámu vzhledem k břehům vypočteme z Pythagorovy věty: Platí $v_2^2 = v_1^2 + v^2$ a odtud

$v = \sqrt{v_2^2 - v_1^2} \approx 2{,}4\ km \cdot h^{-1}$.

Zbývá ještě zjistit, pod jakým úhlem musí prám plout, aby se pohyboval kolmo k břehům řeky. Pro určení tohoto úhlu opět vyjdeme z obr. 2.2. Vzhledem k tomu, že se prám musí pohybovat kolmo k břehům, je úhel, který svírá rychlost prámu $\vec{v}$ se směrem proudu v řece, pravý. Dále potřebujeme znát ještě úhel, který svírá rychlost prámu vzhledem k břehům s rychlostí prámu vzhledem k proudu řeky, označme ho β. Výsledný úhel α je: $\alpha = 90^0 + \beta$.

Úhel β určíme pomocí jedné z goniometrických funkcí. Například s využitím funkce sinus, kdy $\sin\beta = \frac{v_1}{v_2}$. Odtud $\beta \approx 45^0$ a tedy

$\alpha \approx 90^0 + 45^0 = 135^0$.

Prám se vzdaluje od břehu rychlostí 2,4 $km \cdot h^{-1}$ pod úhlem 135^0 vzhledem ke směru proudu v řece.

Příklad 2: Automobil projel tři čtvrtiny celkové dráhy rychlostí o velikosti $90\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$ a zbývající část dráhy rychlostí o velikosti $50\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$. Vypočítejte jeho průměrnou dráhovou rychlost.

Řešení: $v_1 = 90\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$

$v_2 = 50\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$

$s_1 = \frac{3}{4}s_c$, kde s_c je celková dráha

$s_2 = \frac{1}{4}s_c$

$v_{pd} = ?$

Průměrnou dráhovou rychlost v_{pd} určíme z definice jako podíl celkové dráhy s_c a celkové doby t_c, za kterou automobil tuto dráhu urazí, tedy $v_{pd} = \frac{s_c}{t_c}$.

Dráhu s_1 ujede automobil za dobu $t_1 = \frac{s_1}{v_1} = \frac{3}{4}\frac{s_c}{v_1}$, dráhu s_2 za dobu $t_2 = \frac{s_2}{v_2} = \frac{1}{4}\frac{s_c}{v_2}$.

Celková doba jízdy je tedy $t_c = t_1 + t_2 = \frac{3s_c}{4v_1} + \frac{s_c}{4v_2} = \frac{(v_1 + 3v_2)s_c}{4v_1v_2}$.

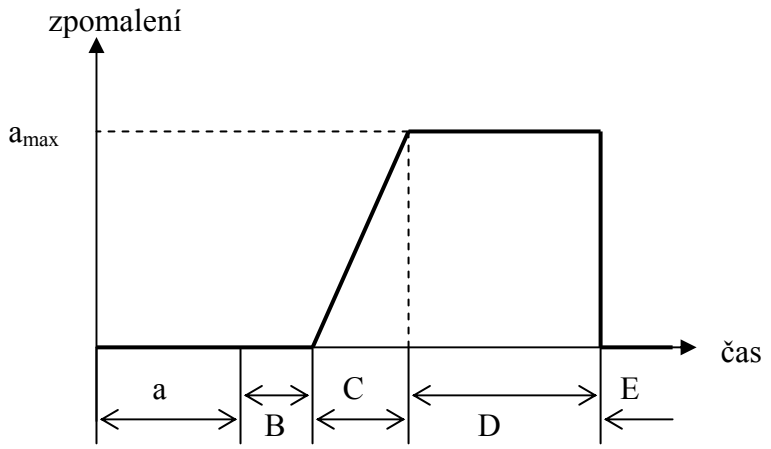
Potom $v_{pd} = \frac{s_c}{t_c} = \frac{s_c}{\frac{(v_1 + 3v_2)s_c}{4v_1v_2}} = \frac{4v_1v_2}{v_1 + 3v_2} = 75\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$.

Průměrná dráhová rychlost automobilu je $75\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$.

Komentář: Všimněte si, že průměrná dráhová rychlost není totožná s aritmetickým průměrem jednotlivých rychlostí, tzn. $v_{pd} \neq \frac{v_1 + v_2}{2} = 70\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$.

Příklad 3: Je-li řidič nucen zastavit, nezačne vůz brzdit ihned. Od okamžiku, kdy si řidič uvědomí nutnost zabrzdit, uplyne nejprve jistá reakční doba řidiče (tj. doba, která uplyne od okamžiku, kdy řidič zpozoruje blížící se nebezpečí, do okamžiku přenesení nohy na brzdový pedál) a jistá doba prodlevy brzd (tj. interval, který uplyne od okamžiku kontaktu nohy s pedálem do začátku účinku brzd). V těchto časových intervalech se automobil stále pohybuje rovnoměrným pohybem. Hodnota reakční doby řidiče připraveného brzdit je 0,6 s a hodnota reakční doby např. opilého řidiče je až 1,6 s. Prodleva brzd je odhadována na 0,05 s. Poté automobil začne brzdit. Po dobu náběhu brzd (tj. doba od začátku účinku brzd až po dosažení maximálního zpomalení automobilu) však nejde o pohyb rovnoměrně zpomalený. Teprve po uplynutí doby náběhu brzd (činí asi 0,15 s) začíná automobil plně brzdit rovnoměrně zpomaleným pohybem, přičemž největší možné zpomalení závisí na stavu vozovky, na kvalitě pneumatik, na stavu brzd a také na tom, jestli kola při brzdění blokují nebo se otáčejí. Předpokládejme, že se kola otáčejí. Poté je maximální zpomalení dáno vztahem[6] $a_{max} = \mu_0 \cdot g$, kde μ_0 je koeficient adheze a g je tíhové zrychlení. Pro suchý beton platí $\mu_0 = 0{,}8$; pro náledí je $\mu_0 = 0{,}1$.

Pohyb automobilu zachycuje následující graf[7].



A… reakční doba řidiče, B… prodleva brzd, C… náběh brzd, D… plné brzdění, E… klid automobilu.

Vypočtěte celkovou dráhu, kterou urazí automobil na suchém betonu a na náledí, než zcela zastaví. Počítejte pro situaci, kdy automobil řídí zkušený řidič připravený brzdit i pro případ, kdy je automobil řízen opilým řidičem. Výpočet proveďte pro rychlosti $50\,\mathrm{km \cdot h^{-1}}$ a $90\,\mathrm{km \cdot h^{-1}}$. Náběh brzd zanedbejte.

Nyní vyřešíme úlohu pro případ, kdy se automobil pohybuje rychlostí $50\,\mathrm{km \cdot h^{-1}}$.

[6] Podrobnosti naleznete na [16].

[7] Hodnoty a graf 1 převzaty z [16].

Řešení: $v_0 = 50\,\mathrm{km \cdot h^{-1}}$

$T_s = 0{,}6\,\mathrm{s}$

$T_o = 1{,}6\,\mathrm{s}$

$t_b = 0{,}05\,\mathrm{s}$

$\mu_{01} = 0{,}8$

$\mu_{02} = 0{,}1$

Označme s_s tzv. reakční vzdálenost, kterou urazí nebrzděný automobil za reakční dobu střízlivého řidiče T_s a za dobu prodlevy brzd t_b.
Reakční vzdálenost $s_s = v_0 \cdot T_s + v_0 \cdot t_b \approx 9{,}03\,\mathrm{m}$.

Označme s_o reakční vzdálenost, kterou urazí nebrzděný automobil za reakční dobu opilého řidiče T_o a za dobu prodlevy brzd t_b.
Reakční vzdálenost $s_o = v_0 \cdot T_o + v_0 \cdot t_b \approx 22{,}92\,\mathrm{m}$.

Označme S_1 vzdálenost, kterou urazí automobil při rovnoměrně zpomaleném pohybu se zpomalením o velikosti $a_{max1} = \mu_{01} \cdot g$.

$S_1 = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} a_{max1} t^2$, kde neznámou t určíme ze vztahu pro rychlost rovnoměrně zpomaleného pohybu $v_0 = a_{max1} t$, tedy $t = \frac{v_0}{a_{max1}}$.

Dosazením tohoto vztahu do vztahu pro dráhu rovnoměrně zpomaleného pohybu dostáváme

$$S_1 = v_0 \frac{v_0}{a_{max1}} - \frac{1}{2} a_{max1} \left(\frac{v_0}{a_{max1}} \right)^2 = \frac{1}{2} \frac{v_0^2}{a_{max1}} = \frac{1}{2} \frac{v_0^2}{\mu_{01} \cdot g} = 12{,}29\,\mathrm{m}.$$

Označme S_2 vzdálenost, kterou urazí automobil při rovnoměrně zpomaleném pohybu se zpomalením o velikosti $a_{max2} = \mu_{02} \cdot g$..

$S_2 = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} a_{max2} t^2$, kde $t = \frac{v_0}{a_{max2}}$,

tedy $S_2 = \frac{1}{2} \frac{v_0^2}{a_{max2}} = \frac{1}{2} \frac{v_0^2}{\mu_{02} \cdot g} = 98{,}32\,\mathrm{m}$.

Řídí-li automobil zkušený řidič, je schopen zastavit na suchém betonu na vzdálenost $s_s + S_1 = 21{,}32\,\mathrm{m}$ a na náledí je jeho dráha $s_s + S_2 = 107{,}35\,\mathrm{m}$.

V případě opilého řidiče je situace mnohem horší. Na suchém betonu zastaví až na vzdálenost $s_o + S_1 = 35{,}21\,\mathrm{m}$ a na náledí ujede vůz ještě dráhu $s_o + S_2 = 121{,}24\,\mathrm{m}$, než zastaví.

Případ, kdy se automobil pohybuje rychlostí 90 $km \cdot h^{-1}$ řešte sami a výsledky porovnejte s výsledky z první části.

Komentář: Při výpočtu jsme zanedbali dráhu, kterou by automobil urazil za dobu náběhu brzd, jelikož v tomto časovém intervalu nemáme informaci o průběhu pohybu. Mějme tedy na paměti, že skutečně uražená dráha automobilu bude delší. Dále jsme pro jednodušší výpočty uvažovali, že automobil začne plně brzdit rovnoměrně zpomaleným pohybem s největším možným zpomalením a_{max}. Ve skutečnosti však automobil vždy maximálního zpomalení nedosáhne[8]. Proto dráha, kterou urazí automobil při rovnoměrně zpomaleném pohybu, bude v reálné situaci opět delší. I když jsme se při výpočtech dopustili těchto nepřesností a celkové dráhy nám proto vyšli o „něco“ menší, mějme na mysli, že získané dráhy nejsou zanedbatelné. Pokud si to řidič neuvědomí, může dojít k mnoha dopravním nehodám jako jsou: sražení chodce na přechodu, náraz jednoho automobilu do druhého, když první z nich prudce zabrzdí (proto musí být dodržována bezpečná vzdálenost mezi vozidly), atd.

Příklad 4: Motocykl při svém rovnoměrně zrychleném pohybu zvětšil na dráze 70 m velikost rychlosti z 30 $km \cdot h^{-1}$ na 130 $km \cdot h^{-1}$. Určete velikost jeho zrychlení.

Řešení: $s = 70\,m$

$v_1 = 30\,km \cdot h^{-1}$

$v_2 = 130\,km \cdot h^{-1}$

$a = ?$

Motocykl s počáteční rychlostí v_1 se pohybuje po dráze s dané vztahem $s = v_1 t + \frac{1}{2}at^2$. V něm však vystupuje neznámá t, kterou vyjádříme ze vztahu $v_2 = v_1 + at$ pro rychlost rovnoměrně zrychleného pohybu. Odtud vychází $t = \frac{v_2 - v_1}{a}$. Dosazením do první rovnice dostáváme

$$s = v_1 \frac{v_2 - v_1}{a} + \frac{1}{2}a\frac{(v_2 - v_1)^2}{a^2} = \frac{2v_1v_2 - 2v_1^2 + v_2^2 - 2v_1v_2 + v_1^2}{2a} = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2a}.$$

Odtud již můžeme vyjádřit velikost zrychlení $a = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2s} \approx 8{,}8\,m \cdot s^{-2}$.

Velikost zrychlení motocyklu je $8{,}8\,m \cdot s^{-2}$.

---

[8] Více informací naleznete v [16].

Příklad 5: Průměr kola silničního bicyklu je 70 cm a kolo se při jízdě otáčí rovnoměrně 5-krát za sekundu. Vypočtěte úhlovou rychlost drátků kola, velikost rychlosti kamínku uchyceného v plášti kola a velikost rychlosti čidla tachometru, které je umístěno ve vzdálenosti 20 cm od středu kola. Dále určete velikost dostředivého zrychlení kamínku i čidla.

Řešení: $d = 70$ cm
$l = 20$ cm
$n = 5$
$\omega = ?$
$v_k = ?$
$v_č = ?$
$a_{dk} = ?$
$a_{dč} = ?$

Frekvence pohybu kola je $f = 5$ Hz.
Úhlovou rychlost drátků kola tedy určíme ze vztahu
$\omega = 2\pi f \doteq 31{,}4\ \mathrm{rad \cdot s^{-1}}$.
Pro velikost rychlosti kamínku na obvodu platí

$$v_k = \omega r = 2\pi f \frac{d}{2} \doteq 11{,}0\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}.$$

Velikost rychlosti čidla získáme ze vztahu $v_č = \omega l = 2\pi f l \doteq 6{,}3\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$.
Pro výpočet velikosti dostředivého zrychlení kamínku vyjdeme ze vztahu

$$a_{dk} = \frac{v_k^2}{r} = \frac{v_k^2}{\left(\frac{d}{2}\right)} = \frac{2\left(2\pi f \frac{d}{2}\right)^2}{d} = 2\pi^2 f^2 d \doteq 345{,}4\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}.$$

Velikost dostředivého zrychlení čidla tachometru je

$$a_{dč} = \frac{v_č^2}{l} = \frac{(2\pi f l)^2}{l} = 4\pi^2 f^2 l \doteq 197{,}4\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}.$$

Komentář: Uvědomte si, že všechny body kola mají stejnou úhlovou rychlost. Obvodová rychlost však závisí na vzdálenosti bodu od středu kola, a je tudíž pro různě vzdálené body různá. Totéž platí i pro velikost dostředivého zrychlení. S rostoucí vzdáleností bodů od středu roste i velikost jejich dostředivého zrychlení.

B) Neřešené příklady

Příklad 6: Zaoceánská loď Freedom of the Seas (viz. obr. 2.3) má délku 338,77 m, je široká 56 m a může plout rychlostí maximálně 40 $km \cdot h^{-1}$. Za předpokladu, že touto rychlostí skutečně loď pluje, zjistěte rychlost cestujícího vzhledem k moři, který se pohybuje ze záděně na příď rychlostí $2\,km \cdot h^{-1}$. Jakou rychlostí vzhledem k moři se pohybuje další cestující, který běží napříč přes palubu rychlostí $10\,km \cdot h^{-1}$?

Obr. 2.3

Příklad 7[9]: Jednou z olympijských disciplín je maratónský běh. Trať je dlouhá 42,195 km a rekord této trati je 2h 4min 55s. Jaká musí být průměrná dráhová rychlost dalšího sportovce, aby byl rekord překonán?
Další olympijskou disciplínou je sprint mužů na 100 m. Rekordem je čas 9,77 s. Za jak dlouho by sprinter uběhl maratónský běh, kdyby vydržel celou dobu sprintovat?

Příklad 8[10]: Průměrné mrknutí oka trvá asi 0,1 s. Při silném kýchnutí zavře člověk oči zhruba na 0,5 s. Řídí-li mrkající nebo kýchající člověk automobil, který jede rychlostí o velikosti $90\,km \cdot h^{-1}$, jaké vzdálenosti při těchto „zdánlivě“ malých časových intervalech urazí?

Příklad 9: Z Prahy-Holešovic vyjíždí vlaková souprava Pendolino (viz. obr. 2.4) v 5h 26 min směrem do Ostravy-hl.n. Příjezd je předpokládán na 8h 45 min. Určete průměrnou dráhovou rychlost Pendolina[11], víte-li, že vzdálenost Praha-Ostrava je 356 km.

Obr. 2.4

Příklad 10: Za jakou dobu vyjede lyžař na vrchol sjezdovky, má-li vlek průměrnou dráhovou rychlost[12] $3{,}4\,m \cdot s^{-1}$ a je-li jeho délka 1200m?

---

[9] Úloha převzata z [4].

[10] Úloha převzata z [4].

[11] Údaje převzaty z [17].

[12] Informace zjištěny z [18].

Příklad 11: Řidič nákladního vozu chce dosáhnout na své cestě průměrné dráhové rychlosti $70\,\mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1}$. Čtvrtina dráhy, kterou má ujet, vede přes uzavřenou osadu, kde je velikost maximální povolené rychlosti $60\,\mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1}$. Osmina z celkové dráhy vede úsekem, kterým je velikost rychlosti omezena na $30\,\mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1}$. Jakou rychlostí musí projet zbývající část dráhy, aby dosáhl požadované průměrné dráhové rychlosti? Bude řidič pokutován, povede-li poslední část dráhy obcí?

Příklad 12: Jestřáb letící rovnoměrným pohybem rychlostí o velikosti $120\,\mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1}$ spatřil holuba vzdáleného 500 m od něj. Za jak dlouho ho jestřáb dohoní, letí-li holub také rovnoměrně přímočaře rychlostí o velikosti[13] $60\,\mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1}$? Stihne holub včas doletět do holubníku, který je od něho vzdálen 600 m, nebo skončí v jestřábích drápech? V případě, že se holub nestihne včas ukrýt, spočtěte, v jaké vzdálenosti od holubníku jestřáb holuba uloví.

Příklad 13: Nejrychlejším zvířetem na Zemi (nepočítáme-li ptáky) je gepard (viz. obr. 2.5), který dokáže vyvinout rychlost o velikosti až $110\,\mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1}$. Tento predátor loví tím způsobem, že se ke kořisti tiše přiblíží na několik metrů, pak po ní rychle vystartuje a začíná boj o přežití. Předpokládejme tedy, že se gepard tiše přiblížil do vzdálenosti 130 m od stáda gazel. Gepard vydrží běžet danou rychlostí maximálně 15 s. Pokud za tuto dobu kořist nedostihne, svůj lov vzdá. Stihne tedy celé stádo uniknout hladovému predátorovi včas, jestliže nejpomalejší kus ze stáda dokáže běžet rychlostí o velikosti $80\,\mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1}$?

Obr. 2.5[14]

Příklad 14: Malý chlapec jde po ulici a v tom zahlédne ve vzdálenosti 100 m od sebe psa. Ve stejném okamžiku také pes zpozoruje chlapce, pes (viz. obr. 2.6) začne být agresivní a rozběhle se za dítětem. To zpanikaří a dá se na útěk rovnoměrným přímočarým pohybem rychlostí o velikosti $10\,\mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1}$. Pes dostihne chlapce za 15 s. Jak rychle běžel pes?

Obr. 2.6[15]

[13] Údaj o rychlosti holuba převzat z [19].

[14] Obr. 2.5 naleznete na [20].

[15] Obr. 2.6 převzat z [21].

Příklad 15: Z letiště odstartovalo dopravní letadlo Airbus A340-300 (viz. obr. 2.7) a získalo typickou cestovní rychlost o velikosti $875\,\mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1}$. Za 10 min po získání této rychlosti přišla zpráva, že letadlo bylo uneseno. Naštěstí byla ve vzduchu ve vzdálenosti $150\,\mathrm{km}$ od Airbusu stíhačka JAS-39 Gripen (viz. obr. 2.8), která letěla stejným směrem (po spojnici obou letadel) rychlostí o velikosti[16] $2400\,\mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1}$, a tudíž po obdržení varovné zprávy mohla okamžitě zahájit záchranou akci. Za jak dlouho stíhačka dopravní letadlo dohoní? Předpokládejte, že se obě letadla pohybují rovnoměrně.

Obr. 2.7

Obr. 2.8

Příklad 16[17]: O kolik minut se zkrátila doba jízdy po dálnici z Prahy do Brna po zvýšení rychlostního limitu ze $110\,\mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1}$ na $130\,\mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1}$? Předpokládejte, že řidič projede celou cestu nejvyšší povolenou rychlostí. Vzdálenost Praha-Brno je 200 km.

Příklad 17: Střední vzdálenost Slunce od Země $149{,}6\cdot10^{6}\,\mathrm{km}$. Velikost rychlosti světla ve vakuu je přesně $299\,792\,458\ \mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$. Za jakou dobu dorazí světelný signál ze Slunce na Zemi?

Příklad 18: Supersportovní kupé Ferrari F40 (viz. obr. 2.9), které bylo vyrobeno v roce 1987 ke 40. výročí vzniku značky Ferrari, dokáže zvýšit velikost své rychlost z $0\,\mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1}$ na $100\,\mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1}$ za 4,6 s [18]. Jaká je jeho průměrná velikost zrychlení, pohybuje-li se rovnoměrným pohybem?

Obr. 2.9

[16] Údaj o rychlosti a obr. 2.8 naleznete na [22].

[17] Úloha převzata z [4].

[18] Informace a obr. 2.9 zjištěny na [23].

Příklad 19: Propast Macocha (viz. obr. 2.10) v Moravském krasu má hloubku[19] 138 m (nebereme-li v úvahu jezírko na dně propasti, které je 30 m hluboké). Určete, za jak dlouho dopadne fotoaparát upuštěný neopatrnými turisty z horního můstku na hladinu jezírka a jaká bude jeho velikost rychlosti? Odpor vzduchu zanedbejte.

Obr. 2.10

Příklad 20: Jedna historka tvrdí, že Newton vymyslel zákon gravitace ve chvíli, kdy mu spadlo na hlavu jablko ze stromu, pod kterým ležel a přemýšlel. Vypočtěte tedy, jakou rychlost jablko mělo v okamžiku dopadu na Newtonovu hlavu, za předpokladu, že jablko viselo na stromě ve výšce 2,3 m nad badatelovou hlavou. Odpor vzduchu zanedbejte.

Příklad 21: Na televizních obrazovkách vídáme scény z akčních filmů, kdy hlavní hrdina skočí z mostu na jedoucí automobil. Vypočtěte, v jaké vzdálenosti od mostu vysokého 10 m musí být automobil jedoucí rychlostí o velikosti $100\,\mathrm{km \cdot h^{-1}}$, aby hrdina dopadl přesně na kapotu automobilu. Odpor vzduchu zanedbejte.

Příklad 22[20]: Osobní automobil se rozjíždí rovnoměrně zrychleným pohybem z klidu prvním rychlostním stupněm po dobu 2 s a dosáhne rychlosti o velikosti $20\,\mathrm{km \cdot h^{-1}}$. Další 2 s je zařazen druhý rychlostní stupeň a automobil získá rychlost o velikosti $35\,\mathrm{km \cdot h^{-1}}$. Následující 4 s je zařazen třetí rychlostní stupeň a dosažená velikost rychlost je $60\,\mathrm{km \cdot h^{-1}}$, po dalších 6 s při zařazeném čtvrtém rychlostním stupni má automobil rychlost o velikosti $90\,\mathrm{km \cdot h^{-1}}$. Určete velikost zrychlení automobilu při jednotlivých rychlostních stupních. Vypočtěte celkovou dráhu automobilu při rozjíždění.

Příklad 23: Zjistěte, zda dojde ke srážce dvou vlaků, které jedou proti sobě po stejné přímé jednokolejné trati. První (např. osobní vlak) má rychlost o velikosti $80\,\mathrm{km \cdot h^{-1}}$, druhý (např. Spěšný vlak) jede rychlostí o velikosti $130\,\mathrm{km \cdot h^{-1}}$. Oba strojvůdci spatří nebezpečí ve vzdálenosti 800 m a začnou okamžitě brzdit se zpomalením o velikosti $1\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}$.

---

[19] Hodnoty a obr. 2.10 převzaty z [24].

[20] Převzato z [9].

Příklad 24: Určete, s jakou úhlovou rychlostí se otáčí naše Země (viz. obr. 2.11) kolem své osy, víte-li, že jednu otočku vykoná přibližně za 24 hodin. S jakou obvodovou rychlostí se otáčejí body na rovníku a body v naší zeměpisné šířce? Poloměr Země je 6378 km a naše zeměpisná šířka je přibližně 50^0. Jaká je velikost dostředivého zrychlení na rovníku a jaká je u nás?

Příklad 25: Jakou úhlovou rychlost má malá ručička, velká ručička a vteřinová ručička hodinek?

Příklad 26[21]: Jednou z pouťových atrakcí je ruské kolo (viz. obr. 2.11), které má průměr 30 m. Doba svezení trvá 4 minuty a za tuto dobu ruské kolo vykoná 20 otoček. Jaká je perioda pohybu a jak velké je dostředivé zrychlení člověka v kabince na obvodu kola?

Obr. 2.11

Příklad 27: Talíř mikrovlnné trouby o průměru 27 cm vykoná jednu otočku za 12 s. Určete frekvenci, úhlovou rychlost a velikost obvodové rychlosti obrázku, který je namalován na malém hrníčku s mlékem. Obrázek se nachází ve dvou třetinách od středu talíře.

Příklad 28: Automatická pračka má maximální počet otáček při odstřeďování 1400 za minutu. Určete frekvenci a periodu pohybu bubnu a rychlost, s jakou se plášť bubnu (ve tvaru válce) pohybuje. Buben má objem 53 l a je hluboký 40 cm.

Příklad 29: Mlýnské kolo (viz. obr. 2.12) o průměru 2 m se otáčí s úhlovou rychlostí přibližně 90^0 za sekundu. Určete frekvenci pohybu a rychlost bodů na obvodu kola.

Obr. 2.12

[21] Úloha inspirována příkladem z [4] a obr. 2.11 převzat z [25].

3. DYNAMIKA HMOTNÉHO BODU

3.1. Přehled základních poznatků z dynamiky

Dynamika je obor mechaniky, který studuje příčiny změn pohybového stavu hmotných bodů. Dynamika se tedy zabývá otázkou, proč se hmotné body pohybují. Ústředním pojmem celé dynamiky je pojem síly.
Síla $\vec{F}$ je vektorová fyzikální veličina, která vyjadřuje míru interakce mezi hmotnými body.

Základ dynamiky tvoří tři Newtonovy pohybové zákony, které popisují vztah mezi pohybem hmotného bodu a silami, které na tento hmotný bod působí. Pro formulaci těchto zákonů je třeba definovat inerciální vztažnou soustavu. Zavedeme ji pomocí pojmu volný hmotný bod.
Volný hmotný bod je takový hmotný bod, který neinteraguje s jinými objekty. Opět se jedná pouze o fyzikální model, který si můžeme představit například tak, že okolní objekty jsou od hmotného bodu natolik vzdáleny, že jejich silové působení na tento hmotný bod lze zanedbat.

Inerciální vztažnou soustavu potom definujeme pomocí čtyř volných hmotných bodů, které neleží v jedné rovině. První z nich tvoří počátek vztažné soustavy a další tři určují směr souřadnicových os. Příkladem inerciální vztažné soustavy je tzv. Galileova vztažná soustava, jejíž počátek leží ve středu hmotnosti sluneční soustavy a osy směřují ke stálicím. S dobrou přesností lze považovat za inerciální také vztažnou soustavu spojenou se Zemí (tuto soustavu nazýváme laboratorní)[22].

Nyní již můžeme formulovat první Newtonův pohybový zákon, který popisuje pohyb volného hmotného bodu v inerciální vztažné soustavě.
První Newtonův pohybový zákon (dále jen 1NPZ) **- zákon setrvačnosti**: V inerciální vztažné soustavě je každý volný hmotný bod v klidu nebo v pohybu rovnoměrném přímočarém.

Je-li jiná vztažná soustava vůči inerciální vztažné soustavě v klidu nebo se pohybuje pohybem rovnoměrným přímočarým[23], pak je také inerciální. Důležitou vlastnost těchto soustav vyjadřuje Galileiho princip relativity, který říká, že zákony mechaniky mají ve všech inerciálních vztažných soustavách stejný tvar. Všechny inerciální vztažné soustavy jsou tedy z hlediska popisu nějakého mechanického děje rovnocenné a je jedno, kterou z nich pro popis děje zvolíme.
Ostatní soustavy, které se vůči inerciální soustavě pohybují se zrychlením nebo se otáčejí, nazýváme neinerciálními vztažnými soustavami. Těmito soustavami se budeme zabývat později.

Začnou-li na hmotný bod působit jiné objekty silami, dojde ke změně jeho pohybového stavu. Tuto situaci popisuje druhý Newtonův pohybový zákon.
Pro jeho formulaci je nutno zavést fyzikální veličinu, kterou nazýváme hybnost hmotného bodu.

---

[22] Konkrétní příklady inerciálních vztažných soustav je nutno potvrdit experimenty.
[23] Rovnoměrným přímočarým pohybem vztažné soustavy rozumíme rovnoměrný přímočarý pohyb počátku této soustavy, přičemž osy soustavy se neotáčejí.

Hybnost hmotného bodu $\vec{p}$ je vektorová fyzikální veličina definovaná jako součin hmotnosti hmotného bodu a jeho okamžité rychlosti $\vec{v}$, tedy $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$.

Druhý Newtonův pohybový zákon (dále jen 2NPZ) **- zákon síly**: Časová změna hybnosti hmotného bodu je rovna výslednici sil, která na hmotný bod působí.

Tedy: $\vec{F} = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t}$, kde $\Delta t \to 0$.

Dosadíme-li do 2NPZ za hybnost $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$, dostáváme

$$\vec{F} = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} = \frac{\Delta(m \cdot \vec{v})}{\Delta t} = m\frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = m \cdot \vec{a}.$$

Tento vztah platí pouze za předpokladu, že se hmotnost hmotného bodu nemění. U většiny těles, které nás obklopují, se jejich hmotnost opravdu nemění, ale uveďme alespoň jeden příklad za všechny, kdy není hmotnost konstantní. Tímto příkladem může být hmotnost raketoplánu, který v průběhu letu spaluje palivo ze zásobovacích nádrží.

Abychom mohli 2NPZ při výpočtech (např. zrychlení, působících sil, atd.) použít, musíme jej doplnit principem superpozice sil a silovými zákony.

Na hmotný bod nemusí působit pouze jedna síla, ale působících sil může být více. V tom případě dochází ke skládání sil, jež určuje následující princip.

Princip superpozice sil: Působí-li na hmotný bod současně více sil $\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n$, lze je nahradit jedinou silou $\vec{F}$, která má stejný pohybový účinek jako jednotlivé síly. Sílu $\vec{F}$ nazýváme výslednicí sil a platí pro ni $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + ... + \vec{F}_n$.

S různými objekty může hmotný bod interagovat různě. Kvantitativně lze tyto interakce popsat silovými zákony.

Příklady silových zákonů:

- **vztah pro gravitační sílu**[24] (tzv. Newtonův gravitační zákon): Na hmotný bod o hmotnosti m_1 a polohovém vektoru $\vec{r}_1$ působí hmotný bod o hmotnosti m_2 a polohovém vektoru $\vec{r}_2$ silou $\vec{F}_g = \kappa \frac{m_1 m_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$, kde $\kappa = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}}$ je gravitační konstanta.
- **vztah pro tíhovou sílu**: Na hmotný bod o hmotnosti m působí tíhové pole Země tíhovou silou $\vec{F}_G = m\vec{g}$, kde $\vec{g}$ je tíhové zrychlení. V naší zeměpisné šířce je $g \approx 9{,}81\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$.
- **vztah pro třecí sílu**: Třecí síla $\vec{F}_t$ vzniká na styčných plochách tělesa[25] a podložky při jevu, který nazýváme tření. Začne-li na těleso působit tahová síla, která narůstá s časem, nepohne se těleso okamžitě po začátku účinku této síly, neboť mu v pohybu brání statická tření síla $\vec{F}_{ts}$. Zvětšuje-li se tahová síla, roste také statická třecí síla $\vec{F}_{ts}$, která dosáhne svého maxima v okamžiku, kdy se těleso pohne. Pro maximální velikost statické třecí síly

[24] Pro gravitační a tíhovou sílu uvedeme v tomto odstavci pouze vztah. Blíže se těmito silami budeme zabývat v kapitole Gravitační pole.

[25] Na tomto místě je nutné uvažovat o styčných plochách, proto zde hovoříme o tělese. Při vlastním popisu jeho pohybu jej však často lze nahradit modelem hmotného bodu.

platí vztah[26] $F_{ts} = f_0 N$, kde f_0 je koeficient statického tření, který je zejména určen materiálem, ze kterého jsou těleso a podložka vyrobeny, a kvalitou povrchu obou objektů. N značí velikost kolmé tlakové síly, kterou působí podložka na těleso. Začne-li se těleso po podložce pohybovat, přejde statické tření v tření dynamické a bude se uplatňovat dynamická třecí síla $\vec{F}_{td}$. Velikost dynamické třecí síly je rovna součinu koeficientu dynamického tření f a velikosti kolmé tlakové síly N, tj. $F_{td} = fN$.

Nyní se zmíníme ještě o jedné fyzikální veličině, a tou je impuls síly.
Impuls síly $\vec{I}$ je vektorová fyzikální veličina, která vyjadřuje časový účinek působící síly. Impuls konstantní síly je roven změně hybnosti hmotného bodu za časový interval Δt, tj. $\vec{I} = \vec{F}\Delta t = \Delta\vec{p}$.
V případě proměnné síly je výpočet impulsu síly složitější a přesahuje rámec středoškolského učiva.

Zbývá zformulovat třetí Newtonův pohybový zákon, který popisuje vzájemné silové působení hmotných bodů.
Třetí Newtonův pohybový zákon (dále jen 3NPZ) **- zákon akce a reakce**: Každé dva hmotné body na sebe navzájem působí stejně velkými, ale opačně orientovanými silami, které leží v jedné přímce.
Je zvykem jednu z těchto sil nazývat akcí a druhou reakcí. Tyto síly, ač tomu jejich názvy nenasvědčují, současně vznikají a zanikají. Zdůrazněme, že je nelze skládat, neboť každá z nich působí na jiný hmotný bod.

Dalším důležitým zákonem mechaniky je zákon zachování hybnosti, který je formulován pro izolovanou soustavu hmotných bodů.
Izolovanou soustavou přitom rozumíme takovou soustavu hmotných bodů, na kterou nepůsobí silami objekty, které leží vně této soustavy. Hmotný bod v izolované soustavě tedy interaguje pouze s hmotnými body této soustavy. Izolovaná soustava je opět pouze fyzikální abstrakce.
Zákon zachování hybnosti (dále jen ZZH): Celková hybnost izolované soustavy hmotných bodů se nemění.
Obsahuje-li izolovaná soustava n hmotných bodů, pak je zákon zachování hybnosti vyjádřen rovnicí $\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + ... + \vec{p}_n = \vec{\text{konst}}.$, kde $\vec{p}_1$ je hybnost hmotného bodu 1, $\vec{p}_2$ je hybnost hmotného bodu 2, …a $\vec{p}_n$ je hybnost n-tého hmotného bodu soustavy.

Na závěr odstavce se vraťme k neinerciálním vztažným soustavám.
Neinerciální vztažná soustava je každá soustava, která se vůči inerciální vztažné soustavě pohybuje se zrychlením nebo se otáčí. V těchto vztažných soustavách neplatí 1NPZ ani 2NPZ.
Dále se budeme zabývat pouze neinerciálními vztažnými soustavami, jejichž počátek se pohybuje se zrychlením $\vec{A}$ a osy se neotáčejí[27]. Chceme-li mít i v této vztažné

[26] Zdůrazněme, že vztah pro velikost statické třecí síly není silovým zákonem. Silový zákon pro velikost statické třecí síly neexistuje. Velikost této síly určujeme z tzv. Vazebních podmínek (např. těleso je vzhledem k podložce v klidu, atd.).
[27] Obecnější situace přesahují rámec středoškolského učiva, avšak zájemci se s ní mohou seznámit např. v [7].

soustavě k dispozici vztah analogický zápisu 2NPZ, musíme k tzv. reálným silám, které vyjadřují vzájemnou interakci mezi hmotnými body, formálně přičíst i tzv. setrvačnou sílu $\vec{F}_s = -m\vec{A}$. Tato veličina má sice fyzikální rozměr síly, ale na rozdíl od reálných sil nemá původ ve vzájemném působení hmotného bodu s okolními hmotnými objekty. Ve smyslu 3NPZ na ni tedy neexistuje reakce (reálné síly však 3NPZ splňují).

2NPZ pro neinerciální vztažnou soustavu tedy odpovídá zápis $\vec{F} + \vec{F}_s = m\vec{a}'$.

3.2. Otázky a příklady z dynamiky

3.2.1. Otázky z dynamiky

Otázka 1: Pozná cestující v neosvíceném vlaku, který jede rovnoměrně přímočaře v dlouhém tunelu, že se pohybuje? Zdůvodněte.

Otázka 2: Z jakého důvodu se nacházejí v automobilu bezpečnostní pásy, airbagy a opěrky na hlavu?

Otázka 3: Pes se po koupeli otřepe. Proč? Jakého fyzikálního zákona při tom nevědomky využívá?

Otázka 4: Cyklista, který jede po silnici, si nevšimne hluboké díry v povrchu vozovky a najede do ní předním kolem. Co se stane a proč?

Otázka 5: Proč je důležité se v tramvaji nebo v autobusu za jízdy pevně držet?

3.2.2. Příklady z dynamiky

A) Řešené příklady

Příklad 1: Na zimním stadionu se střídá hokejový trénink s tréninkem krasobruslařek. Hokejista o hmotnosti 105 kg se opozdil a přejížděl stadion rychlostí o velikosti $10\,\mathrm{km \cdot h^{-1}}$. Přitom si nevšiml, že přímo proti němu již jede rychlostí o velikosti $15\,\mathrm{km \cdot h^{-1}}$ mladá krasobruslařka o hmotnosti 52 kg. Který z nich měl před srážkou větší velikost hybnosti?

Řešení: $m_H = 105\,\mathrm{kg}$

$v_H = 10\,\mathrm{km \cdot h^{-1}}$

$m_K = 52\,\mathrm{kg}$

$v_K = 15\,\mathrm{km \cdot h^{-1}}$

$p_H = ?$

$p_K = ?$

Velikost hybnosti určíme z definičního vztahu $p = m \cdot v$.

Pro výpočet velikosti hybnosti hokejisty tedy užijeme vztah $p_H = m_H \cdot v_H \approx 291{,}7\,\mathrm{kg \cdot m \cdot s^{-1}}$.

Velikost hybnosti krasobruslařky je $p_K = m_K \cdot v_K \approx 216{,}7\,\mathrm{kg \cdot m \cdot s^{-1}}$.

Při srážce měl větší velikost hybnosti hokejista.

Komentář: Jakými způsoby by se daly velikosti hybností hokejisty a krasobruslařky vyrovnat?

Vyrovnání hybností by bylo možné například takto:

a) Krasobruslařka by musela při rychlosti $15\,\mathrm{km \cdot h^{-1}}$ zvýšit svoji hmotnost. Zkusme tedy spočítat její potenciální hmotnost m_p. Přitom předpokládejme, že hokejistovy parametry se nemění.

   Krasobruslařka tedy musí dosáhnout velikosti hybnosti p_H,

   tedy $p_H = m_p \cdot v_K \Rightarrow m_p = \dfrac{p_H}{v_K} = \dfrac{m_H \cdot v_H}{v_K} = 70{,}0\,\mathrm{kg}$.

   Tento způsob zvýšení velikosti hybnosti není pro krasobruslařku ten nejlepší možný, neboť by z krasobruslení musela přesedlat na jiný druh sportu.

b) Další možností je zvýšit nájezdovou rychlost krasobruslařky. Jak rychle by se tedy musela pohybovat, aby došlo k vyrovnání velikostí hybností?

   Tentokrát platí $p_H = m_K \cdot v_p \Rightarrow v_p = \dfrac{p_H}{m_K} = \dfrac{m_H \cdot v_H}{m_K} \approx 20{,}2\,\mathrm{km \cdot h^{-1}}$.

c) Možnosti, kdy se mění parametry hokejisty a nemění hmotnost ani velikost rychlosti krasobruslařky, rozmyslete sami. Rovněž rozmyslete situace, kdy na změně parametrů pracuje jak hokejista, tak krasobruslařka.

Příklad 2: V mnoha akčních scénách vídáme vojáky, jak střílejí z pancéřové pěsti (viz. obr. 3.1) ve stoje a nemají po výstřelu žádný problém se svou stabilitou. Vypočtěte velikost rychlosti pohybu zbraně, která má hmotnost 6,8 kg, víte-li, že náboj o hmotnosti 3 kg byl vystřelen vodorovně rychlostí o velikosti $62\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Předpokládejte, že zbraň a náboj tvoří izolovanou soustavu[28].

Obr. 3.1

Řešení: $m_s = 3\,\mathrm{kg}$

$v_s = 62\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$

$m_p = 6{,}8\,\mathrm{kg}$

$v_p = ?$

Při výpočtu velikosti rychlosti v_p vyjdeme ze zákona zachování hybnosti. Izolovanou soustavu tvoří dvě tělesa, která jsou na začátku děje (před výstřelem) v klidu (vzhledem k Zemi), tzn. celková hybnost soustavy je nulová. Proto je zákon zachování hybnosti vyjádřen vektorovou rovnicí $\vec{p} = \vec{p}_s + \vec{p}_p = \vec{0}$.

Při výpočtech vycházejících ze zákona zachování hybnosti se musíme nejprve ujistit, zda je soustava skutečně izolovaná. Vzhledem k tomu, že izolovaná soustava je pouze idealizovaný případ, postačí nám i soustava, na kterou okolní objekty působí silami, jejichž výslednice je nulový vektor. Postačí také, když je nulová některá ze složek výsledné síly – v tom případě se zachovávají odpovídající složky hybnosti.
V našem případě zjišťujeme, zda se zachovává složka hybnosti ve vodorovném směru. Ověřujeme tedy, že složka výslednice sil ve vodorovném směru je nulová.
Vzhledem k volbě soustavy „zbraň + náboj“ jsou síly vzájemného působení zbraně a náboje vnitřními silami, které nemají na zachování složky hybnosti ve vodorovném směru vliv. Na pancéřovou pěst působí tyto vnější síly: tíhová síla Země a tlaková síla ramene vojáka. Složka výslednice těchto sil je ovšem ve vodorovném směru nulová. Proto se složka celkové hybnosti ve vodorovném směru zachovává a platí pro ni: $p = p_s + p_p = m_s v_s + m_p v_p = 0$.

Odtud získáváme $v_p = \dfrac{-m_s v_s}{m_p} = -27{,}4\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

Zbraň se pohybuje rychlostí o velikosti $27{,}4\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Znaménko mínus značí, že se zbraň pohybuje opačným směrem, než letěl náboj ($v_s > 0$).

---

[28] Údaje o hmotnostech a obr. 3.1 naleznete na [26].

Komentář: Zabývejme se otázkou, zda je možné, aby voják po výstřelu skutečně neměl se stabilitou žádný problém. Zbraň o hmotnosti 6,8 kg se pohybuje rychlostí o velikosti $27{,}4\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Velikost její hybnosti je tedy $p_p = \left|m_p \cdot v_p\right| = m_s v_s = 186{,}0\,\mathrm{kg\cdot m\cdot s^{-1}}$. Kdyby výstřel ze zbraně trval např. 0,2 s, působila by na vojáka průměrná síla o velikosti $F = \frac{\Delta p}{\Delta t}$, kde $\Delta p = p_p - p_0$, p_0 je velikost hybnosti zbraně před výstřelem, tj. $p_0 = 0$, p_p značí velikost hybnosti zbraně po výstřelu a Δt je doba, za kterou došlo ke změně velikosti hybnosti. Po dosazení konkrétních hodnot dostáváme pro velikost průměrné síly F = 930 N. Stejnou velikost by měla např. tíhová síla, která by působila na kámen o hmotnosti 94,8 kg. Není pochyb o tom, že síla o velikosti 930 N je příliš velká na to, aby voják její účinek „jen tak ustál“.

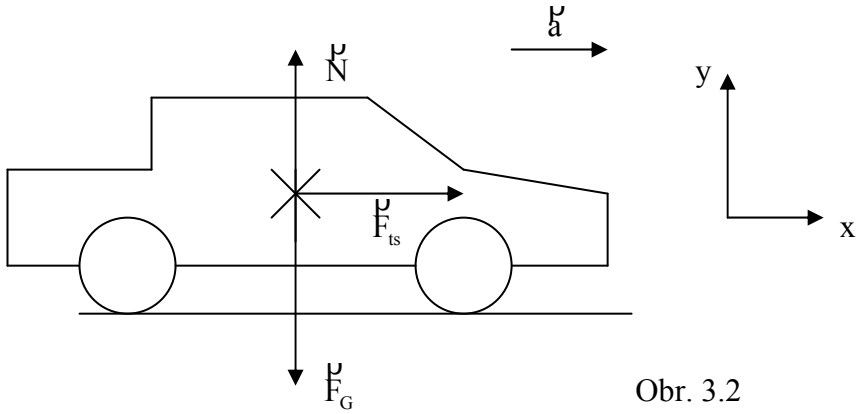
Příklad 3: Automobil o hmotnosti 1000 kg se pohybuje rovnoměrně zrychleně po vodorovné silnici. Zakreslete do obrázku všechny síly, které na automobil působí, a vypočtěte velikost výslednice sil, která automobilu udílí zrychlení o velikosti $2{,}5\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$. Předpokládejte, že kola při rozjezdu nepodkluzují, automobil považujte za hmotný bod a odpor vzduchu zanedbejte.

Řešení: $m = 1000\,\mathrm{kg}$

$a = 2{,}5\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$

$F = ?$

Nejdříve zvolíme vztažnou soustavu, ve které budeme pohyb automobilu popisovat. Nechť to je inerciální vztažná soustava spojená se Zemí.
Uvažujme, které síly na automobil působí. Jsou to tíhová síla $\vec{F}_G$, výsledná tlaková síla silnice $\vec{N}$ a výsledná statická třecí síla mezi silnicí a koly $\vec{F}_{ts}$. Tyto síly mají různá působiště, ale pokud považujeme automobil za hmotný bod, lze je umístit do těžiště (viz. obr. 3.2).



Obr. 3.2

Podle 2NPZ platí: $m\vec{a} = \vec{F}_G + \vec{N} + \vec{F}_{ts}$.

Pro potřebu výpočtu je nutno zvolit soustavu souřadnic, v níž určíme složky jednotlivých vektorů. Volba vychází z přirozeného požadavku, aby byl výpočet co nejjednodušší. Vzhledem ke směru jednotlivých sil se přímo nabízí zvolit osu x vodorovně tak, aby byla souhlasně rovnoběžná s vektorem zrychlení automobilu, a osa y směřovala svisle vzhůru (viz. obr. 3.2).

Potom $\vec{F}_G = (0, -mg)$, tzn. tíhová síla má nenulovou složku pouze ve směru osy y, kde znaménko mínus značí, že tíhová síla je opačně orientovaná než osa y. $\vec{N} = (0, N)$, tzn. tlaková síla má nenulovou složku pouze ve směru osy y, a $\vec{F}_{ts} = (F_{ts}, 0)$, tzn. statická třecí síla má nenulovou složku pouze ve směru osy x.

Pro vektor zrychlení obecně platí $\vec{a} = (a_x, a_y)$, ale automobil jede po vodorovné silnici, takže jeho zrychlení má nenulovou složku pouze ve směru osy x. Ve směru osy y je složka zrychlení automobilu nulová, tedy $a_y = 0$.

Z 2NPZ tedy dostáváme dvě skalární rovnice:

x: $ma_x = F_{ts} = 2500\ \mathrm{N}$

y: $0 = -mg + N \Rightarrow N = mg$

Komentář: Často se lze setkat s tvrzením, že automobil uvádí do pohybu tahová síla motoru. Tento závěr je evidentně nesprávný, neboť tahová síla motoru je jednou z vnitřních sil soustavy a jako taková neudílí automobilu zrychlení (podle 3NPZ totiž působí motor na kola silou stejně velkou, ale opačně orientovanou jako kola na motor). Automobilu může udílet zrychlení pouze vnější síla. Tou je v našem případě výsledná statická třecí síla mezi koly a vozovkou. Její velikost je 2500 N a má stejný směr jako vektor okamžitého zrychlení automobilu.

Příklad 4: Na kuchyňském prkénku jsme nakrájeli na přibližně stejně malé kousky zeleninu do polévky. Nyní prkénko vezmeme a nakloníme nad hrnec s vodou pod úhlem 40^0 (viz. obr. 3.3). Při tomto náklonu se začne suchá zelenina právě sesouvat do hrnce. Zakreslete všechny síly, které na jeden vybraný kousek zeleniny působí, a vypočtěte koeficient statického tření mezi prkénkem a kouskem zeleniny.

Řešení: $\alpha = 40^0$

$f_0 = ?$

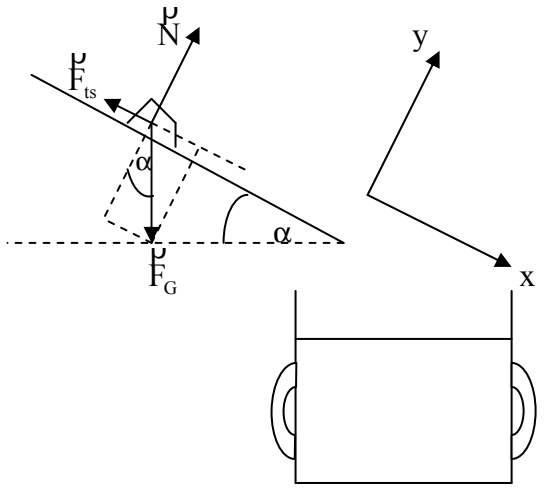
Nejdříve zvolíme vztažnou soustavu, ve které budeme kousek zeleniny pozorovat. Nechť je to inerciální vztažná soustava spojená se Zemí.

Do obrázku zakreslíme všechny síly, které na kousek zeleniny působí. Jmenovitě to jsou: tíhová síla $\vec{F}_G$, tlaková síla prkénka $\vec{N}$ a statická třecí

síla $\vec{F}_{ts}$. Protože se kousek zeleniny ještě nepohybuje, je výslednice na něj působících sil nulová.

2NPZ má tedy tvar $\vec{0} = \vec{F}_G + \vec{N} + \vec{F}_{ts}$.

Pro výpočet zvolíme soustavu souřadnic tak, že osa x je nesouhlasně rovnoběžná s vektorem statické třecí síly a osa y je na ni kolmá (viz. obr. 3.3).



Obr. 3.3

Platí: $\vec{F}_G = (F_G \sin\alpha, -F_G \cos\alpha)$, $\vec{N} = (0, N)$ a $\vec{F}_{ts} = (-F_{ts}, 0)$.

Rozepíšeme-li 2NPZ do složek, dostáváme:

x: $0 = F_G \sin\alpha - F_{ts} \Rightarrow F_{ts} = F_G \sin\alpha$.

y: $0 = -F_G \cos\alpha + N \Rightarrow N = F_G \cos\alpha$.

V okamžiku, kdy se kousek zeleniny pohne, nabude statická třecí síla své maximální hodnoty, pro niž platí vztah $F_{ts} = f_0 N$. Dosadíme-li jej do vztahu $F_{ts} = F_G \sin\alpha$, dostáváme $f_0 N = F_G \sin\alpha$, kde $N = F_G \cos\alpha$.

Pro koeficient statického tření tedy platí

$$f_0 = \frac{F_G \sin\alpha}{N} = \frac{F_G \sin\alpha}{F_G \cos\alpha} = \mathrm{tg}\alpha \doteq 0{,}84.$$

Koeficient statického tření mezi nakrájenou zeleninou a prkénkem je 0,84.

<u>Komentář</u>: Z výsledku vyplývá, že koeficient statického tření závisí pouze na úhlu náklonu prkénka. Pokud bude $\alpha < 40^0$, zelenina se nepohne.

Pro informaci také dopočtěme maximální velikost statické třecí síly. Pro její výpočet je nutné znát hmotnost kousku zeleniny, neboť $F_{ts} = f_0 N = \mathrm{tg}\alpha \cdot mg\cos\alpha$. Všimněte si, že až do tohoto okamžiku nebylo nutné tuto hmotnost znát. Předpokládejme tedy, že je zelenina nakrájena na kousky, z nichž každý má hmotnost 2 g. Po dosazení konkrétních hodnot do vztahu pro velikost statické třecí síly dostáváme $F_{ts} \doteq 0{,}013$ N.

Příklad 5: Muž o hmotnosti 82 kg stojí ve výtahu na osobní váze. Jaké hodnoty ukazuje váha v závislosti na orientaci vektoru zrychlení výtahu, jehož velikost je 2,3 $m \cdot s^{-2}$? Příklad řešte z hlediska inerciální vztažné soustavy spojené se Zemí i z hlediska neinerciální vztažné soustavy spojené s kabinou výtahu.

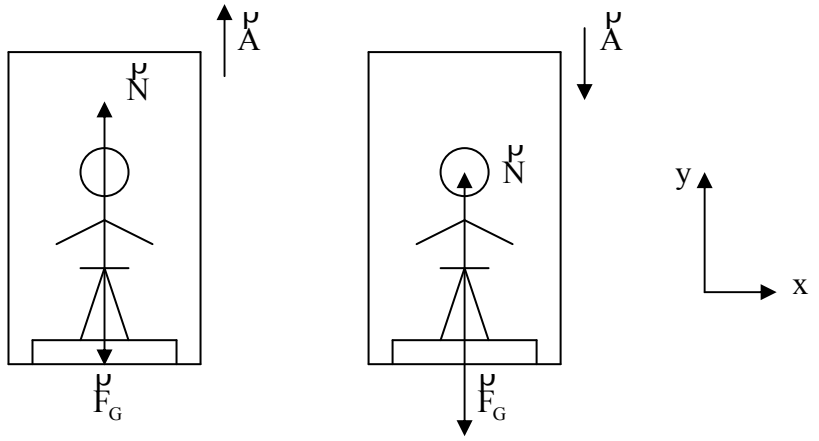
Řešení: $m = 82\ \text{kg}$

$A = 2{,}3\ m \cdot s^{-2}$

$m' = ?$

Řešení vzhledem k inerciální vztažné soustavě spojené se Zemí:

Do obrázku zakreslíme síly, které na muže působí. Jsou to: tíhová síla $\vec{F}_G$ a tlaková síla $\vec{N}$ osobní váhy.



a) b) Obr. 3.4

Muž se pohybuje spolu s výtahem, tedy se zrychlením $\vec{A}$, proto můžeme 2NPZ zapsat ve tvaru $m\vec{A} = \vec{F}_G + \vec{N}$.

V soustavě souřadnic zvolené podle obr. 3.4 jsou složky působících sil a složka zrychlení muže ve směru osy x nulové.

Ve směru osy y pro případ z obr. 3.4 a) platí:

$mA = -mg + N \Rightarrow N = m(g + A)$.

Ve směru osy y pro případ z obr. 3.4 b) platí:

$-mA = -mg + N \Rightarrow N = m(g - A)$.

Podle 3NPZ působí osobní váha na muže tlakovou silou o velikosti N, tedy i muž na váhu působí stejně velkou silou.

Proto $m'g = N \Rightarrow m' = \dfrac{N}{g}$.

V situaci z obr. 3.4 a) váha ukazuje údaj:

$$m' = \frac{N}{g} = \frac{m(g + A)}{g} = m\left(1 + \frac{A}{g}\right) \doteq 101\ \text{kg}.$$

V situaci z obr. 3.4 b) váha ukazuje údaj:

$$m' = \frac{N}{g} = \frac{m(g-A)}{g} = m\left(1-\frac{A}{g}\right) \doteq 63\ \text{kg}.$$

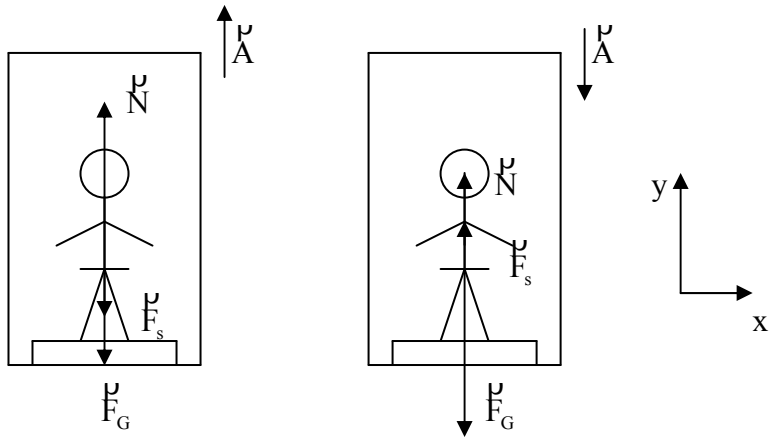
Komentář: V situaci z obr. 3.4 b) by také mohlo nastat $\vec{A} = \vec{g}$. V tomto případě by váhy ukazovaly údaj $m' = 0$. Jednalo by se o tzv. beztížný stav.

Řešení vzhledem k neinerciální vztažné soustavě spojené s výtahem:

V případě neinerciální vztažné soustavy musíme do 2NPZ zahrnout kromě reálných sil $\vec{F}_G$ a $\vec{N}$ i setrvačnou sílu $\vec{F}_s = -m\vec{A}$ (viz. obr. 3.5)

Muž je vzhledem k výtahu v klidu, proto $\vec{a}' = \vec{0}$.

2NPZ je tedy tvaru $\vec{0} = \vec{F}_G + \vec{N} + \vec{F}_s = \vec{F}_G + \vec{N} - m\vec{A}$.



a) b) Obr. 3.5

Zvolíme-li soustavu souřadnic jako dříve (viz. obr. 3.5), jsou opět x-ové složky působících sil nulové.

Ve směru osy y v situaci z obr. 3.5 a) platí:

$0 = -mg + N - mA \Rightarrow N = m(g + A)$.

Ve směru osy y v situaci z obr. 3.5 b) platí:

$0 = -mg + N + mA \Rightarrow N = m(g - A)$.

Další postup je stejný jako při řešení úlohy v inerciální vztažné soustavě.

Příklad 6: Automobil projíždí neklopenou kruhovou zatáčkou o poloměru 100 m rovnoměrným pohybem. Koeficient statického tření mezi pneumatikami a suchým asfaltem[29] je 0,55. Určete velikost maximální rychlosti, kterou může automobil zatáčku projet, aniž by dostal smyk. Řešte z hlediska inerciální vztažné soustavy spojené se Zemí i z hlediska neinerciální vztažné soustavy spojené s automobilem.

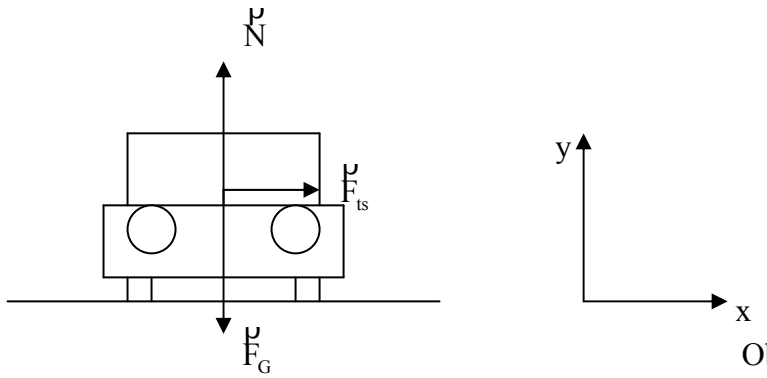
[29] Hodnota statického koeficientu tření převzata z [8].

Řešení: $m = 1200\,\mathrm{kg}$
$r = 100\,\mathrm{m}$
$f_0 = 0{,}55$
$v = ?$

Řešení vzhledem k inerciální vztažné soustavě spojené se Zemí:

Automobil se pohybuje rovnoměrným pohybem po kružnici s dostředivým zrychlením $\vec{a}_d$, pro jehož velikost platí $a_d = \frac{v^2}{r}$. Toto zrychlení udílí automobilu dostředivá síla. V naší situaci má charakter dostředivé síly statická třecí síla $\vec{F}_{ts}$, kterou působí silnice na pneumatiky automobilu.

Na automobil tedy působí tři síly: tíhová síla Země $\vec{F}_G$, tlaková síla silnice $\vec{N}$ a statická třecí síla $\vec{F}_{ts}$.
2NPZ má proto tvar $m\vec{a} = m\vec{a}_d = \vec{F}_G + \vec{N} + \vec{F}_{ts}$.
Souřadnicovou soustavu zvolíme tak, aby osa x směřovala do středu zatáčky a osa y na ni byla kolmá a směřovala svisle vzhůru (viz. obr. 3.6).



Obr. 3.6

V této soustavě souřadnic mají jednotlivé síly složky: $\vec{F}_G = (0, -mg)$, $\vec{N} = (0, N)$ a $\vec{F}_{ts} = (F_{ts}, 0)$.
Automobil má zrychlení pouze ve směru osy x, ve směru osy y automobil urychlován není. Pro to $\vec{a} = (a_d, 0)$.
Po rozepsání 2NPZ do složek dostáváme:

x: $ma_d = m\frac{v^2}{r} = F_{ts}$.

y: $0 = -F_G + N \Rightarrow N = F_G$.

Největší přípustná rychlost automobilu odpovídá situaci, kdy statická třecí síla nabude své maximální hodnoty.

Proto: $m\frac{v^2}{r} = F_{ts} = f_0 N = f_0 mg \Rightarrow v = \sqrt{f_0 gr} \approx 23{,}2\,\mathrm{m \cdot s^{-1}} \approx 83{,}6\,\mathrm{km \cdot h^{-1}}$.

Automobil může projet zatáčkou o poloměru 100 m maximálně rychlostí o velikosti $83{,}6\,\mathrm{km \cdot h^{-1}}$.

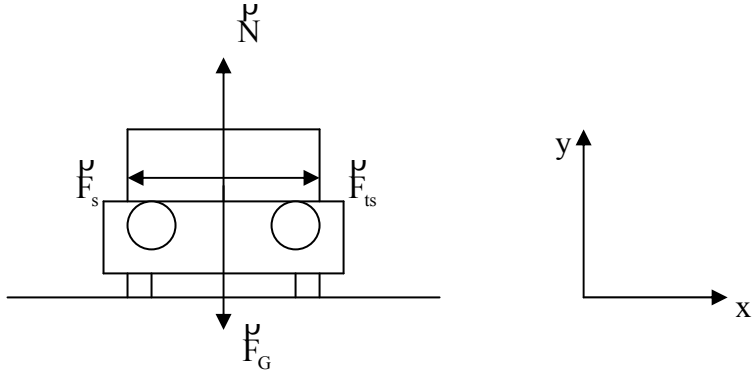
Řešení vzhledem k neinerciální vztažné soustavě spojené s automobilem:

Při výpočtech prováděných v neinerciální vztažné soustavě, jejíž počátek se pohybuje vzhledem k inerciální vztažné soustavě (spojené např. se Zemí) rovnoměrným pohybem po kružnici s dostředivým zrychlením $\vec{a}_d$, je nutné zahrnout do 2NPZ fiktivní sílu $\vec{F}_s = -m\vec{A}$, kde $\vec{A} = \vec{a}_d$, tj. $\vec{F}_s = -m\vec{a}_d$. Tuto sílu nazýváme vzhledem k jejímu směru silou setrvačnou odstředivou (viz. obr. 3.7).

Vztažnou soustavu jsme spojili s automobilem, proto pro jeho zrychlení platí $\vec{a}' = \vec{0}$.

2NPZ v neinerciální vztažné soustavě má tedy tvar:

$$\vec{0} = \vec{F}_G + \vec{N} + \vec{F}_{ts} + \vec{F}_s = \vec{F}_G + \vec{N} + \vec{F}_{ts} - m\vec{a}_d.$$



Obr. 3.7

Zvolíme-li soustavu souřadnic stejně jako dříve (viz. obr. 3.7), platí: $\vec{F}_G = (0, -mg)$, $\vec{N} = (0, N)$, $\vec{F}_{ts} = (F_{ts}, 0)$ a $\vec{F}_s = (-ma_d, 0)$.

2NPZ lze potom rozepsat:

$$x:\ 0 = F_{ts} - ma_d = F_{ts} - m\frac{v^2}{r} \Rightarrow F_{ts} = m\frac{v^2}{r}.$$

$$y:\ 0 = -mg + N \Rightarrow N = mg.$$

Další výpočet a komentáře jsou stejné jako při řešení v inerciální vztažné soustavě.

B) Neřešené příklady

Příklad 7: Nejlepší světoví hráči tenisu servírují míček rychlostí o velikosti až $220\,\mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1}$. Určete velikost hybnosti tenisového míčku, který má hmotnost[30] přibližně 57 g.

Obr. 3.8

Příklad 8: Určete velikost hybnosti pohodlně si vykračujícího muže o hmotnosti 80 kg, který jde rychlostí o velikosti $2\,\mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1}$ a srovnejte ji s velikostí hybnosti sprintera z příkladu 7 z kapitoly Kinematika. Předpokládejte, že hmotnost sprintera je stejná jako hmotnost chodce.

Příklad 9: Určete velikosti změn hybnosti automobilu z příkladu 22 z kapitoly Kinematika v jednotlivých etapách rozjíždění. Hmotnost automobilu je 1200 kg. Dále vypočtěte velikost průměrné síly, která na automobil v každé z etap působila.

Příklad 10: Hokejista udeřil puk o hmotnosti[31] 160 g, který byl původně v klidu, průměrnou silou o velikosti 390 N. Jak rychle se puk pohyboval, trval-li náraz hokejky 0,01 s?

Obr. 3.9

[30] Hmotnost tenisového míčku nalezena na [27].

[31] Hmotnost puku zjištěna z [28] a obr. 3.9 převzat z [29].

Příklad 11: V dřívějších dobách se při válečném tažení používala děla, která měla značnou hmotnost a muselo je obsluhovat několik vojáků. Určete tedy hmotnost děla[32] z obrázku 3.10, víte-li, že při výstřelu z tohoto děla vodorovným směrem se koule o hmotnosti 8 kg pohybuje rychlostí o velikosti $600\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$ a dělo opačným směrem rychlostí o velikosti $2{,}6\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$. Jaké předpoklady je třeba učinit, aby bylo možno použít ZZH?

Obr. 3.10

Příklad 12: Na železničním nádraží se uvolnil špatně zajištěný prázdný železniční vagon (viz. obr. 3.11) o hmotnosti 22 t a na vodorovné trati získal rychlost o velikosti $0{,}5\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$. Touto rychlostí narazil do plně naloženého vagonu (viz. obr. 3.12) o hmotnosti 58 t, který byl v klidu. Vagony se po srážce spojily. Za předpokladu, že je soustava izolovaná, vypočtěte velikost rychlosti vagonů po srážce[33].

Obr. 3.11

Obr. 3.12

Příklad 13: Žena se vrátila z nákupu s taškou o hmotnosti 4,5 kg. Tuto tašku položila u dveří na zem a zula si boty. Jak velkou tahovou silou musí nyní žena tašku zvednout, aby se taška pohybovala svisle vzhůru se zrychlením o velikosti $0{,}4\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$? Zakreslete do obrázku všechny síly, které na tašku působí, a poté proveďte výpočet.

Příklad 14: Dříve, než byl zaveden vodovodní systém, museli lidé chodit pro vodu do studny. U studny byl přivázaný na provaze kbelík, kterým se voda ze studny vytahovala. Vypočtěte hmotnost kbelíku s vodou, víte-li, že provaz na něho působil tahovou silou o velikosti 115 N a kbelík se přitom pohyboval se zrychlením o velikosti $1{,}5\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$.

Příklad 15: Chlapec o hmotnosti 40 kg leze po stromě a nevšimne si suché větve, na kterou se chystá stoupnout. Větev praskne, působí-li na ni síla o velikosti 350 N. Udrží větev chlapce?

---

[32] Údaje a obr. 3.10 převzaty z [30].

[33] Údaje o hmotnostech a obrázky 3.11 a 3.12 naleznete na [31].

Příklad 16: Sprinter o hmotnosti 85 kg se rozbíhá se zrychlením o velikosti $2{,}8\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$. Jaký musí být koeficient statického tření mezi botami a podložkou, aby boty sprintera nepodkluzovaly? Určete rovněž velikost statické třecí síly mezi botami a podložkou.

Obr. 3.13[34]

Příklad 17: Mladá dívka se rozhodla uklidit svůj pokojíček a na závěr úklidu vysát koberec. Při vysávání táhla vysavač o hmotnosti 4,75 kg silou o velikosti 15 N pod úhlem 25^0 vzhledem k vodorovné rovině. Předpokládejte, že se vysavač při vysávání pohyboval rovnoměrným pohybem. Zakreslete do obrázku všechny síly, které na vysavač působily, a určete koeficient dynamického tření mezi kobercem a vysavačem.

Příklad 18[35]: Matka táhne po zasněženém chodníku sáně s dítětem. Rychlost saní je konstantní. Hmotnost saní s dítětem je 25 kg a koeficient dynamického tření mezi skluznicí a sněhem je 0,1. Zakreslete do obrázku síly, které na sáně působí, a určete velikost tahové síly provazu, který svírá s vodorovnou podložkou úhel 50^0.

Obr. 3.14

Příklad 19: Na vlečce nákladního automobilu je naloženo naštípané dřevo. Koeficient dynamického tření[36] mezi dřevem a kovem je přibližně 0,35. Do obrázku zakreslete síly, které na kousek dřeva působí, a určete velikost zrychlení kousku dřeva při vyklápění, víte-li, že úhel, který svírá nakloněná vlečka s vodorovnou rovinou, je 35^0.

Obr. 3.15

[34] Obr. 3.14 převzat z [32].

[35] Příklad převzat z [4] a obr. 3.14 nalezen na [33].

[36] Hodnota koeficientu dynamického tření převzata z [8] a obr. 3.15 převzat z [34].

Příklad 20: Vypočtěte koeficient dynamického tření mezi dítětem a skluzavkou, která má sklon 25^0, a dítě se na ní pohybuje se zrychlením o velikosti $2{,}5\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$.

Obr. 3.16[37]

Příklad 21: Motocyklistovi došel na projížďce benzin a musel dotlačit svoji motorku o hmotnosti přibližně 200 kg k nejbližší benzinové stanici. Bohužel měl smůlu, že silnice k benzinové pumpě vedla do kopce se sklonem 12^0. Určete minimální velikost síly, kterou musel motocyklista vyvinout, aby se motorka začala do kopce pohybovat. Koeficient statického tření mezi pneumatikami motorky a povrchem silnice je 0,55.

Příklad 22: Řetěz řetízkového kolotoče je dlouhý přibližně 6 m a když se kolotoč rovnoměrně otáčí, svírá se svislým směrem úhel 15^0. Určete velikost tahové síly řetězu, která působí na sedačku s dítětem o celkové hmotnosti 35 kg. Dále vypočtěte velikost rychlosti, s jakou se sedačka s dítětem otáčí. Odpor vzduchu zanedbejte.

Obr. 3.17[38]

[37] Obr. 3.16 převzat z [35].

[38] Obr. 3.17 převzat z [36].

4. MECHANICKÁ PRÁCE A ENERGIE

4.1. Přehled základních poznatků o mechanické práci a energii

Dalšími důležitými fyzikálními veličinami jsou mechanická práce, výkon, mechanická energie a energie. V tomto odstavci zmiňované veličiny nadefinujeme a připomeneme fyzikální vztahy, které pro ně platí.

Mechanická práce W je skalární fyzikální veličina, která charakterizuje účinek síly na pohybující se hmotný bod. Působí-li na hmotný bod, který se pohybuje po části přímky, konstantní síla $\vec{F}$, je práce vykonaná touto silou definována vztahem $W = F \cdot s \cdot \cos\alpha$, kde s je dráha uražená hmotným bodem při působení této síly a α je úhel, který svírá vektor síly s vektorem posunutí. V závislosti na úhlu α nastává právě jedna z následujících možností:

- pro $0 \le \alpha < \frac{\pi}{2}$ je vykonaná práce kladná (W > 0),
- pro $\alpha = \frac{\pi}{2}$ je vykonaná práce nulová (W = 0),
- pro $\frac{\pi}{2} < \alpha \le \pi$ je vykonaná práce záporná (W < 0).

Práci lze samozřejmě definovat i v případě, kdy působící síla není konstantní nebo se hmotný bod nepohybuje po části přímky, ale úvahy přesahují rámec středoškolské fyziky, a proto je zde nebudeme uvádět.

Výkon síly P je skalární fyzikální veličina, která vyjadřuje, jak „rychle“ síla koná práci.
Průměrný výkon P_p v daném časovém intervalu Δt definujeme jako podíl práce ΔW vykonané za časový interval Δt a délky tohoto intervalu: $P_p = \frac{\Delta W}{\Delta t}$.
Okamžitý výkon P je limitním případem průměrného výkonu. Okamžitý výkon je tedy definován vztahem $P = \frac{\Delta W}{\Delta t}$, kde $\Delta t \to 0$.
Dosadíme-li do vztahu pro okamžitý výkon za práci konstantní síly po úsečce délky s definiční vztah $W = F \cdot s \cdot \cos\alpha$, dostáváme

$$P = \frac{\Delta(F \cdot s \cdot \cos\alpha)}{\Delta t} = F \cdot \frac{\Delta s}{\Delta t} \cdot \cos\alpha = F \cdot v \cdot \cos\alpha,$$ kde v je velikost okamžité rychlosti.

V praxi se často mluví o výkonu nějakého stroje. Aby stroj konal práci, musí mu být dodávána energie. Nikdy však nedochází vlivem ztrát (např. třením) k tomu, že by energie dodaná za určitou dobu byla rovna práci, kterou stroj za tutéž dobu vykoná. S tím souvisí pojem příkon a účinnost stroje.
Příkon P_0 je určen energií, kterou je nutno stroji dodat za určitý časový interval, tj. $P_0 = \frac{\Delta E}{\Delta t}$.

Účinnost stroje η je definována jako podíl průměrného výkonu P_p a příkonu P_0 za stejnou dobu, tedy $\eta = \frac{P_p}{P_0}$. Platí $P_p < P_0$, proto je účinnost vždy menší než jedna. Často se tato veličina vyjadřuje v procentech.

Nyní budeme věnovat pozornost fyzikální veličině zvané energie. Připomeneme jednotlivé druhy energie a zformulujeme důležité zákony-zákon zachování mechanické energie a zákon zachování energie.

Kinetická (pohybová) energie hmotného bodu E_K je skalární fyzikální veličina, která charakterizuje pohybový stav hmotného bodu. Definujeme ji vztahem $E_K = \frac{1}{2}mv^2$, kde m je hmotnost hmotného bodu a v je velikost jeho okamžité rychlosti. Lze dokázat (proveďte), že změna kinetické energie je rovna práci všech sil, jimiž v daném časovém intervalu na sledovaný hmotný bod působí okolní objekty, tj. $W = \Delta E_K = E_{K2} - E_{K1} = \frac{1}{2}m\left(v_2^2 - v_1^2\right)$.
Celková kinetická energie soustavy n hmotných bodů je definována jako součet kinetických energií jednotlivých hmotných bodů, tedy $E_{KC} = E_{K1} + E_{K2} + ... + E_{Kn}$.

Potenciální (polohovou) energii má každý hmotný bod, který se nachází v tzv. konzervativním silovém poli. Jako konzervativní označujeme taková pole, v nichž práce síly pole mezi dvěma vybranými body prostoru nezávisí na volbě křivky, která tyto body spojuje. Příkladem takového pole může být tíhové pole Země (pokuste se zdůvodnit). Potenciální energie je skalární fyzikální veličina, která je určena vzájemnými polohami hmotných bodů dané soustavy. Je nutné si uvědomit, že potenciální energii nepřisuzujeme jednotlivým hmotným bodům, ale soustavě hmotných bodů (např. soustavě „hmotný bod + Země“ v případě tíhového pole). Podle druhu pole rozlišujeme potenciální energii tíhovou, gravitační, elektrostatickou, atd. V dalším se budeme zabývat pouze tíhovou potenciální energií, neboť se pohybujeme v oblasti mechaniky a zavedení tíhové potenciální energie je pro mechaniku, jak uvidíme později, velmi důležité.
Tíhová potenciální energie E_P je potenciální energie soustavy „hmotný bod + Země“. Definujeme ji následovně: změna tíhové potenciální energie je rovna záporně vzaté práci, kterou vykoná tíhová síla $\vec{F}_G$ při přemístění hmotného bodu z výšky h_1 do výšky h_2 nad povrchem Země. Tedy $-W = \Delta E_P = E_{P2} - E_{P1} = mg\left(h_2 - h_1\right)$.
Z předchozího vztahu je zřejmé, že hodnota tíhové potenciální energie v daném místě je závislá na volbě tzv. nulové hladiny tíhové potenciální energie. Při volbě nulové hladiny tíhové potenciální energie na povrchu Země je potom tíhová potenciální energie soustavy „hmotný bod + Země“ dána vztahem $E_P = mgh$, kde h je výška hmotného bodu nad povrchem Země a g je velikost tíhového zrychlení.

Na závěr odstavce odvodíme zákon zachování mechanické energie a zformulujeme zákon zachování energie.
Mechanická energie soustavy E je definována jako součet celkové kinetické a tíhové potenciální energie, tj. $E = E_{KC} + E_{PC}$.

Zákon zachování a přeměny mechanické energie (dále jen ZZME): V izolované soustavě je práce vnitřních sil (vysvětlete, proč uvažujeme pouze o práci vnitřních sil) dána vztahem $W = \Delta E_{KC} = E_{KC2} - E_{KC1}$. Současně platí $-W = \Delta E_{PC} = E_{PC2} - E_{PC1}$. Porovnáním obou vztahů dostáváme $E_{KC2} - E_{KC1} = -(E_{PC2} - E_{PC1}) \Rightarrow E_{KC2} + E_{PC2} = E_{KC1} + E_{PC1}$.
Vidíme, že při všech mechanických dějích v izolované soustavě platí, že celková kinetická energie soustavy se mění na úkor celkové potenciální energie a naopak, přitom však mechanická energie zůstává konstantní. Tedy $E = E_{KC} + E_{PC} = \text{konst.}$

Působí-li v izolované soustavě například třecí síly, přechází část původní mechanické energie v tzv. vnitřní energii tělesa a podložky[39]. Přitom platí, že změna mechanické energie izolované soustavy je rovna práci W_t, kterou vykonají třecí síly, tj. $\Delta E = W_t$ (tato práce je záporná - zdůvodněte). Mění-li se část mechanické energie v jiný druh energie, ZZME neplatí. Platí však zákon zachování energie.
Zákon zachování energie (dále jen ZZE): V izolované soustavě může docházet ke změnám různých druhů energie (mechanické, vnitřní, elektrické, atd.), přesto se celková energie soustavy zachovává. Zákon zachování energie je, podobně jako např. Newtonovy pohybové zákony, postulátem.
Připomeňme, že pro izolovanou soustavu platí také zákon zachování hybnosti (ZZH), s nímž jsme se již setkali v minulé kapitole.

[39] Vnitřní energie je spojena s vnitřní strukturou tělesa a podložky. Změna vnitřní energie souvisí s tepelným pohybem a navenek se projeví zahřáním tělesa a podložky.

4.2. Otázky a příklady na mechanickou práci a energii

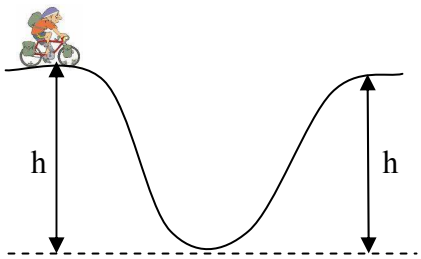
4.2.1. Otázky na mechanickou práci a energii

Otázka 1: Jakou práci vykoná při rovnoměrném přímočarém, resp. rovnoměrném křivočarém přemisťování knihy z místa o výšce h_1 do místa o výšce h_2 nad povrchem Země výsledná sila, které na knihu působí? Jak by se závěry změnily, kdyby se kniha pohybovala zrychleně, resp. zpomaleně? Knihu považujte za hmotný bod.

Otázka 2[40]: Je z hlediska práce síly člověka výhodnější vozík tlačit, nebo táhnout pod úhlem α? Předpokládejte, že se vozík při tlačení i táhnutí pohybuje s tímtéž zrychlením.

Otázka 3: Proč se při stěhování velkých a těžkých kusů nábytku používají stěhovací lana nebo háky?

Otázka 4: Cyklista si vyjel do hor na projížďku. Vyšlapal na kopec, tam se zastavil a rozhlédl se po krajině. Zjistil, že protější kopec je stejně vysoký jako ten, na kterém právě stojí (viz. obr. 4.1) a řekl si, že když nebude z kopce šlapat ani brzdit, musí na protější kopec vyjet. Kriticky posuďte, zda byla jeho úvaha správná.



Obr. 4.1

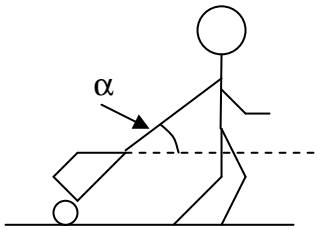
[40] Inspirováno [10].

4.2.2. Příklady na mechanickou práci a energii

A) Řešené příklady

Příklad 1: Pošťačka táhne tašku na kolečkách rovnoměrně přímočaře pod úhlem 50^0 vzhledem k vodorovné rovině silou o velikosti 25 N. Určete práci, kterou při roznášení pošty vykoná, urazí-li vzdálenost 2 km.

Řešení: $F = 25\ \text{N}$
$\alpha = 50^0$
$s = 2\ \text{km}$
$W = ?$



Obr. 4.2

Pro určení práce, kterou pošťačka vykoná, použijeme definiční vztah $W = F \cdot s \cdot \cos\alpha \approx 32\ \text{kJ}$.
Pošťačka tedy vykoná práci přibližně 32 kJ.

Příklad 2: Ponorné čerpadlo o příkonu 800 W může vyčerpat vodu ze studny maximálně z hloubky 33 m. Za 1 minutu vyčerpá toto čerpadlo 100 l vody[41]. Určete účinnost čerpadla. Hustota vody je přibližně $1000\ \text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$.

Řešení: $P_0 = 800\ \text{W}$
$h = 33\ \text{m}$
$t = 1\ \text{min}$
$V = 100\ \text{l}$
$\rho = 1000\ \text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$
$\eta = ?$

Účinnost čerpadla určíme z definičního vztahu $\eta = \frac{P_p}{P_0} = \frac{\frac{\Delta W}{\Delta t}}{P_0} = \frac{\Delta W}{P_0 \Delta t}$, kde ΔW je práce potřebná k vyzvednutí daného množství vody do výšky h, tj. $\Delta W = mgh = \rho V g h$. Dosazením do vztahu pro účinnost dostáváme $\eta = \frac{\rho V g h}{P_0 \Delta t} \approx 0{,}674$, tj. 67,4%.
Účinnost ponorného čerpadla je 67,4%.

[41] Hodnoty převzaty z [37].

Příklad 3: V mnoha westernech vidíme scény ze salonů, kdy si kovboj objedná u barmana pálenku a posadí se na okraj barového pultu. Aby barman nemusel s jednou sklenicí chodit, pošle ji kovbojovi po barovém pultě. Sklenice se zastaví přímo před kovbojem. Určete práci, kterou vykoná třecí síla mezi sklenicí a pultem. Pult je dlouhý 5 m, sklenice s pálenkou má hmotnost 200 g a koeficient dynamického tření mezi pultem a sklenicí je 0,15. Jaký bude pokles mechanické energie vlivem třecí síly a jaká byla počáteční rychlost sklenice? Odpor vzduchu zanedbejte.

Obr. 4.3[42]

Řešení: $s = 5\,\mathrm{m}$
$m = 200\,\mathrm{g}$
$f = 0{,}15$
$W = ?$
$\Delta E = ?$

Při výpočtu práce vyjdeme z definičního vztahu $W = F \cdot s \cdot \cos\alpha$, kam za velikost síly F dosadíme velikost dynamické třecí síly $F_{td} = fN = fmg$. Třecí síla směřuje proti pohybu, proto je úhel mezi vektorem posunutí a vektorem síly roven 180^0. Po dosazení do definičního vztahu tedy dostáváme $W = -F_{td} \cdot s = -f \cdot N \cdot s = -f \cdot m \cdot g \cdot s \approx -1{,}5\,\mathrm{J}$.
Práce vykonaná třecí silou je -1,5 J.
Mechanická energie je pro soustavu „sklenice + pult“ zastoupena pouze kinetickou energií sklenice. Přijímáme zde totiž obvyklý předpoklad, že pult je vodorovný a je ztotožněn s nulovou hladinou tíhové potenciální energie. Pro práci vykonanou třecí silou platí $W = \Delta E_K = -1{,}5\,\mathrm{J}$. Záporný výsledek jistě nikoho nepřekvapí, neboť $\Delta E_K = E_{K,konc} - E_{K,poč}$. V našem případě je $E_{K,konc} = 0$, proto $\Delta E_K = -E_{K,poč} < 0$.
Pokles kinetické energie vlivem tření je 1,5 J.
Počáteční rychlost sklenice určíme ze vztahu
$W = \Delta E_K = \frac{1}{2}mv_{konc}^2 - \frac{1}{2}mv_{poč}^2$. (Zanedbáváme totiž odpor vzduchu, proto je změna kinetické energie sklenice určena pouze prací třecí síly.) Podle předpokladu se sklenice před kovbojem právě zastaví, proto $v_{konc} = 0$.
Po úpravě dostáváme $v_{poč} = \sqrt{-\frac{2W}{m}} = \sqrt{2 \cdot f \cdot g \cdot s} \approx 3{,}8\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$.
Počáteční rychlost sklenice s pálenkou je $3{,}8\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

---

[42] Obr. 4.3 převzat z [38].

Komentář: Zdůrazněme, že v izolované soustavě „sklenice + barový pult“ neplatí ZZME, neboť vlivem tření se kinetická energie mění ve vnitřní energii soustavy. ZZE, v němž je započtena i vnitřní energie soustavy „sklenice + pult“, však samozřejmě platí.

Příklad 4[43]: Bílá kulečníková koule narazí do červené, která je zpočátku v klidu. Rychlost bílé koule má po srážce velikost $3{,}5\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ a svírá s původním směrem pohybu úhel 22^0. Červená koule odletí rychlostí o velikosti $2{,}0\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Za předpokladu, že jsou obě koule stejně hmotné, vypočtěte velikost rychlosti bílé koule před srážkou a směr pohybu červené koule po srážce. Rozhodněte také, zda se jednalo o pružnou srážku.

Obr. 4.4

Řešení: $v_B = 3{,}5\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$

$v_Č = 2{,}0\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$

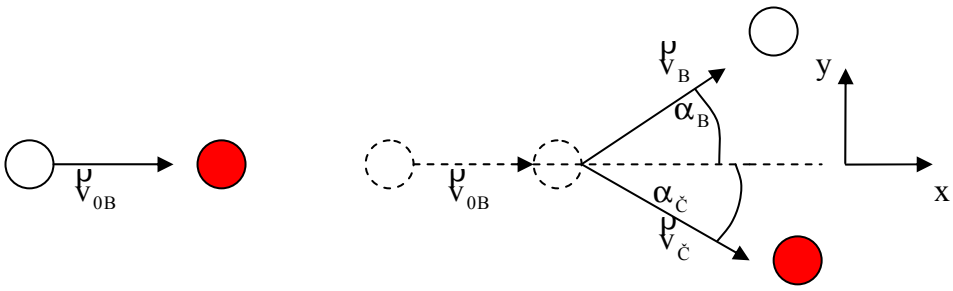
$\alpha_B = 22^0$

$v_{0B} = ?$

$\alpha_Č = ?$

Nejdříve do obrázku zakreslíme situaci ze zadání.

Před srážkou: Po srážce:



Obr. 4.5

Při výpočtech příkladů tohoto typu, tj. při určování velikostí rychlostí a jejich směrů, se vychází ze zákona zachování hybnosti. ZZH je vyjádřen vektorovou rovnicí $\vec{p}_{0B} + \vec{p}_{0Č} = \vec{p}_B + \vec{p}_Č$, kde $\vec{p}_{0B}$ je hybnost bílé koule před srážkou, $\vec{p}_{0Č}$ je hybnost červené koule před srážkou ($\vec{p}_{0Č} = \vec{0}$), $\vec{p}_B$ je hybnost bílé koule po srážce a $\vec{p}_Č$ je hybnost červené koule po srážce.

Zvolíme-li soustavu souřadnic podle obr. 4.5, lze vektorovou rovnici vyjadřující ZZH nahradit dvěma rovnicemi skalárními

[43] Příklad převzat z [4] a obr. 4.4 převzat z [39].

x: $m_B v_{0B} = m_B v_B \cos\alpha_B + m_Č v_Č \cos\alpha_Č$,

y: $0 = m_B v_B \sin\alpha_B - m_Č v_Č \sin\alpha_Č$,

resp. x: $v_{0B} = v_B \cos\alpha_B + v_Č \cos\alpha_Č$,

y: $0 = v_B \sin\alpha_B - v_Č \sin\alpha_Č$, neboť podle zadání $m_B = m_Č$.

Získali jsme dvě rovnice pro dvě neznámé v_{0B} a $\alpha_Č$.

Nejdříve z druhé rovnice vypočteme neznámý úhel $\alpha_Č$:

$$\sin\alpha_Č = \frac{v_B \sin\alpha_B}{v_Č} \Rightarrow \alpha_Č = \arcsin\frac{v_B \sin\alpha_B}{v_Č} \doteq 41^0.$$

Výsledek dosadíme do první ze skalárních rovnic získaných ze ZZH a vypočteme velikost rychlosti bílé koule před nárazem:

$$v_{0B} = v_B \cos\alpha_B + v_Č \cos\alpha_Č = v_B \cos\alpha_B + v_Č \cos\left(\arcsin\frac{v_B \sin\alpha_B}{v_Č}\right) \doteq$$

$$\doteq 4{,}8\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}.$$

Velikost rychlosti bílé koule před srážkou je přibližně $4{,}8\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$, červená koule se pohybuje pod úhlem 41^0 vzhledem k směru rychlosti bílé koule před nárazem.

Na závěr máme za úkol rozhodnout, zda je srážka pružná či nikoli – ověřujeme tedy platnost ZZME. Platí-li ZZME, jedná se o srážku pružnou, pokud neplatí, srážka je nepružná.

Při formulaci ZZME opět přijmeme přirozený předpoklad, že deska kulečníkového stolu je vodorovná, nemění se tedy tíhová potenciální energie pohybujících se koulí.

Proto $\frac{1}{2}m_B v_{0B}^2 + \frac{1}{2}m_Č v_{0Č}^2 = \frac{1}{2}m_B v_B^2 + \frac{1}{2}m_Č v_Č^2$, kde $v_{0Č} = 0$ a $m_B = m_Č$.

Po úpravě dostáváme $v_{0B}^2 = v_B^2 + v_Č^2 \Rightarrow v_{0B} = \sqrt{v_B^2 + v_Č^2} \doteq 4{,}0\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

Porovnáním velikostí rychlosti v_{0B} získaných ze ZZH a ZZME zjišťujeme, že ZZME neplatí. Srážka červené a bílé kulečníkové koule je tedy nepružná.

<u>Poznámka</u>: Vypočtěme ještě, jaká část původní mechanické energie soustavy se při srážce přeměnila v energii vnitřní:

$$\frac{\Delta E_K}{E_{K,poč}} = \frac{E_{K,poč} - E_{K,konc}}{E_{K,poč}} = 1 - \frac{E_{K,konc}}{E_{K,poč}} = 1 - \frac{\frac{1}{2}m_B v_B^2 + \frac{1}{2}m_Č v_Č^2}{\frac{1}{2}m_B v_{0B}^2 + \frac{1}{2}m_Č v_{0Č}^2} =$$

$$= 1 - \frac{v_B^2 + v_Č^2}{v_{0B}^2} = 1 - \frac{v_B^2 + v_Č^2}{\left(v_B \cos\alpha_B + v_Č \cos\left(\arcsin\frac{v_B \sin\alpha_Č}{v_Č}\right)\right)^2} \doteq 0{,}3,\ \text{tj. } 28\%.$$

Příklad 5[44]: K měření rychlosti projektilů střelných zbraní se užívá tzv. balistické kyvadlo. Může jím být například dřevěný hranol zavěšený na dlouhém závěsu, který se po zásahu kulkou vychýlí ze své rovnovážné polohy (viz. obr. 4.6). Určete velikost rychlosti projektilu těsně před nárazem, víte-li, že jeho hmotnost je 10 g a hmotnost dřevěného hranolu je 5,5 kg . Po zásahu kulkou kyvadlo vystoupí do výšky 5 cm.

Řešení: $m_p = 10\,\text{g}$

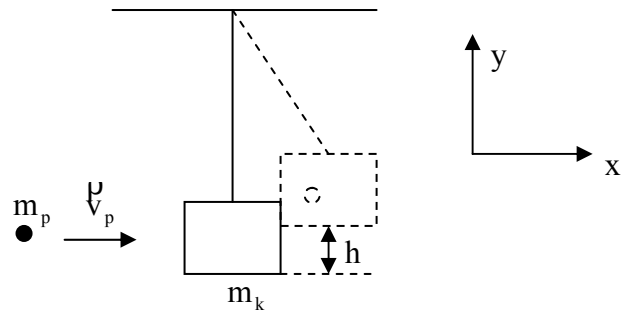
$m_k = 5{,}5\,\text{kg}$

$h = 5\,\text{cm}$

$v_p = ?$

Nejdříve zakreslíme celou situaci do obrázku a přijmeme zjednodušující předpoklady, za kterých příklad vyřešíme.

1. Zanedbáváme odpor vzduchu a tření v bodě závěsu.
2. Předpokládejme, že rychlost kulky těsně před nárazem má vodorovný směr.
3. Dobu srážky projektilu s kyvadlem považujme za zanedbatelně krátkou. Tento předpoklad je nutný proto, abychom nemuseli uvažovat pohyb kulky uvnitř kyvadla (výpočet by pak byl složitý).



Obr. 4.6

Vzhledem k tomu, že jsme zanedbali odpor vzduchu a tření v bodě závěsu, a také proto, že považujeme dobu srážky projektilu s kyvadlem za zanedbatelně krátkou, lze pro výpočet velikosti rychlosti projektilu v_p vyjít ze ZZH. (Kdyby doba srážky zanedbatelně krátká nebyla, ZZH by neplatil, neboť by tahová síla vlákna měla nenulový průmět do vodorovného směru.) Při volbě soustavy souřadnic podle obr. 4.6 můžeme tedy ZZH vyjádřit skalární rovnicí $m_p v_p = (m_p + m_k) v_k$, kde v_k je velikost rychlosti soustavy „projektil + kyvadlo“ těsně po srážce.

Vzhledem k tomu, že kulka po srážce v hranolu uvízne, jedná se o dokonale nepružnou srážku. Nelze tedy tvrdit, že mechanická energie soustavy před srážkou je rovna mechanické energii soustavy po srážce - v tomto případě ZZME neplatí. Po srážce se již ale zachovává mechanická energie soustavy „kyvadlo s projektilem + Země“ (zdůvodněte). Kinetická energie kyvadla při průchodu rovnovážnou polohou tedy musí být rovna tíhové

[44] Příklad převzat z [4].

potenciální energii soustavy v okamžiku, kdy je kyvadlo ve výšce h. (Zdůrazněme, že při pohybu kyvadla již ZZH neplatí - zdůvodněte.)

Platí $\frac{1}{2}(m_p + m_k)v_k^2 = (m_p + m_k)gh \Rightarrow v_k = \sqrt{2gh}$. Dosadíme-li tento vztah do rovnice vyjadřující ZZH, dostáváme

$$m_p v_p = (m_p + m_k)\sqrt{2gh} \Rightarrow v_p = \frac{(m_p + m_k)}{m_p}\sqrt{2gh} \approx 546\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}.$$

Velikost rychlosti projektilu je $546\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

B) Neřešené příklady

Příklad 6: Na vojenském cvičení je běžné, že si voják naloží do batohu vše, co potřebuje k přežití, a vyrazí na dlouhý pochod. Určete práci, kterou vykoná voják při rovnoměrném přímočarém pochodu po vodorovné cestě dlouhé 15 km, je-li hmotnost batohu 20 kg.

Obr. 4.7[45]

Příklad 7: Jakou práci vykoná žena z příkladu 13 z kapitoly Dynamika, která zvedá svisle vzhůru rovnoměrně zrychleným pohybem tašku s nákupem do výšky 90 cm? Jakou práci by vykonala, kdyby zvedala tašku rovnoměrným pohybem?

Příklad 8: Při stavbě výškových budov je nutné pro zvedání stavebních panelů použít jeřáb. Určete, jakou hmotnost může mít panel, zvedne-li ho jeřáb rovnoměrně do výšky 15 m za 35 s. Průměrný výkon jeřábu je 10,5 kW.

Příklad 9: Určete průměrný výkon člověka o hmotnosti 90 kg, který vystoupal 299 schodů Petřínské rozhledny v Praze[46] za 4 min. Každý schod má výšku 18,4 cm.

Obr. 4.8

Příklad 10: Automobil o hmotnosti 1200 kg z příkladu 22 z kapitoly Kinematika se rozjíždí rovnoměrně zrychleným pohybem. Určete průměrný výkon motoru v jednotlivých etapách rozjezdu.

[45] Obr. 4.7 převzat z [40].

[46] Údaje a obr. 4.8 převzaty z [41].

Příklad 11: Z vrcholku šikmé věže v Pise[47], která je vysoká 55 m (viz. obr. 4.9), pustil nezbedný chlapec kamínek o hmotnosti 50 g. Určete po dvou sekundách pádu kinetickou energii kamínku a tíhovou potenciální energii soustavy „kamínek + Země“ vzhledem k nulové hladině tíhové potenciální energie zvolené na povrchu Země. Jaká bude celková mechanická energie soustavy? Odpor vzduchu zanedbejte.

Obr. 4.9

Příklad 12[48]: Tobogán je vysoký 10 m. Na jeho vrcholku sedí dítě, které se chystá sjet dolů. Určete, s jakou rychlostí dítě tobogán opustí. Tření mezi tobogánem a dítětem a odpor vzduchu zanedbejte.

Obr. 4.10

Příklad 13: Chlapec o hmotnosti 30 kg se chce stát hokejistou, proto se učí bruslit. Zatím mu to moc dobře nejde. Rozjede se rychlostí o velikosti $4\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$, uklouzne a spadne. Zastaví se díky třecí síle ve vzdálenosti 2 m od místa pádu. Určete změnu mechanické energie soustavy „chlapec + led“, ke které vlivem tření dojde. Jak se změní vnitřní energie soustavy „chlapec + led“? Dále určete velikost třecí síly a koeficient dynamického tření mezi oděvěm chlapce a ledem.

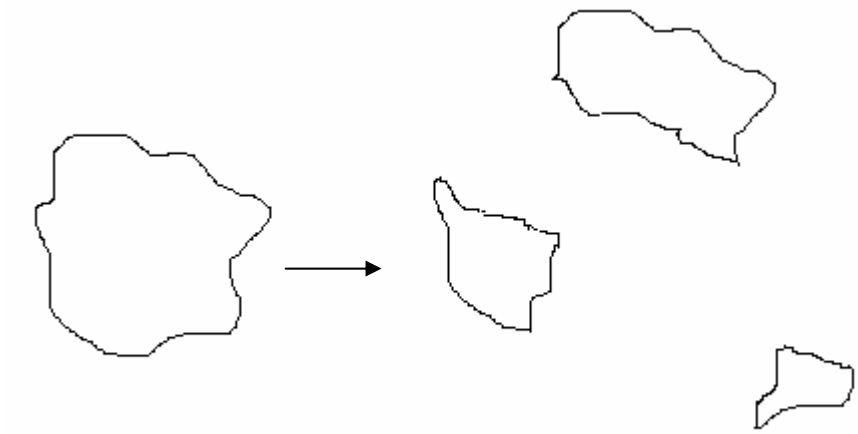
[47] Výška věže a obr. 4.9 převzaty z [42].

[48] Příklad převzat z [4] a obr. 4.10 nalezen na [43].

Příklad 14: Lyžař o hmotnosti 85 kg sjíždí ze svahu vysokého 350 m, který má sklon 20^0. Lyžař je na počátku v klidu. Koeficient dynamického tření mezi lyžemi a sněhem je 0,1. Zvolme nulovou hladinu tíhové potenciální energie soustavy „lyžař + Země“ na úpatí kopce. Jaká byla tíhová potenciální energie soustavy před začátkem sjezdu? K jaké změně mechanické energie vlivem tření došlo? Dále určete kinetickou energii lyžaře na úpatí svahu a jeho rychlost. Předpokládejte, že lyžař sjíždí svah „šusem“. Odpor vzduchu zanedbejte.

Obr. 4.11[49]

Příklad 15: V mnoha sci-fi filmech vídáme, jak se k Zemi blíží asteroid. Nechť je jeho hmotnost 3000 t a pohybuje se rychlostí o velikosti $5\,\mathrm{km}\cdot\mathrm{s}^{-1}$. Ze Země je proto vyslán raketoplán, jehož posádka má za úkol asteroid zničit následujícím způsobem: Raketoplán na asteroidu přistane, posádka do něj vyvrtá díru a umístí do ní nálož. Výbuch se zdaří a asteroid se rozpadne na tři části (viz. obr. 4.12). První z nich má hmotnost 1500 t a pohybuje se rychlostí o velikosti $7\,\mathrm{km}\cdot\mathrm{s}^{-1}$ ve směru kolmém na původní směr pohybu asteroidu. Druhá část, jejíž hmotnost je 900 t, má rychlost o velikosti $8\,\mathrm{km}\cdot\mathrm{s}^{-1}$ a směr rychlosti je opačný než původní směr pohybu asteroidu. Určete velikost rychlosti a směr pohybu třetího úlomku. Dále vypočtěte energii, která se při výbuchu uvolnila a přeměnila se na kinetickou energii jednotlivých částí asteroidu.



Obr. 4.12

[49] Obr. 4.11 převzat z [44].

5. GRAVITAČNÍ POLE

5.1. Přehled základních poznatků o gravitačním poli

V okolí každého hmotného bodu existuje gravitační pole, které se projevuje přitažlivým silovým působením na jiné hmotné body. Sílu, která vyjadřuje míru této interakce, nazýváme gravitační silou. Vlastnosti gravitační síly zkoumal v 17. století Isaac Newton, který formuloval gravitační zákon.

Newtonův gravitační zákon: Každé dva hmotné body se navzájem přitahují stejně velkými opačně orientovanými gravitačními silami $\vec{F}_g$ a $-\vec{F}_g$, které leží v jedné přímce. Hmotný bod o hmotnosti m_2 a polohovém vektoru $\vec{r}_2$ působí na hmotný bod o hmotnosti m_1 a polohovém vektoru $\vec{r}_1$ gravitační silou $\vec{F}_g = \kappa \frac{m_1 m_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$,

kde $\kappa = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}}$ je gravitační konstanta.

Newtonův gravitační zákon platí také pro dvě homogenní koule, jejichž středy mají polohové vektory $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$, přičemž $|\vec{r}_2 - \vec{r}_1| > R_1 + R_2$, kde R_1, R_2 jsou poloměry koulí. V tomto případě směřuje gravitační síla, kterou působí koule o poloměru R_2 na kouli o poloměru R_1, do středu koule o polohovém vektoru $\vec{r}_1$.

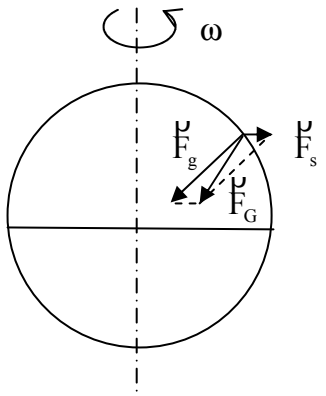
Pro porovnání silového působení v různých místech gravitačního pole se zavádí fyzikální veličina, kterou nazýváme intenzita gravitačního pole.

Intenzita gravitačního pole $\vec{K}$ v daném místě je vektorová fyzikální veličina definovaná jako podíl gravitační síly, která v tomto místě působí na hmotný bod, a hmotnosti tohoto bodu. Tedy $\vec{K} = \frac{\vec{F}_g}{m}$. Podle 2NPZ udílí gravitační síla $\vec{F}_g$ hmotnému bodu o hmotnosti m gravitační zrychlení $\vec{a}_g$, tzn. $\vec{F}_g = m\vec{a}_g \Rightarrow \vec{a}_g = \frac{\vec{F}_g}{m}$.

Porovnáním posledních dvou vztahů dostáváme $\vec{K} = \vec{a}_g$.

Zvolíme-li soustavu souřadnic tak, že hmotný bod vytvářející gravitační pole (resp. střed homogenní koule, která pole vytváří) umístíme do jejího počátku, pak intenzitu gravitačního pole buzeného tímto hmotným bodem o hmotnosti M (resp. intenzitu gravitačního pole vně homogenní koule o hmotnosti M) určíme ze vztahu $\vec{K} = \frac{\vec{F}_g}{m} = \frac{\kappa M}{|\vec{r}|^3}\vec{r}$, kde $\vec{r}$ je polohový vektor místa, kde intenzitu pole určujeme. Směřuje-li vektor intenzity gravitačního pole ve všech místech pole do téhož bodu, nazýváme gravitační pole centrálním. Pokud vybereme dostatečně malou oblast centrálního gravitačního pole, zjistíme, že se vektory intenzity ve všech místech této oblasti od sebe liší jen velmi málo (tzn. jsou přibližně rovnoběžné a mají stejnou velikost). Takové pole označujeme jako homogenní gravitační pole.

V dalším odstavci se budeme zabývat rozdílem mezi gravitační a tíhovou silou Země.
Až dosud jsme považovali Zemi za inerciální vztažnou soustavu. Všichni dobře víme, že se však Země otáčí kolem své osy. Ve skutečnosti tedy nelze Zemi považovat za inerciální vztažnou soustavu, ale za soustavu neinerciální. Chceme-li určit zrychlení hmotného bodu na povrchu Země, je nutné do 2NPZ započítat kromě gravitační síly $\vec{F}_g$ i setrvačnou odstředivou sílu $\vec{F}_s$, tj. $m\vec{a} = \vec{F}_g + \vec{F}_s$. Výslednici gravitační a setrvačné odstředivé síly nazýváme silou tíhovou a značíme $\vec{F}_G$, tedy $\vec{F}_G = \vec{F}_g + \vec{F}_s$ (viz. obr. 5.1).



Obr. 5.1

Tíhová síla $\vec{F}_G$ uděluje hmotnému bodu tíhové zrychlení $\vec{g}$. Směr tíhové síly označujeme jako směr svislý.

V dalším se budeme zabývat pohyby hmotných bodů v homogenním tíhovém poli Země a připomeneme vztahy, které pro pohyb hmotného bodu v tomto poli platí. Nakonec uvedeme zákonitosti pohybu v centrálním gravitačním poli Země a zmíníme Keplerovy zákony pro pohyb hmotného bodu v gravitačním poli Slunce.

POHYBY V HOMOGENNÍM TÍHOVÉM POLI ZEMĚ

V tomto odstavci se budeme věnovat speciálním typům pohybu hmotného bodu v tíhovém poli Země, při nichž na hmotný bod působí pouze tíhová síla (mj. to tedy znamená, že zanedbáváme odpor prostředí). Jednotlivé typy pohybů se od sebe liší pouze počátečními podmínkami. Pro jejich popis použijeme vztahy známé z kinematiky.

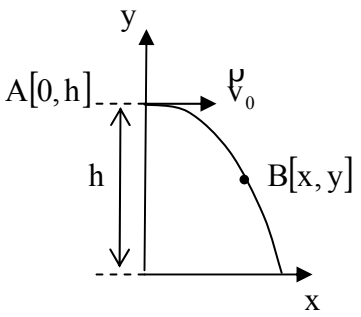
Volný pád je nejjednodušší pohyb v homogenním tíhovém poli Země. Jde o rovnoměrně zrychlený pohyb s nulovou počáteční rychlostí. Pro velikost okamžité rychlosti a pro dráhu uraženou hmotným bodem při volném pádu v čase t platí:

$$v = gt, \quad s = \frac{1}{2}gt^2.$$

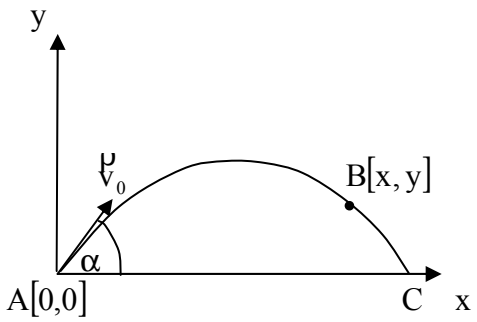
Svislý vrh vzhůru je pohyb hmotného bodu, kterému udělíme počáteční rychlost $\vec{v}_0$ ve směru opačném, než je směr tíhového zrychlení $\vec{g}$. Při pohybu hmotného bodu směrem vzhůru se jedná o pohyb rovnoměrně zpomalený. Zvolme soustavu souřadnic tak, že její počátek položíme do místa vrhu a osu y orientujeme ve směru počáteční rychlosti, pak pro velikost okamžité rychlosti a pro okamžitou výšku

hmotného bodu v čase t platí: $v = v_0 - gt$, $y = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$. V nejvyšším bodu trajektorie je $\vec{v} = \vec{0}$, poté se hmotný bod vrací k Zemi volným pádem.

Vodorovný vrh je pohyb hmotného bodu, kterému ve výšce h udělíme počáteční rychlost $\vec{v}_0$ ve vodorovném směru. Trajektorií tohoto pohybu je část paraboly s vrcholem v místě vrhu A. Zvolíme-li soustavu souřadnic podle obr. 5.2, pak místo vrhu A má souřadnice $x_0 = 0$, $y_0 = h$ a počáteční rychlost $\vec{v}_0$ hmotného bodu má směr osy x. Pro souřadnice místa B, v němž se hmotný bod nachází v čase t, platí: $x = v_0 t$, $y = h - \frac{1}{2}gt^2$.



Obr. 5.2



Obr. 5.3

Šikmý vrh vzhůru je pohyb hmotného bodu, kterému udělíme počáteční rychlost $\vec{v}_0$ ve směru, který svírá s vodorovnou rovinou elevační úhel α. Trajektorií pohybu je část paraboly, která má vrchol v nejvyšším bodě výstupu. Zvolíme-li soustavu souřadnic podle obr. 5.3, pak místo vrhu A má souřadnice $x_0 = 0$, $y_0 = 0$. Pro souřadnice místa B, v němž se hmotný bod nachází v čase t, platí: $x = v_0 t \cos\alpha$, $y = v_0 t \sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2$.

POHYBY V CENTRÁLNÍM GRAVITAČNÍM POLI ZEMĚ

Významnou roli hrají pohyby, při kterých je hmotným bodům v centrálním gravitačním poli Země ve vzdálenosti h od jejího povrchu udělena počáteční rychlost $\vec{v}_0$ ve směru kolmém k vektoru intenzity gravitačního pole $\vec{K}$. Podle toho, jak velkou počáteční rychlost hmotnému bodu udělíme, se hmotný bod pohybuje po trajektorii určitého tvaru.

Při tzv. **kruhové rychlosti** $\vec{v}_k$ je trajektorií pohybu kružnice se středem ve středu Země. Pro velikost kruhové rychlosti, jak později odvodíme, platí vztah: $v_k = \sqrt{\frac{\kappa M_Z}{R_Z + h}}$, kde M_Z je hmotnost Země a R_Z její poloměr.

Při počáteční rychlosti, která je rovna tzv. **únikové rychlosti** $\vec{v}_p$, je trajektorií pohybu část paraboly a hmotný bod uniká z gravitačního pole Země. Pro velikost únikové rychlosti platí vztah $v_p = \sqrt{\frac{2\kappa M_Z}{R_Z + h}} = v_k\sqrt{2}$, jehož odvození však již rámec středoškolské fyziky přesahuje.

POHYBY V GRAVITAČNÍM POLI SLUNCE

Pohyb planet v gravitačním poli Slunce popsal v 17. století Johannes Kepler.
Tvar trajektorie planet popisuje první Keplerův zákon.

První Keplerův zákon – zákon oběžných drah: Planety se pohybují kolem Slunce po elipsách málo odlišných od kružnic, v jejichž společném ohnisku leží Slunce.

Druhý Keplerův zákon – zákon ploch: Obsahy ploch opsaných průvodičem planety[50] za jednotku času jsou stejně velké.

Důsledkem tohoto zákona je skutečnost, že velikost rychlosti planety v perihéliu je větší než velikost rychlosti planety v aféliu (vysvětlete).

Třetí Keplerův zákon – zákon oběžných dob: Poměr druhých mocnin oběžných dob dvou planet je roven poměru třetích mocnin hlavních poloos jejich drah. Tedy $\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}$, kde a_1, a_2 jsou délky hlavních poloos a T_1, T_2 jsou oběžné doby těchto planet.

[50] Průvodič planety je úsečka spojující střed planety se středem Slunce.

5.2. Otázky a příklady na gravitační pole

5.2.1. Otázky na gravitační pole

Otázka 1[51]: Každá dvě tělesa se navzájem přitahují. Proč ale nepozorujeme vzájemnou gravitační přitažlivost mezi předměty v našem okolí?

Otázka 2: Na kterých místech zemského povrchu je velikost gravitačního a tíhového zrychlení stejná? Považujte Zemi za homogenní kouli.

Otázka 3: Předpokládejte, že je Země homogenní koule. Určete, na kterých místech zemského povrchu padají volně puštěné předměty do geometrického středu Země.

Otázka 4: Chce-li střelec zasáhnout při střelbě ve vodorovném směru střed terče, musí mířit kousek nad něj. Proč?

Otázka 5: Pod jakým úhlem (zanedbáme-li odpor prostředí) musí sportovec při dané počáteční rychlosti vrhnout koulí, aby doletěla co možná nejdále? Odpověď zdůvodněte.

[51] Otázky 1-3 převzaty z [9].

5.2.2. Příklady na gravitační pole

V následujících příkladech považujte Zemi za homogenní kouli. Za její hmotnost a poloměr dosazujte tabulkové hodnoty $M_Z = 5{,}983 \cdot 10^{24}$ kg a $R_Z = 6378{,}388$ km.

A) Řešené příklady

Příklad 1: Kolikrát je velikost gravitační síly působící na kosmonauta na povrchu Země větší než velikost gravitační síly působící na téhož kosmonauta na povrchu Měsíce? Určete rovněž velikost gravitačního zrychlení na povrchu Země a na povrchu Měsíce. Poměr poloměru Měsíce a Země je 0,2725 a poměr jejich hmotnosti je 0,0123.

Řešení: $M_Z = 5{,}983 \cdot 10^{24}$ kg

$R_Z = 6378{,}388$ km

$\frac{R_M}{R_Z} = 0{,}2725$

$\frac{M_M}{M_Z} = 0{,}0123$

$\frac{F_{gZ}}{F_{gM}} = ?$

$a_{gZ} = ?$

$a_{gM} = ?$

Velikost gravitační síly, kterou působí Země na kosmonauta o hmotnosti m na jejím povrchu, je $F_{gZ} = \kappa \frac{M_Z m}{R_Z^2}$, pro odpovídající velikost gravitační síly na povrchu Měsíce platí $F_{gM} = \kappa \frac{M_M m}{R_M^2}$.

Odtud dostáváme $\frac{F_{gZ}}{F_{gM}} = \frac{\kappa \frac{M_Z m}{R_Z^2}}{\kappa \frac{M_M m}{R_M^2}} = \frac{M_Z}{M_M}\left(\frac{R_M}{R_Z}\right)^2 \approx 6.$

Velikost gravitační síly, kterou působí Země na kosmonauta na jejím povrchu, je přibližně 6-krát větší než velikost gravitační síly, kterou působí na kosmonauta Měsíc.

Pro velikost gravitačního zrychlení hmotného bodu o hmotnosti m umístěného na povrchu Země platí $a_{gZ} = \frac{F_{gZ}}{m} = \kappa \frac{M_Z}{R_Z^2} \approx 9{,}809\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$.

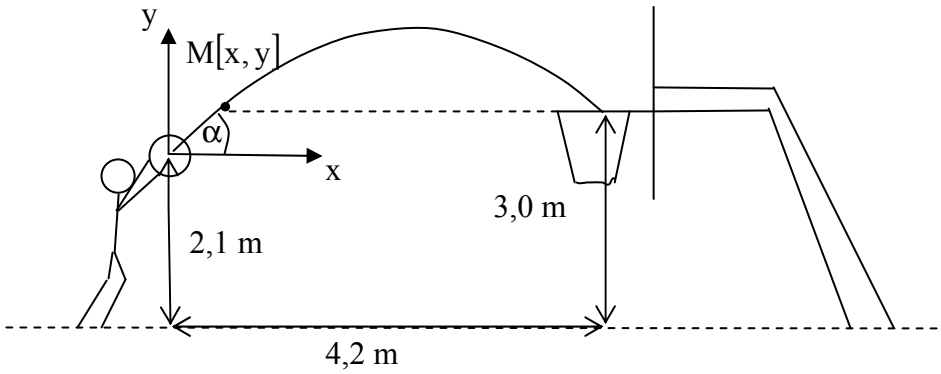
Velikost gravitačního zrychlení hmotného bodu na povrchu Měsíce určíme dosazením předešlých výsledků do vztahu

$$\frac{a_{gM}}{a_{gZ}} = \frac{F_{gM}}{F_{gZ}} = \frac{M_M}{M_Z}\left(\frac{R_Z}{R_M}\right)^2 \Rightarrow a_{gM} = \frac{M_M}{M_Z}\left(\frac{R_Z}{R_M}\right)^2 a_{gZ} =$$

$$= \frac{M_M}{M_Z}\left(\frac{R_Z}{R_M}\right)^2 \left(\kappa \frac{M_Z}{R_Z^2}\right) \doteq 1{,}625\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}.$$

Velikost gravitačního zrychlení povrchu Země je $9{,}809\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}$ a velikost gravitačního zrychlení na povrchu Měsíce je $1{,}625\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}$.

Příklad 2[52]: Obroučka basketbalového koše je ve výšce 3,0 m nad zemí. Při trestném hodu stojí hráč ve vzdálenosti 4,2 m od koše a drží míč ve výšce 2,1 m (viz. obr. 5.4). Určete velikost počáteční rychlosti basketbalového míče a čas, kdy míč obroučkou koše proletí, je-li elevační úhel 55^0. Dále vypočtěte velikost rychlosti míče v okamžiku jeho průchodu obroučkou koše. Odpor vzduchu zanedbejte.



Obr. 5.4

Řešení: $h_K = 3{,}0\,\mathrm{m}$

$h_M = 2{,}1\,\mathrm{m}$

$s = 4{,}2\,\mathrm{m}$

$\alpha = 55^0$

$v_0 = ?$

$t = ?$

$v_K = ?$

---

[52] Příklad převzat z [4].

Zvolme soustavu souřadnic, tak aby místo vrhu leželo v jejím počátku, osa x byla vodorovná a osa y svislá (viz. obr. 5.4).
Velikost počáteční rychlosti basketbalového míče určíme ze vztahů pro souřadnice místa průletu míče obroučkou koše: $s = v_0 t \cos\alpha$,

$$h_K - h_M = v_0 t \sin\alpha - \frac{1}{2} g t^2 .$$

Dostáváme tak dvě rovnice pro neznámé v_0 a t. Z první rovnice vyjádříme

$v_0 = \dfrac{s}{t\cos\alpha}$ a dosadíme do rovnice druhé, odkud vypočteme čas, kdy míč obroučkou koše proletí:

$$h_K - h_M = v_0 t \sin\alpha - \frac{1}{2} g t^2 = \frac{s}{t\cos\alpha} t \sin\alpha - \frac{1}{2} g t^2 = s\,\mathrm{tg}\alpha - \frac{1}{2} g t^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = \sqrt{\frac{2\left(s\,\mathrm{tg}\alpha - \left(h_K - h_M\right)\right)}{g}} \doteq 1{,}02\ \mathrm{s} .$$

Velikost počáteční rychlosti je potom dána vztahem

$$v_0 = \frac{s}{t\cos\alpha} = \frac{s}{\sqrt{\dfrac{2\left(s\,\mathrm{tg}\alpha - \left(h_K - h_M\right)\right)}{g}}\cos\alpha} =$$

$$= \frac{s}{\cos\alpha}\sqrt{\frac{g}{2\left(s\,\mathrm{tg}\alpha - \left(h_K - h_M\right)\right)}} \doteq 7{,}2\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}.$$

Velikost počáteční rychlosti basketbalového míče je $7{,}2\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Míč proletí obroučkou koše za 1,02 s.

Zbývá určit, jak velkou rychlostí míč obroučkou koše propadne. K výpočtu velikosti rychlosti míče v okamžiku jeho průletu obroučkou koše použijeme ZZME (zdůvodněte, proč jej lze použít). Zvolíme-li nulovou hladinou tíhové potenciální energie rovinu rovnoběžnou s rovinou hřiště procházející místem vrhu, je ZZME vyjádřen rovnicí $\frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} m v_K^2 + mg\left(h_K - h_M\right)$.
Z tohoto vztahu dostáváme hledanou velikost rychlosti míče $v_K = \sqrt{v_0^2 - 2g\left(h_K - h_M\right)} \doteq 5{,}8\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$.
Velikost rychlosti míče při jeho průchodu obroučkou koše je přibližně $5{,}8\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

<u>Komentář</u>: Uvědomte si, že druhým místem, kdy má míč velikost rychlosti v_K a výšku $h_K - h_M$, je místo $M[x, y]$ (viz. obr. 5.4). Zkuste sami určit jeho souřadnice.

Příklad 3: Měsíc je přirozenou družicí Země. Předpokládejme, že obíhá rovnoměrně po kružnici, která má poloměr přibližně 384405 km. Vypočtěte velikost rychlosti a dobu jeho oběhu kolem Země.

Řešení: $M_Z = 5{,}983 \cdot 10^{24}$ kg

$r_M = 384405$ km

$v_M = ?$

Měsíc se pohybuje rovnoměrným pohybem po kružnici, tedy s dostředivým zrychlením $\vec{a}_d$, pro jehož velikost platí $a_d = \frac{v_M^2}{r_M}$. Toto zrychlení udílí Měsíci dostředivá síla $\vec{F}_d$, jíž je gravitační síla Země. Platí tedy $F_d = F_g$, tj. $M_M \frac{v_M^2}{r_M} = \kappa \frac{M_Z M_M}{r_M^2}$. Vyjádříme-li z tohoto vztahu neznámou rychlost v_M, dostaneme $v_M = \sqrt{\frac{\kappa M_Z}{r_M}} \doteq 1019\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

Dobu oběhu Měsíce kolem Země určíme ze vztahu

$$v_M = \frac{2\pi}{T} r_M \Rightarrow T = \frac{2\pi r_M}{v_M} = \frac{2\pi r_M}{\sqrt{\frac{\kappa M_Z}{r_M}}} = 2\pi r_M \sqrt{\frac{r_M}{\kappa M_Z}} \doteq 27{,}4 \text{ dnů.}$$

Velikost kruhové rychlosti Měsíce při oběhu kolem Země je $1019\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$. Měsíc Zemi oběhne za 27,4 dnů.

Příklad 4: Oběžná doba Země kolem Slunce je 1 rok a délka hlavní poloosy trajektorie Země při oběhu kolem Slunce je 1 AU ($\doteq 149600 \cdot 10^6$ m). Určete oběžnou dobu Venuše, je-li délka hlavní poloosy její trajektorie 0,7233 AU.

Řešení: $T_Z = 1$ r

$a_Z = 1$ AU

$a_V = 0{,}7233$ AU

$T_V = ?$

Pro výpočet oběžné doby Venuše užijeme třetí Keplerův zákon $\frac{T_Z^2}{T_V^2} = \frac{a_Z^3}{a_V^3}$, z něhož vyjádříme neznámou dobu oběhu T_V.

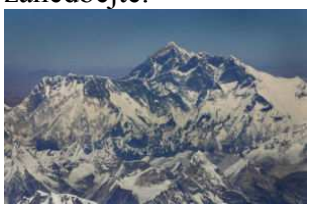
Tedy $T_V = \sqrt{\frac{T_Z^2 a_V^3}{a_Z^3}} = T_Z \sqrt{\left(\frac{a_V}{a_Z}\right)^3} \doteq 0{,}615$ roku.

Oběžná doba Venuše kolem Slunce je přibližně 0,615 roku

B) Neřešené příklady

Příklad 5: Určete hmotnost Slunce a velikost gravitačního zrychlení hmotného bodu (daného gravitačním působením Slunce) na jeho povrchu, je-li velikost gravitační síly, kterou na sebe vzájemně působí Slunce a Země $3{,}554 \cdot 10^{22}$ N, poloměr Slunce je 695550 km a délka hlavní poloosy trajektorie Země při oběhu kolem Slunce je $149600 \cdot 10^{6}$ m.

Příklad 6: Prvním člověkem, který zdolal Mount Everest, byl v roce 1953 Edmund Hillary. Než odjel na výpravu do Himalájí, stoupl na osobní váhu a ta ukázala hodnotu 85 kg. Jak by se změnil údaj na osobní váze na vrcholku Mount Everestu? Výška hory je 8848 m. Uvažujte pouze o změně gravitační síly, sílu setrvačnou odstředivou tentokrát pro jednoduchost zanedbejte.



Obr. 5.5

Příklad 7: První lidé, kteří se mohli pohybovat po povrchu Měsíce, tvořily roku 1969 posádku raketoplánu Apollo 11. Do jaké výšky si mohl na povrchu Měsíce samou radostí povyskočit velitel Niel Armstrong, který by na Zemi vyskočil pouze do výšky 50 cm? Jak dlouho by na Měsíci tento pohyb trval? Velikost tíhového zrychlení na povrchu Měsíce je asi 6-krát menší než velikost tíhového zrychlení na povrchu Země. Odpor prostředí zanedbejte.

Obr. 5.6

Příklad 8: Z okna panelového domu, které je ve výšce 5 m, vykoukne Pepík a dívá se, kdo zvoní u dveří. Je tam jeho spolužák Honzík, který mu přinesl zapomenuté klíče. Pepík Honzíkovi řekne, ať mu klíče hodí. Honzík se tedy napřáhne a hodí klíče svisle vzhůru s počáteční rychlostí o velikosti $12\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$. Do jaké výšky klíče vystoupí? Kolik má Pepík možností klíče chytit? Určete také okamžiky od začátku vrhu, v nichž musí být Pepík ve střehu. Odpor vzduchu zanedbejte.

Příklad 9: Jedním z nejlepších střelců všech dob byl Vilém Tell, který podle legendy dovedl zasáhnout jablko na hlavě klečícího nepřítele z uctivé vzdálenosti 60 m (měřeno od špiček Tellových bot po kolena klečícího nepřítele). Určete velikost počáteční rychlosti šípu a jeho pokles ve svislém směru, jestliže Vilém Tell vystřelil šíp ve vodorovném směru. Šíp zasáhl jablko za 0,3 s. Odpor vzduchu zanedbejte.

Příklad 10: Při mnoha živelných pohromách, jako je zemětřesení nebo záplavy, je zpravidla velmi obtížné zásobovat postižené oblasti pozemní cestou. Z toho důvodu se používají letadla, která zabezpečují humanitární pomoc ze vzduchu formou shazování balíčků s potravinami, léky, atd. Určete, v jaké vodorovné vzdálenosti od postiženého místa musí letadlo balíček uvolnit, aby spadl na určené místo. Za jak dlouho po vypuštění balíček dopadne a jakou bude mít při dopadu vzhledem k Zemi velikost rychlosti? Letadlo letí ve výšce 5 km a má rychlost o velikosti $750\,\mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1}$. Odpor vzduchu zanedbejte.

Obr. 5.7[53]

Příklad 11[54]: Na televizních obrazovkách vídáme divoké honičky po střechách, které většinou končí tím, že akční hrdina přeskočí z jedné budovy na druhou. Předpokládejme, že vzdálenost budov od sebe je 5,5 m. Výška první budovy je 45 m a druhá budova je vysoká 41 m. Přeskočí hrdina na druhou budovu, je-li velikost jeho počáteční rychlosti $5\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$?

Obr. 5.8

Příklad 12: Fotbalový brankář odkopne od branky míč počáteční rychlostí o velikosti $25\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$. Míč dopadne na hlavu útočníka vysokého 2 m za 3,4 s. Pod jakým úhlem brankář míč vykopl? Vypočtěte také vzdálenost útočníka od místa výkopu a velikost rychlosti míče v okamžiku jeho dopadu na útočníkovu hlavu. Kdyby míči nevstoupila do cesty útočníkova hlava, jak daleko by dopadl? Odpor vzduchu zanedbejte.

---

[53] Obr. 5.7 převzat z [45].

[54] Příklad převzat z [4] a obr. 5.8 převzat z [46].

Příklad 13: Chlapec hází kamenem pod úhlem 40^0 počáteční rychlostí o velikosti $18\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$. Určete, jak daleko chlapec dohodí. Stojí-li uprostřed úsečky spojující místo vrhu s místem dopadu dům vysoký 12 m, přehodí chlapec tento dům? Odpor vzduchu zanedbejte.

Příklad 14[55]: První vesmírnou družicí Země byl Sputnik 1 (viz. obr. 5.9). Této družici byla udělena kruhová rychlost $7{,}4\,\mathrm{km}\cdot\mathrm{s}^{-1}$ a družice obletěla Zemi za 1h 43min. Jaká byla její výška nad povrchem Země?

Obr. 5.9

Příklad 15: Určete únikovou rychlost z povrchu Slunce, víte-li, že Slunce má hmotnost $1{,}993\cdot10^{30}$ kg a jeho poloměr je 695550 km.

Příklad 16: První planetou naší sluneční soustavy je Merkur, jehož dráha má délku hlavní poloosy 0,3871 AU a oběžná doba činí 0,241 roku. Poslední planetou je Neptun, který oběhne Slunce za 164,78 roků. Určete délku hlavní poloosy dráhy Neptunu.

[55] Příklad převzat z [9].

6. MECHANIKA TUHÉHO TĚLESA

6.1. Přehled základních poznatků z mechaniky tuhého tělesa

Až dosud jsme reálná tělesa nahrazovali nejjednodušším fyzikálním modelem, kterým byl hmotný bod. V této kapitole se budeme zabývat problémy, při kterých již rozměry i tvar tělesa hrají důležitou roli, a proto s modelem hmotného bodu nevystačíme. Pro jednoduchost však reálné těleso opět nahradíme modelem - tuhým tělesem.
Tuhé těleso je takové těleso, které působením libovolně velké síly nemění tvar ani rozměry. Takové těleso se tedy působením libovolných sil nedeformuje.

KINEMATIKA TUHÉHO TĚLESA
Nejjednodušším pohybem tuhého tělesa je pohyb posuvný (translační), při němž mají všechny body tuhého tělesa v každém okamžiku stejnou okamžitou rychlost $\vec{v}$. Trajektorie jednotlivých bodů jsou tedy shodné, avšak vzájemně posunuté křivky. Posuvný pohyb je proto plně popsán pohybem libovolně vybraného bodu tělesa.
Tuhé těleso může také konat otáčivý (rotační) pohyb kolem pevné osy nebo kolem pevného bodu. V dalším budeme uvažovat pouze o otáčení tuhého tělesa kolem pevné osy, neboť otáčení tělesa kolem pevného bodu přesahuje rámec středoškolské fyziky. Při otáčení tuhého tělesa kolem pevné osy opisují všechny body tělesa kružnice se středem na ose otáčení. Protože těleso považujeme za tuhé, je úhlová rychlost ω pro všechny jeho body stejná.
V obecném případě může tuhé těleso konat posuvný i otáčivý pohyb současně.

DYNAMIKA TUHÉHO TĚLESA
Vzhledem k tomu, že lze posuvný pohyb tuhého tělesa popsat pomocí pohybu jednoho jeho bodu, platí pro dynamiku posuvného pohybu tuhého tělesa stejné vztahy jako v kapitole Dynamika hmotného bodu.
Zabývejme se tedy dynamikou otáčivého pohybu kolem pevné osy. Fyzikální veličina, která při tom vyjadřuje otáčivý účinek síly na tuhé těleso, se nazývá moment síly vzhledem k ose otáčení.
Moment síly $\vec{M}$ vzhledem k ose otáčení je vektorová fyzikální veličina, pro jejíž velikost v případě, že působící síla leží v rovině kolmé na osu otáčení[56], platí $M = F \cdot d$, kde F je velikost působící síly a d je rameno síly (tj. kolmá vzdálenost vektorové přímky síly $\vec{F}$ od osy otáčení). Směr vektoru $\vec{M}$ určíme pomocí pravidla pravé ruky: Položíme-li pravou ruku na těleso tak, aby prsty ukazovaly smysl otáčení tělesa způsobeného silou $\vec{F}$, pak vztyčený palec ukazuje směr momentu síly.
Na těleso může působit i více sil. V tomto případě je výsledný moment sil určen vektorovým součtem momentů jednotlivých sil vzhledem k dané ose, tj. $\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + ... + \vec{M}_n$ (zdůvodněte).

[56] Neleží-li síla v rovině kolmé na osu otáčení (tj. vektor síly svírá s osou obecný úhel α), musíme rozložit působící sílu do dvou průmětů: rovnoběžného s osou $\vec{F}_{//}$ a kolmého k ose otáčení $\vec{F}_{\perp}$. Moment síly je pak dán vztahem $M = F_{\perp} \cdot d$, kde d je rameno síly $\vec{F}_{\perp}$. Pro jednoduchost se zde budeme zabývat pouze situacemi, kdy působící síly leží v rovině kolmé na osu otáčení.

Nyní se budeme zabývat otázkou, za jakých podmínek se bude tuhé těleso nacházet v tzv. rovnováze.

Podmínky rovnováhy tuhého tělesa:

- Pokud je výslednice všech sil působících na těleso nulová, tj. $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + ... + \vec{F}_n = \vec{0}$, nastává tzv. silová rovnováha.
- Je-li moment všech sil, které na těleso působí, vzhledem k libovolně zvolené ose nulový, tj. $\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + ... + \vec{M}_n = \vec{0}$, nastává tzv. momentová rovnováho.

Jestliže je současně splněna podmínka silové rovnováhy i podmínka momentové rovnováhy, říkáme, že tuhé těleso je v rovnováze. Uvědomte si však, že skutečnost, že je těleso v rovnováze, vůbec nemusí znamenat, že je v klidu (vysvětlete).

Podmínek rovnováhy se využívá při konstrukci tzv. jednoduchých strojů, jež usnadňují konání práce tím, že umožňují měnit velikost a směr dané síly. Mezi jednoduché stroje patří zejména páka, kladka a kolo na hřídeli.

Kinetická energie tuhého tělesa

Stejně jako nás dříve zajímala kinetická energie hmotného bodu, nyní i zde zavedeme pojem kinetická energie tuhého tělesa. Kinetická energie obecně souvisí s pohybem a my již víme, že tuhé těleso může konat posuvný i otáčivý pohyb.

Kinetická energie tuhého tělesa při posuvném pohybu: Při posuvném pohybu mají všechny body tělesa v témže okamžiku stejnou rychlost $\vec{v}$. Kinetická energie tuhého tělesa je tedy dána vztahem $E_K = \frac{1}{2}mv^2$.

Kinetická energie tuhého tělesa při otáčivém pohybu kolem pevné osy: Při otáčivém pohybu mají všechny body tuhého tělesa stejnou úhlovou rychlost ω a pohybují se po kružnicích, jejichž středy leží na ose otáčení. Kinetickou energii tuhého tělesa při otáčivém pohybu určíme ze vztahu $E_K = \frac{1}{2}J\omega^2$, kde J je tzv. moment setrvačnosti tělesa vzhledem k dané ose, který charakterizuje rozložení hmotnosti tělesa vzhledem k této ose.

Pro praktické výpočty je vhodná znalost některých momentů setrvačnosti homogenních těles vzhledem k různým osám otáčení. Výpočet těchto momentů setrvačnosti však přesahuje rámec středoškolské fyziky, proto příslušné vztahy pouze uvedeme.

- Moment setrvačnosti homogenní tyče délky l a hmotnosti m vzhledem k ose procházející středem tyče kolmé k tyči je $J = \frac{1}{12}ml^2$.
- Moment setrvačnosti homogenní tyče délky l a hmotnosti m vzhledem k ose vedené jedním jejím koncem kolmé k tyči $J = \frac{1}{3}ml^2$.
- Moment setrvačnosti homogenní koule o poloměru r a hmotnosti m vzhledem k ose procházející středem koule je $J = \frac{2}{5}mr^2$.
- Moment setrvačnosti homogenního plného válce o poloměru r a hmotnosti m vzhledem k ose válce je $J = \frac{1}{2}mr^2$.

6.2. Otázky a příklady z mechaniky tuhého tělesa

6.2.1. Otázky z mechaniky tuhého tělesa

Otázka 1: Proč jsou kliky dveří, vrat a oken umístěny co nejdále od jejich osy otáčení?

Otázka 2: Na jakém principu je založena funkce trakaře nebo kolečka? Kam je nejvýhodnější umístit pytel pšenice?

Otázka 3: Jaký je fyzikální princip otvíráku na limonádu, nůžek, kleští apod.?

Otázka 4: K soudu se dostal spor dvou dělníků, kteří se spolu poprali kvůli následujícím tvrzením: První dělník tvrdil, že když má dutý a plný válec stejnou hmotnost i poloměr, pak mají válce i stejný moment setrvačnosti vzhledem k jejich osám. Druhý tvrdil, že i když má dutý a plný válec stejnou hmotnost a poloměr, nemají tyto válce stejný moment setrvačnosti. Zahrajte si na soudce a rozhodněte, který z dělníků měl pravdu. Svoje rozhodnutí zdůvodněte.

6.2.2. Příklady z mechaniky tuhého tělesa

A) Řešené příklady

Příklad 1: Dva kanibalové chytili do sítě muže, tuto síť navlékli na dřevěný kůl o délce 3 m a chtěli svou kořist odnést do vesnice, aby si z ní udělali chutnou večeři. Chycený muž měl hmotnost 100 kg a se sítí byl umístěn v jedné třetině kůlu blíže ke kanibalovi, který šel jako první (viz. obr. 6.1). Jakou velikost měly síly, kterými působily kanibalové na kůl? Hmotnost kůlu a sítě zanedbejte.

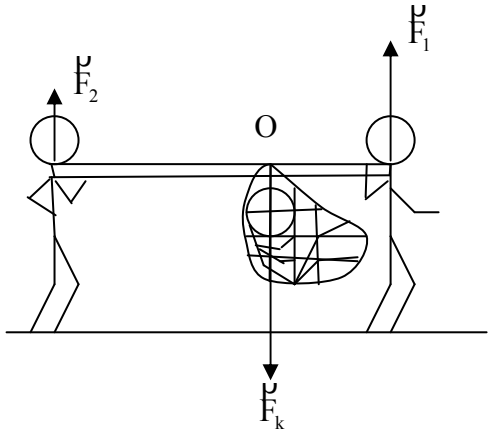
Řešení: $d = 3\,\mathrm{m}$

$m = 100\,\mathrm{kg}$

$d_1 = \frac{1}{3}d$

$F_1 = ?$

$F_2 = ?$



Obr. 6.1

Nejdříve do obrázku 6.1 zakreslíme všechny síly, které na dřevěný kůl působí. Jsou to: tlaková síla ramene prvního kanibala $\vec{F}_1$, tlaková síla ramene druhého kanibala $\vec{F}_2$ a síla $\vec{F}_k$, kterou působí na tyč síť s kořistí. Pro výpočet velikostí sil $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ vyjdeme z podmínky silové a momentové rovnováhy kůlu, tzn. musí platit:

$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_k = \vec{0}$,

$\vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \vec{M}_k = \vec{0}$ vzhledem k libovolně zvolené ose otáčení.

Z podmínky silové rovnováhy plyne: $F_1 + F_2 - F_k = 0 \Rightarrow F_1 + F_2 = F_k = mg$.

Zvolíme-li osu otáčení tak, že prochází bodem O (viz. obr. 6.1) a je kolmá na nákresnu, dostáváme z podmínky momentové rovnováhy:

$F_1 d_1 = F_2 (d - d_1)$. Získali jsme tak dvě rovnice pro dvě neznámé F_1, F_2.

Z první rovnice vyjádříme např. velikost síly $F_1 = mg - F_2$ a dosadíme

do rovnice druhé. Dostáváme $(mg - F_2)d_1 = F_2(d - d_1)$ a po úpravě

$$F_2 = \frac{mgd_1}{d} = \frac{mg\frac{1}{3}d}{d} = \frac{mg}{3} = 327\ \text{N}.$$

Velikost síly F_1 určíme ze vztahu $F_1 = mg - F_2 = mg - \frac{mg}{3} = \frac{2}{3}mg = 654\ \text{N}.$

Na rameno kanibala jdoucího vpředu působí síla o velikosti 654 N a na rameno druhého kanibala působí síla o velikosti 327 N.

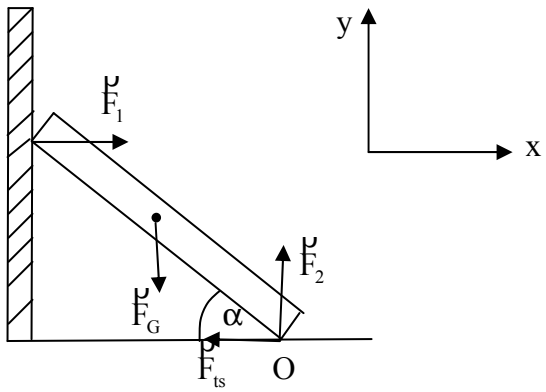
Komentář: Vypočítali jsme velikosti sil, jimiž působí kanibalové na kůl. Podle 3NPZ působí stejně velkými silami i kůl na ramena kanibalů. Vzhledem k velikostem těchto sil je téměř jisté, že donést kořist až do tábora je docela namáhavý úkol. Navíc na kanibala jdoucího vpředu působí síla 2-krát větší než na druhého. Aby nakonec tato lovecká výprava neskončila pořádnou rvačkou.

Příklad 2[57]: Horní konec homogenního žebříku se opírá o hladkou svislou stěnu, dolní o vodorovnou drsnou podlahu. Při jakém minimálním úhlu α mezi žebříkem a podlahou žebřík ještě nesklouzne? Koeficient statického tření mezi podlahou a žebříkem je 0,5.

Řešení: $f_0 = 0{,}5$

$\alpha = ?$

Nejdříve situaci ze zadání zakreslíme do obrázku, do kterého vyznačíme také síly, jež na žebřík působí.



Obr. 6.2

Na žebřík působí následující síly: tlaková síla stěny $\vec{F}_1$, tlaková síla podlahy $\vec{F}_2$, tíhová síla Země $\vec{F}_G$ a statická třecí síla $\vec{F}_{ts}$ mezi žebříkem a podlahou.

Zvolme soustavu souřadnic podle obr. 6.2. V této soustavě mají působící síly složky: $\vec{F}_1 = (F_1, 0)$, $\vec{F}_2 = (0, F_2)$, $\vec{F}_G = (0, -mg)$ a $\vec{F}_{ts} = (-F_{ts}, 0)$.

---

[57] Příklad převzat z [1].

Pro rovnováhu žebříku musí být splněny dvě podmínky:

1. Vektorový součet všech sil působících na žebřík musí být nulový, tzn. $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_G + \vec{F}_{ts} = \vec{0}$,
2. Vektorový součet všech momentů sil musí být vzhledem k libovolné ose nulový, tj. $\vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \vec{M}_G + \vec{M}_{ts} = \vec{0}$.

   V našem případě zvolme osu otáčení, tak aby procházela bodem O (viz. obr. 6.2) a byla kolmá na nákresnu. Při této volbě jsou momenty sil $\vec{M}_2$ a $\vec{M}_{ts}$ nulové, čímž se značně zjednoduší početní postup, neboť podmínka momentové rovnováhy nabude totiž tvaru $\vec{M}_1 + \vec{M}_G = \vec{0}$.

Z podmínky rovnováhy sil dostáváme:

x: $F_1 - F_{ts} = 0 \Rightarrow F_1 = F_{ts}$,

y: $F_2 - mg = 0 \Rightarrow F_2 = mg$.

Z podmínky rovnováhy momentů sil vzhledem ke zvolené ose otáčení dostáváme $F_1 d_1 = F_G d_G$, kde d_1 je rameno síly $\vec{F}_1$ a d_G je rameno síly $\vec{F}_G$.

Pro délky ramen d_1, d_G platí (viz. obr. 6.2): $d_1 = d\sin\alpha$, $d_G = \frac{d}{2}\cos\alpha$, kde d je délka žebříku. Dosadíme-li za d_1 a d_G do podmínky rovnováhy momentů sil, dostáváme užitím předešlého výsledku

$$F_1 d\sin\alpha = F_G \frac{d}{2}\cos\alpha \Rightarrow \mathrm{tg}\alpha = \frac{F_G}{2F_1} = \frac{mg}{2F_{ts}}.$$

Vzhledem k tomu, že určujeme minimální úhel, při němž se žebřík ještě nepohne, dosazujeme maximální velikost statické třecí síly, tj. $F_{ts} = f_0 F_2 = f_0 F_G = f_0 mg$.

Pro hledaný úhel tedy platí: $\mathrm{tg}\alpha = \frac{mg}{2f_0 mg} = \frac{1}{2f_0} \Rightarrow \alpha = \mathrm{arctg}\frac{1}{2f_0} = 45^0$.

Žebřík nesklouzne při úhlu $\alpha \geq 45^0$.

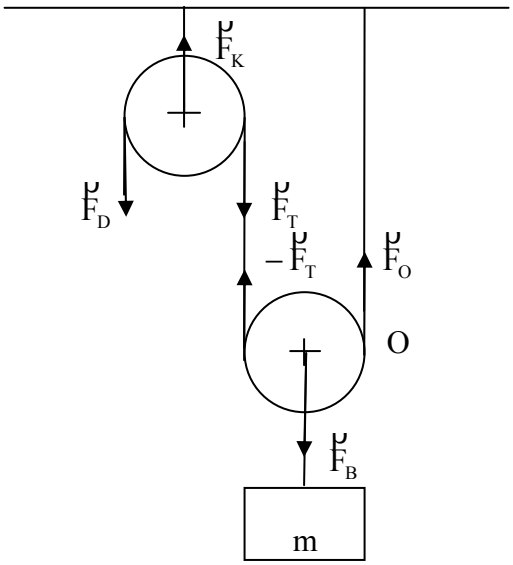
<u>Příklad 3</u>: Dobrým pomocníkem při stavbě domu je kladkostroj, který vznikne spojením pevných a volných kladek (viz. obr. 6.3). Dělník, který toto zařízení obsluhuje, může náklad zvedat rovnoměrným pohybem silou o velikosti 500 N. Určete, jakou maximální hmotnost může mít náklad, aby ho dělník uzvedl. Hmotnost kladek zanedbejte.

<u>Řešení</u>: $F_D = 500$ N

$m = ?$

Podívejme se nejdříve na funkci pevné a volné kladky. Pevná kladka je v rovnováze, je-li moment sil, které na tuto kladku působí, vzhledem k její ose nulový. Na kladku působí tyto síly: tahová síla provazu $\vec{F}_T$, tahová síla dělníka $\vec{F}_D$ a tahová síla závěsu kladky $\vec{F}_K$ (viz. obr. 6.3). Z podmínky momentové rovnováhy formulované vzhledem k ose kladky dostáváme $F_T r = F_D r \Rightarrow F_T = F_D$. Odtud plyne, že pevná kladka slouží pouze ke změně

směru síly dělníka. I když pevná kladka nemění velikost síly, kterou musí dělník působit, aby vytáhl břemeno do určité výšky, spočívá její výhoda v tom, že dělník může působit silou směrem dolů a přitom břemeno stoupá směrem vzhůru.



Obr. 6.3

Na volnou kladku pak působí tyto síly: tahová síla provazu $-\vec{F}_T$, síla břemene $\vec{F}_B$ a tahová síla závěsu volné kladky $\vec{F}_O$ (viz. obr. 6.3). Z podmínky momentové rovnováhy formulované pro osu otáčení jdoucí bodem O a kolmou k nákresně dostáváme: $F_T 2r = F_B r \Rightarrow F_T = \frac{F_B}{2}$.

Odtud vidíme, že použití volné kladky umožňuje zmenšit velikost působící síly.Spojením pevné a volné kladky vznikají kladkostroje, které kombinují vlastnosti pevné a volné kladky.

Pro výpočet hmotnosti nákladu tedy vyjdeme ze vztahu

$F_T = F_D = \frac{F_B}{2} = \frac{mg}{2}$. Pro hledanou hmotnost nákladu tedy dostáváme

$M = \frac{2F_D}{g} \approx 102$ kg.

Aby dělník náklad uzvedl, musí mít maximálně hmotnost 102 kg.

<u>Komentář</u>: Hmotnost nákladu je 102 kg. Takový náklad by dělník bez pomoci kladkostroje jen sotva uzvedl.

Příklad 4[58]: Za předpokladu, že je Země homogenní koule, vypočtěte její moment setrvačnosti a kinetickou energii spojenou s jejím otáčivým pohybem. Země má hmotnost $5{,}983 \cdot 10^{24}$ kg a její poloměr je 6378,388 km. Země se kolem osy otočí přibližně za 24 hodin.

Řešení: $M_Z = 5{,}983 \cdot 10^{24}$ kg
$R_Z = 6378{,}388$ km
$T = 24$ h
$J_Z = ?$
$E_K = ?$

Moment setrvačnosti Země určíme ze vztahu středem

$$J_Z = \frac{2}{5} M_Z R_Z^2 \approx 9{,}7 \cdot 10^{37} \text{ kg} \cdot \text{m}^2.$$

Kinetickou energii otáčivého pohybu Země vypočteme ze vztahu

$$E_K = \frac{1}{2} J_Z \omega^2 = \frac{M_Z R_Z^2 \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2}{5} = \frac{4\pi^2 M_Z R_Z^2}{5T^2} \approx 2{,}6 \cdot 10^{29} \text{ J}.$$

Moment setrvačnosti Země vzhledem k její ose otáčení je $9{,}7 \cdot 10^{37}$ kg · m^2 a kinetická energie otáčivého pohybu je $2{,}6 \cdot 10^{29}$ J.

Poznámka: Představme si, že by této obrovské energie šlo nějakým způsobem využít. Například tak, že by každému z přibližně 6,4 miliard lidí na planetě dodávala příkon 1 kW. Jak dlouho by ho každému člověku mohla dodávat? Proveďte výpočet a porovnejte získaný údaj se stářím vesmíru. Možná budete překvapeni.

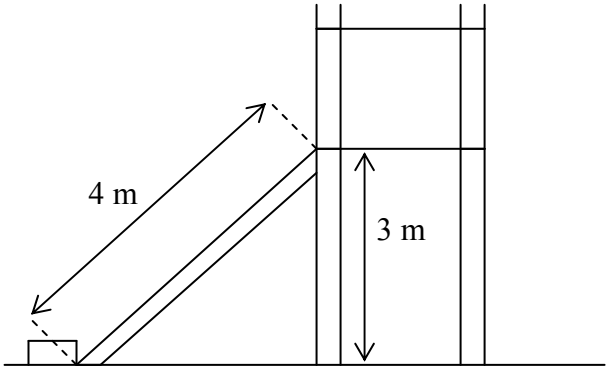
---

[58] Příklad převzat z [4].

B) Neřešené příklady

Příklad 5: Pepík s Honzíkem se škádlí, honí se po domě, až jejich hra skončí „dveřní přetlačovanou“. Pepík tlačí na dveře silou o velikosti 60 N ve vzdálenosti 35 cm od osy otáčení dveří. Honzík tlačí na dveře z opačné strany silou o velikosti 30 N ve vzdálenosti 85 cm od osy otáčení. Které dítě v souboji zvítězí?

Příklad 6: Kvůli stabilitě se postavené lešení podpírá pomocnými tyčemi. Jedna z nich je zachycena na obrázku obr. 6.4. Tato podpěra o hmotnosti 20 kg má délku 4 m a její těžiště je ve středu tyče. Lešení je podepřeno ve výšce 3 m. Dolní konec podpěry je založen betonovým odlitkem, aby se tyč nepohnula z místa. Tření mezi podpěrou a lešením zanedbejte. Za předpokladu, že je podpěra v rovnováze, určete velikosti všech sil, které na ni působí.



Obr. 6.4

Příklad 7: Na jeden konec houpačky dlouhé 4 m se posadilo dítě o hmotnosti 20 kg. Do jaké vzdálenosti od druhého konce houpačky se musí posadit jeho tatínek, aby houpačka byla v rovnováze? Tatínek má hmotnost 85 kg a houpačka je podepřena v jejím středu.

Obr. 6.5[59]

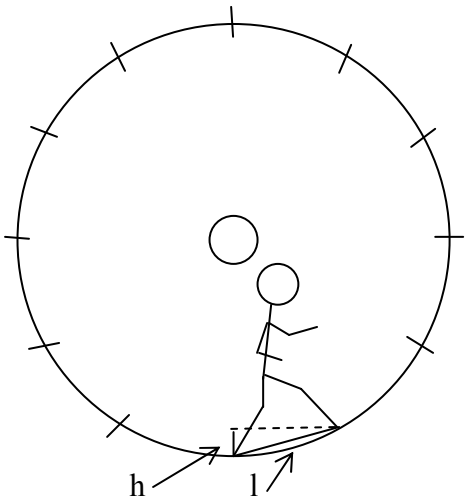
Příklad 8: Starověký učenec Archimédes prohlásil: “Dejte mi pevný bod a já pohnu Zemí.“ Nechť je tento teoretický bod ve vzdálenosti 10 km od středu Země, která má hmotnost $5{,}983 \cdot 10^{24}$ kg. V jaké vzdálenosti od pevného bodu by musel působit Archimédes silou o velikosti 650 N, aby Zemí skutečně pohnul?

[59] Obr. 6.5 převzat z [47].

Příklad 9: Farmář pěstoval na své farmě dýně. Jeden rok byla úroda tak velká, že ke sklizni musel použít trakař. Vypočtěte, jakou hmotnost měla největší dýně, víte-li , že farmář musel k nadzvednutí trakaře použít silu o velikosti 80 N a rameno této síly bylo dlouhé 160 cm. Rameno břemene bylo 45 cm.

Obr. 6.6[60]

Příklad 10[61]: K čerpání vody ze studny sloužilo ve středověku na většině hradů šlapací otočné kolo. Na obvodu kola o průměru 4 m bylo rozmístěno 12 stupátek, průměr hřídele, na níž byl navinut řetěz s nádobou na vodu, byl 40 cm. Po stupátkách se směrem vzhůru pohyboval člověk, který tak otáčel kolem. Jeho krok měl délku l = 1 m a výška kroku byla h = 30 cm (viz. obr. 6.7). Jaká byla hmotnost břemena, které udržel člověk nacházející se v poloze zakreslené na obrázku o hmotnosti 60 kg v rovnováze?



Obr. 6.7

Příklad 11[62]: Každý z trojice listů rotoru vrtulníku má délku 5,2 m a hmotnost 240 kg. Rotor se otáčí s frekvencí 350 otáček za minutu. Za předpokladu, že lze listy rotoru považovat za tenké tyče, vypočtěte moment setrvačnosti všech listů rotoru vzhledem k ose otáčení. Jaká je kinetická energie otáčivého pohybu rotoru?

[60] Obr. 6.6 převzat z [48].

[61] Příklad inspirován [9].

[62] Příklad převzat z [4].

7. ŘEŠENÍ

7.1. Řešení otázek a příkladů z kinematiky

7.1.1. Otázky z kinematiky

1. Za hmotný bod lze považovat Zemi při svém oběhu kolem Slunce, neboť rozměry Země jsou zanedbatelné ve srovnání se vzdáleností Země od Slunce (ověřte sami v tabulkách). Nelze však již za hmotný bod považovat Zemi při rotaci kolem své osy, jelikož rozměry Země jsou pro tento pohyb velmi podstatné (viz. příklad 23). Dále lze ze stejných důvodů jako dříve hmotným bodem nahradit cihlu padající z mrakodrapu, nikoliv však parkující vůz, neboť rozměry automobilu jsou při parkování velice důležité. Nesprávný odhad rozměrů vozu může zapříčinit, v tom lepším případě, pouze poškrabání laku karoserie.
2. a) soustava spojená s eskalátorem, b) soustava spojená s podlahou v prvním patře obchodního domu, c) soustava spojená s podlahou v prvním patře obchodního domu, d) soustava spojená s eskalátorem.
3. Moderátor počasí spojuje vztažnou soustavu se Zemí.
4. a) křivočarý, b) přímočarý, c) přímočarý, d) křivočarý.
5. a), d) ne, b), c) ano.

7.1.2. Příklady z kinematiky

6. První cestující se pohybuje rychlostí o velikosti $42\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$ a druhý cestující rychlostí o velikosti $41{,}2\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$.
7. Další maratónský běžec musí běžet průměrnou dráhovou rychlostí vyšší než je $20{,}3\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$. Kdyby sprinter vydržel celou dobu sprintovat, což není v lidských silách, uběhl by maratónskou trať asi za 1 h 9 min.
8. Při mrknutí řidiče urazí automobil dráhu 2,5 m a při kýchnutí dokonce 12,5 m.
Komentář: I při velmi malých časových intervalech, někdo by mohl dokonce namítnout zanedbatelně malých, automobil urazí např. při již zmiňovaném kýchnutí dráhu 12,5 m, na které může dojít k tragédii. Mohlo by se stát, že do vozovky vběhne malé dítě a řidič nestihne včas zareagovat. Samozřejmě kýchnutí člověka je přirozený biologický proces, který je neodstranitelný, a proto by měli řidiči přizpůsobit jízdu svému zdravotnímu stavu, aby omezili možné nebezpečí.
9. Pendolino se pohybuje průměrnou dráhovou rychlostí $107\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$.
Komentář: Při výpočtu jsme uvažovali, že celková doba jízdy Pendolina je 3 h 19 min. Uvědomme si, že do tohoto času započítáváme i dobu, kdy vlak zastaví v nějaké zastávce a čeká než vystoupí a nastoupí noví cestující. Kdyby tedy vlak nikde nestavěl, zvýšila by se i jeho průměrná dráhová rychlost. Na trase Praha-Ostrava Pendolino staví 3-krát. Zkuste sami zjistit podle jízdního řádu[63], o kolik se průměrná dráhová rychlost Pendolina zvýší.
10. Lyžař vyjede na vrchol sjezdovky za 5 min 53 s.

[63] Viz. jízdní řád na [16].

11. Řidič musí ujet poslední úsek dráhy rychlostí o velikosti $105\,\mathrm{km \cdot h^{-1}}$. Pokud povede cesta obcí, kde je maximální povolená rychlost $50\,\mathrm{km \cdot h^{-1}}$, bude řidič, v případě, že ho policisté zastaví, pokutován.

12. Jestřáb dohoní holuba za 30 s ve vzdálenosti 100 m od holubníku.

13. Celé stádo stihne včas utéct do bezpečí. Dráha, kterou urazí gepard za 15 s, je 458 m. Od této hodnoty ovšem musíme odečíst vzdálenost 130 m, která dělila geparda a gazely na počátku lovu. Výsledná dráha geparda je 458 m -130 m = 328 m, kdežto dráha i nejpomalejšího kusu ze stáda činí za 15 s 333 m.

14. Pes běžel rychlostí o velikosti $34\,\mathrm{km \cdot h^{-1}}$.

15. JAS-39 Gripen dohoní Airbus A340-300 za 5 min 54 s.

16. Doba jízdy z Brna do Prahy se zkrátila o necelých 17 min.

Komentář: Uvědomme si ale, za jakou cenu jsme toho dosáhli. Zvýšením rychlostního limitu se také zvýšilo možné nebezpečí autohavárie. Pokud k autohavárii dojde, jsou její následky při vyšší rychlosti mnohem horší. Např. Více zničený automobil, větší ztráty na lidských životech, apod. Navíc při rychlejší jízdě stoupá spotřeba paliva a tím se uvolňuje i více výfukových zplodin a dochází k většímu znečištění naší planety. Stojí těch 17 min za to?

17. Světelný signál letí ze Slunce na Zemi 8 min 19 s.

18. Průměrná velikost zrychlení vozu F40 je $6\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}$.

Komentář: Při rychlostních testech automobilů hraje velkou roli povrch, na kterém je automobil testován, stav pneumatik, povětrnostní podmínky, atd. Tyto faktory se účastníci testů snaží co nejvíce přizpůsobit svým potřebám, aby hodnota zrychlení byla co možná největší.

19. Fotoaparát dopadne na hladinu jezírka za 5,3 s rychlostí $187\,\mathrm{km \cdot h^{-1}}$.

20. Jablko dopadlo na Newtonovu hlavu rychlostí $24\,\mathrm{km \cdot h^{-1}}$.

21. V okamžiku skoku akčního hrdiny musí být automobil vzdálen 39,7 m od mostu.

22. Při zařazeném prvním rychlostním stupni je velikost zrychlení automobilu $2{,}8\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}$ a uražená dráha je 5,6 m. Při zařazeném druhém rychlostním stupni je velikost zrychlení $2{,}1\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}$ a automobil urazí dráhu 15,3 m. Při třetím rychlostním stupni je velikost zrychlení $1{,}7\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}$ a ujetá dráha činí 52,3 m. Při zařazeném čtvrtém rychlostním stupni je velikost zrychlení automobilu $1{,}4\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}$ a dráha je 125,2 m. Celková dráha při rozjezdu automobilu tedy činí asi 198,6 m.

23. K dopravní nehodě dojde, protože osobní vlak urazí dráhu 246,9 m než zastaví, spěšný vlak potřebuje k zastavení dráhu 652,0 m. Potřebná dráha pro zastavení obou vlaků činí 246,9 m + 652,0 m = 898,9 m. Bohužel však vzdálenost mezi vlaky je pouze 800 m.

24. Úhlová rychlost je $7{,}3 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{rad \cdot s^{-1}}$. Obvodová rychlost bodů na rovníku je $464\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$, obvodová rychlost bodů v naší zeměpisné šířce je $298\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$, velikost dostředivého zrychlení na rovníku je přibližně $0{,}03\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}$ a u nás je $0{,}02\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}$.

25. Úhlová rychlost malé ručičky je $1{,}5 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{rad \cdot s^{-1}}$, úhlová rychlost velké ručičky je $17{,}5 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{rad \cdot s^{-1}}$ a vteřinové ručičky $1047{,}2 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{rad \cdot s^{-1}}$.

26. Perioda pohybu je 12 s a velikost dostředivého zrychlení je $4\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}$.

27. Frekvence je 0,08 Hz, úhlová rychlost $0{,}52\,\mathrm{rad \cdot s^{-1}}$, obvodová rychlost je $4{,}7\,\mathrm{cm \cdot s^{-1}}$.

28. Frekvence pohybu bubnu je přibližně 23 Hz, perioda je 0,04 s. Plášť bubnu se pohybuje rychlostí o velikosti $30\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

29. Frekvence pohybu je přibližně 0,25 Hz, perioda je 4 s. Rychlost bodů na obvodu mlýnského kola je $1{,}6\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

7.2. Řešení otázek a příkladů z dynamiky

7.2.1. Otázky z dynamiky

1. Nepozná, neboť v inerciální vztažné soustavě jsou klid a rovnoměrný přímočarý pohyb dva experimentálně nerozlišitelné pohybové stavy (Galileiho princip relativity).
2. V případě nárazu automobilu na překážku se vůz náhle zastaví. Samozřejmě se prudce zastaví také vše, co je s vozem spojeno. Vše, co pevně spojeno není, jako například posádka automobilu, setrvává v pohybu, kterým se vše pohybovalo těsně před srážkou. Bezpečnostní pás tedy zabrání tomu, aby osazenstvo automobilu proletělo předním oknem. Airbagy také pomáhají zabránit pohybu cestujících vpřed. Bezpečnostní pás i airbag zapříčiní, že se osoba nakonec pohybuje prudce dozadu vzhledem k autu, až záda narazí na sedadlo. Pokud na něm bude chybět opěrka hlavy, bude hlava pokračovat v pohybu a může dojí k poškození krční páteře, popřípadě ke zlomení vazu.
3. Pes se po koupeli prudce otřepe, aby se zbavil vody, která se mu zachytila v srsti. Princip uvolnění vody ze srsti je následující: Změní-li pes rychle směr pohybu, kapky setrvávají v pohybu předešlém, a tím pádem opustí psovu srst. Pes tedy uplatňuje 1NPZ.
Komentář: Nejen lidé využívají zákony přírody. Tyto zákony platí obecně pro všechny. I zvířata jich intuitivně užívají ve svůj prospěch.
4. Najede-li cyklista předním kolem do hluboké díry, kolo se prudce zastaví. Cyklista a rám kola však setrvávají v předešlém pohybu a tím pádem cyklista přeletí přes řidítka.
5. V dopravním prostředku se musíme pevně držet z toho důvodu, že se dopravní prostředek vždy nepohybuje rovnoměrně přímočaře, ale většinou se pohybuje se zrychlením. Např. Při prudkém zastavení setrvává člověk v pohybu, kterým se pohyboval těsně před tím, než musel řidič sešlápnout brzdový pedál. Všichni tuto situaci dobře známe. Při prudkém zabrzdění se nechtěně pohybujeme ve směru jízdy dopravního prostředku. Analyzujte sami další možné situace (rozjezd a průjezd zatáčkou) a jejich vliv na pohyb člověka.

7.2.2. Příklady z dynamiky

7. Velikost hybnosti tenisového míčku je $3{,}5\ \mathrm{kg \cdot m \cdot s^{-1}}$.

8. Velikost hybnosti chodce je $44{,}4\,\mathrm{kg \cdot m \cdot s^{-1}}$ a velikost hybnosti sprintera činí $818{,}8\ \mathrm{kg \cdot m \cdot s^{-1}}$. Velikost hybnosti sprintera je tedy skoro 20-krát větší než je velikost hybnosti chodce.
9. Změna velikosti hybnosti při zařazeném prvním rychlostním stupni je asi $6667\,\mathrm{kg \cdot m \cdot s^{-1}}$ a velikost průměrné síly, která na automobil působila, je 3333 N. Změna velikosti hybnosti při zařazeném druhém rychlostním stupni je $5000\,\mathrm{kg \cdot m \cdot s^{-1}}$ a velikost průměrné síly je 2500 N. Při zařazeném třetím rychlostním stupni je velikost změny hybnosti přibližně $8333\,\mathrm{kg \cdot m \cdot s^{-1}}$ a průměrná síla má

velikost 2083 N. Při zařazeném čtvrtém rychlostním stupni je velikost změny hybnosti $10000\,\mathrm{kg \cdot m \cdot s^{-1}}$ a velikost průměrné síly je 1667 N.

10. Puk se pohyboval rychlostí $24{,}4\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

11. Hmotnost děla je 1846 kg.

12. Velikost rychlosti vagonů po nárazu je $0{,}14\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

13. Žena musí působit tahovou silou o velikosti 45,9 N směrem vzhůru.

14. Kbelík s vodou má hmotnost 10,2 kg.

15. Větev chlapce neudrží, neboť na ni chlapec působí silou o velikosti 392,4 N a větev vydrží pouze sílu o velikosti 350 N.

16. Koeficient statického tření mezi botou sprintera a podložkou musí být alespoň 0,29. Velikost statické třecí síly je 238 N.

17. Koeficient dynamického tření mezi kobercem a vysavačem byl 0,34.

18. Velikost tahové síly provázku je 34,1 N.

19. Velikost zrychlení kousku dřeva je $2{,}8\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}$.

20. Koeficient dynamického tření mezi dítětem a skluzavkou je přibližně 0,19.

21. Velikost síly, kterou musí motocyklista vyvinout, aby se motorka začala pohybovat, je minimálně 1463,4 N.

Komentář: Z výsledku vyplývá, že síla potřebná k roztlačení motocyklu je velká. Každý motocyklista by nemusel být natolik fyzicky zdatný, aby to zvládl.

22. Velikost tahové síly řetězu řetízkového kolotoče je přibližně 355 N. Velikost rychlosti sedačky s dítětem je asi $2\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

7.3. Řešení otázek a příkladů na mechanickou práci a energii

7.3.1. Otázky na mechanickou práci a energii

1. Práce výsledné síly je určena vztahem $W = \Delta E_K = E_{K,konc} - E_{K,poč}$. V případě rovnoměrného přímočarého, rovnoměrného křivočarého, resp. jakéhokoliv jiného pohybu, kdy je koncová velikost rychlosti rovna počáteční velikosti rychlosti, je práce výsledné síly, která působí na knihu, nulová. Je-li pohyb knihy zrychlený (tzn. a > 0), je práce výslednice sil kladná veličina. Při zpomaleném pohybu knihy je práce záporná.

2. Z hlediska práce síly, jíž člověk působí na vozík, je výhodnější vozík táhnout. Tahová síla $\vec{T}_1$, která působí šikmo vzhůru pod úhlem α, zmenšuje velikost tlakové síly podložky, a tedy i velikost třecí síly $\vec{F}_{t1}$ (zdůvodněte). Tlačíme-li vozík pod stejným úhlem α, směřuje síla člověka $\vec{T}_2$ šikmo dolů, zvětšuje se velikost tlakové síly podložky, a tím i velikost třecí síly $\vec{F}_{t2}$. Čím je třecí síla působící mezi vozíkem a podložkou větší, tím větší silou musí člověk na vozík působit, aby se pohyboval s daným zrychlením. Pro dané zrychlení je tedy tahová síla menší než síla tlaková, a tím je i práce vykonaná tahovou silou menší než práce vykonaná silou tlakovou.

Komentář: V případě, že by byl úhel mezi vektorem tahové (resp. tlakové) síly a vektorem posunutí nulový, bylo by samozřejmě jedno, zda vozík táhneme či tlačíme.

3. Při stěhování velké a těžké skříně stěhováci většinou vybírají ze tří možností: První z nich je, že budou skříň táhnout po koberci až na určené místo. Tato možnost není tou nejlepší, neboť tření mezi kobercem a skříní je velké a stěhováci by museli

vynaložit velkou sílu na jeho překonání. Navíc by hrozilo poškození koberce nebo skříně. Další možností by bylo chytit rukama skříň u země, narovnat se a odnést ji na patřičné místo. V tomto případě však stěhováci musí skříň zvednout do výšky asi 1 m, a tím i vykonat velkou práci. Nejlepší variantou je podvléct pod skříň stěhovací lana, která stěhováci mohou pohodlně uchopit za jejich konce. Pak stačí skříň na lanech zvednout jen o několik centimetrů a dopravit na správné místo. Práce vykonaná při tomto způsobu stěhování je určitě nejmenší.

4. Ve svých úvahách cyklista zcela jistě neuvažoval o jakékoliv přeměně mechanické energie v jiný druh energie. V takovém případě by platil ZZME a cyklista by na protější kopec vážně vyjel. Ve skutečnosti však nelze zanedbat například odpor vzduchu, i když jej lze zmenšit třeba tím, že si oblečeme přiléhavé oblečení, koupíme helmu, která má aerodynamický tvar, a vhodně se přikrčíme. Při jízdě na kole tedy vlivem odporu vzduchu dochází vždy k přeměně mechanické energie v jiný druh energie (samozřejmě platí ZZE) a cyklista se bez šlapání na vrchol dalšího kopce nedostane. (Dodejme ještě, že mezi koly a silnicí působí statická třecí síla, která způsobuje, že se kolo po silnici odvaluje bez prokluzu. Tato třecí síla však nekoná práci, neboť bod kontaktu kola se silnicí je v klidu, a tedy žádná část mechanické energie se nemění v energii vnitřní.)

7.3.2. Příklady na mechanickou práci a energii

6. Práce vykonaná vojákem při tomto pochodu je nulová, neboť vektor tíhové síly svírá s vektorem posunutí úhel 90^0.

Komentář: Při celodenním pochodu voják nevykonal žádnou práci. Dokážeme si však představit, jak byl po pochodu unaven. Fyzikální význam slova práce není vždy totožný s námi dobře známou lidskou prací a následnou únavou. Dokážete vysvětlit proč?

7. Při zvedání tašky rovnoměrně zrychleným pohybem žena vykoná práci 41,4 J. Při zvedání tašky rovnoměrným pohybem by vykonala práci 39,7 J.

Komentář: Porovnáme-li oba výsledky, je zřejmé, že je (v souladu s očekáváním) výhodnější, když břemena zdviháme rovnoměrným pohybem.

8. Hmotnost panelu je 2498 kg.

9. Průměrný výkon člověka je 202,4 W.

10. Průměrný výkon motoru automobilu, který se rozjíždí prvním rychlostním stupněm, je 9,3 kW. Při zařazeném druhém rychlostním stupni je průměrný výkon 19,1 kW. Je-li zařazen třetí rychlostní stupeň, má průměrný výkon hodnotu 27,5 kW. Při zařazeném čtvrtém rychlostním stupni je průměrný výkon 34,7 kW.

11. Kinetická energie kamínku je 9,6 J. Tíhová potenciální energie soustavy „kamínek + Země“ má hodnotu 17,4 J. Celková mechanická energie soustavy je 27 J.

Komentář 1: Uvědomte si, že těsně před puštěním kamínku z věže je jeho kinetická energie nulová a tíhová potenciální energie nabývá největší hodnoty $E_p^{max} = mgh_v \approx 27{,}0\ J$. V průběhu jeho pádu se tíhová potenciální energie mění v energii kinetickou, přičemž celková mechanická energie soustavy zůstává konstantní. V okamžiku dopadu kamínku na Zemi nabývá kinetická energie svého maxima $E_K^{max} = \frac{1}{2}mv_{max}^2 = \frac{1}{2}v(gt_{max})^2$, kde t_{max} značí dobu dopadu kamínku na Zemi. Tuto dobu vyjádříme ze vztahu

pro dráhu volného pádu, tedy $t_{max} = \sqrt{\frac{2h_v}{g}}$. Po dosazení do předešlé rovnice dostáváme (podle očekávání) $E_K^{max} = mgh_v \approx 27{,}0$ J.

Komentář 2: Kdyby odpor vzduchu zanedbatelný nebyl, ZZME by neplatil, neboť by docházelo k přeměně mechanické energie ve vnitřní energii kamínku a okolního vzduchu. V platnosti by však zůstal ZZE.

12. Dítě opustí tobogán rychlostí o velikosti $14{,}0\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

Komentář: Vzhledem k tomu, že jsme pro jednoduchost výpočtu zanedbali tření mezi dítětem a tobogánem, nezávisí získaný výsledek na tvaru tobogánu, ale pouze na tom, jak je tobogán vysoký. V reálné životě však tření hraje podstatnou roli, možná má někdo dokonce zkušenosti, že mu časté ježdění na tobogánu zničilo plavky. Reálně by tedy výsledek na tvaru tobogánu závisel.

13. Pokles mechanické energie je 240 J. Tedy vnitřní energie soustavy „chlapec + led“ vzroste o hodnotu 240 J. Velikost třecí síly je 120 N a koeficient dynamického tření má hodnotu 0,4.

14. Tíhová potenciální energie soustavy před začátkem sjezdu je 291,8 kJ. Pokles mechanické energie vlivem tření je 80,2 kJ. Lyžař má na úpatí svahu kinetickou energii 211,7 kJ a jeho rychlost je $71\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

15. Velikost rychlosti třetího úlomku je $40{,}9\ \mathrm{km \cdot s^{-1}}$ a směřuje pod úhlem 25^0 vzhledem k původnímu směru. Při výbuchu se uvolnila energie $5{,}7 \cdot 10^{14}$ J.

7.4. Řešení otázek a příkladů na gravitační pole

7.4.1. Otázky na gravitační pole

1. Vzájemné gravitační přitahování u předmětů v našem okolí nepozorujeme z toho důvodu, že velikost gravitační síly, kterou na sebe navzájem předměty působí, je mnohem menší než velikost statické třecí síly.

Komentář: Zkuste sami odhadnout velikost gravitační síly, kterou se přitahují dva pomeranče, jež považujeme za homogenní koule (oba o hmotnosti 200 g), jejichž středy jsou ve vzdálenosti 1 m, a porovnat ji s velikostí statické třecí síly mezi pomeranči a stolem, je-li koeficient statického tření asi 0,4.

2. Velikosti gravitačního a tíhového zrychlení jsou stejné pouze na severním a jižním pólu Země, neboť těmito místy prochází osa rotace a setrvačná odstředivá síla $\vec{F}_s$ je nulová.

3. Volně puštěné předměty směřují do geometrického středu Země na pólech a na rovníku. Na pólech je $\vec{a}_g = \vec{g}$ (viz. předcházející otázka). Na rovníku platí, že gravitační síla a setrvačná odstředivá síla mají opačnou orientaci. Gravitační síla opět směřuje do středu Země a setrvačná odstředivá síla směřuje na opačnou stranu. Vzhledem k tomu, že gravitační síla je větší než setrvačná odstředivá síla (ověřte), směřuje jejich výslednice, tedy tíhová síla, do středu Země.

4. Střelec musí mířit nad střed terče z toho důvodu, že na letící náboj působí tíhová síla, která zakřivuje trajektorii pohybu směrem k Zemi (viz. příklad 9).

5. Pro délku šikmého vrhu lze odvodit vztah $d = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$ (odvoďte ho), který při daných hodnotách počáteční rychlosti a tíhového zrychlení závisí pouze

na elevačním úhlu. Pokud máme tedy určit úhel, při kterém sportovec dohodí co nejdále, hledáme takový úhel, pro který je $\sin 2\alpha = 1$. Víme, že $\sin 90^0 = 1$. Porovnáním posledních dvou vztahů dostáváme $2\alpha = 90^0 \Rightarrow \alpha = 45^0$.

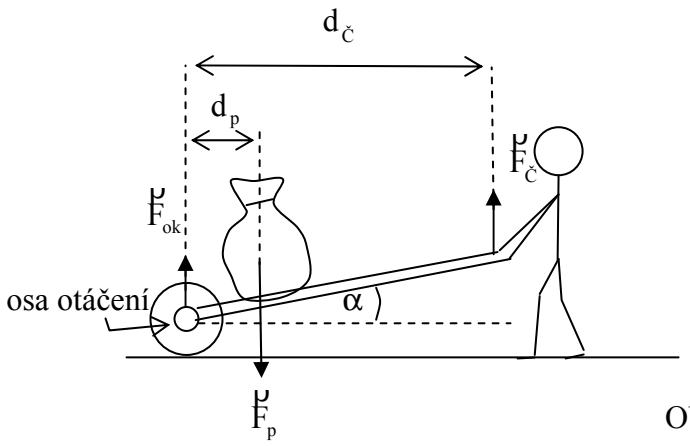
7.4.2. Příklady na gravitační pole

5. Hmotnost Slunce je $1{,}993 \cdot 10^{30}$ kg. Velikost gravitačního zrychlení na povrchu Slunce je $274{,}8\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}$.
6. Osobní váha by na vrcholu Mount Everestu ukázala údaj 84,76 kg.
7. Niel Armstrong mohl na povrchu Měsíce vyskočit do výšky 3 m. Celková doba jeho pohybu by přitom byla 3,8 s.
8. Klíče vystoupí do výšky 7,3 m. Pepík má tedy na chycení klíčů dvě možnosti. První z nich nastane při pohybu klíčů směrem vzhůru, druhou možnost má, když se budou klíče vracet k Zemi. Ve střehu tedy musí být Pepík nejvýše dvakrát, a to v čase 0,5 s a 1,9 s po začátku Honzíkova hodu.
9. Vilém Tell vystřelil šíp rychlostí o velikosti $200\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$. Ve svislém směru šíp poklesl o 44 cm.
10. Pilot letadla musí uvolnit humanitární balíček ve vodorovné vzdálenosti 6652 m od daného místa. Tento balíček dopadne přibližně za 32 s rychlostí o velikosti $376\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$.
11. Akční hrdina na druhou budovu nedoskočí. Vzdálenost budov činí 5,5 m, ale hrdina na daném výškovém rozdílu doskočí pouze do vzdálenosti 4,5 m.
12. Brankář vykopl míč pod úhlem 44^0. Vzdálenost útočníka od místa výkopu byla 61,5 m a míč mu dopadl na hlavu s rychlostí o velikosti $24\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$. Kdyby však útočník míč hlavou nezasáhl, doletěl by do vzdálenosti 63,6 m.
13. Chlapec dohodí kamenem do vzdálenosti 32,5 m. Výška výstupu kamene je pouze 6,8 m. Chlapec tedy dům vysoký 12 m nepřehodí, ale spíše rozbije nějaké okno.
14. Výška družice Sputnik 1 nad povrchem Země byla 7278 km.
15. Úniková rychlost z povrchu Slunce je přibližně $618\,\mathrm{km \cdot s^{-1}}$.
Komentář: Srovnejme únikovou rychlost z povrchu Slunce s únikovou rychlostí z povrchu Země. Každý si může ověřit, že úniková rychlost z povrchu Země je $7{,}9\,\mathrm{km \cdot s^{-1}}$. Zjišťujeme tedy, že úniková rychlost z povrchu Slunce je téměř 80-krát větší než úniková rychlost z povrchu Země.
16. Délka hlavní poloosy dráhy Neptunu je přibližně 30 AU.

7.5. Řešení otázek a příkladů z mechaniky tuhého tělesa

7.5.1. Otázky z mechaniky tuhého tělesa

1. Velikost momentu síly, který vyjadřuje otáčivý účinek síly působící na dveře, je dána vztahem $M = F \cdot d$, kde F je velikost působící síly a d je rameno síly. Čím je tedy klika dále od osy otáčení, tím menší silou stačí působit, abychom je otevřeli.
2. Funkce trakaře či kolečka je založena na mechanismu jednozvratné páky (viz. obr. 7.1).



Obr. 7.1

Páka je jednoduchý stroj, který je v rovnovážné poloze, je-li vzhledem k libovolné ose součet momentů jednotlivých sil, které na páku působí, nulový. Na desku trakaře působí tyto síly: síla $\vec{F}_p$, kterou působí pytel na trakař, síla $\vec{F}_Č$, kterou působí na trakař člověk, a tlaková síla osky kola $\vec{F}_{ok}$. (Hmotnost desky trakaře pro jednoduchost zanedbáváme.) Zvolme osu otáčení v ose kola trakaře kolmo na nákresnu. Podmínka momentové rovnováhy má potom tvar $\vec{M}_p + \vec{M}_Č = \vec{0} \Rightarrow M_p = M_Č$. Označme-li d_p rameno síly $\vec{F}_p$ a $d_Č$ rameno síly $\vec{F}_Č$, pak platí: $F_p d_p = F_Č d_Č$. Tato rovnice vyjadřuje rovnováhu na páce. Odtud dostáváme $F_Č = \frac{F_p d_p}{d_Č}$. Z předchozího vztahu vyplývá, pokud umístíme pytel pšenice co nejblíže ke kolu trakaře či kolečka, je síla, kterou musí člověk na trakař působit, nejmenší, což je v souladu se zkušeností.

3. Všechny nástroje jsou založeny na principu páky (viz. předešlá otázka).

4. Pravdu měl druhý dělník, který tvrdil, že dutý a plný válec o stejné hmotnosti a poloměru nemají stejné momenty setrvačnosti. Moment setrvačnosti dutého válce je větší než moment setrvačnosti válce plného, neboť jeho hmota je rozložena dále od osy.

7.5.2. Příklady z mechaniky tuhého tělesa

5. V souboji zvítězí Honzík, neboť velikost momentu jeho síly vzhledem k ose otáčení dveří je větší ($M_H = 25{,}5\ \mathrm{N \cdot m}$), než velikost momentu síly Pepíka ($M_P = 21{,}0\ \mathrm{N \cdot m}$).

6. Velikost tlakové síly, jíž působí lešení na podpěru, je stejná jako velikost tlakové síly, jíž působí betonový odlitek na podpěru, a to 86,5 N. Velikost tlakové síly země je stejná jako velikost tíhové síly podpěry, tedy 196,2 N.

7. Tatínek musí sedět 1,5 m od konce houpačky.

8. Archimédes by musel působit ve vzdálenosti větší než $9 \cdot 10^{26}$ m.

9. Hmotnost dýně byla 29 kg.

10. Hmotnost břemene je přibližně 286,2 kg.

11. Moment setrvačnosti trojice listů rotoru je $6489{,}6\ \mathrm{kg \cdot m^2}$ a kinetická energie otáčivého pohybu je přibližně 4,35 MJ.

Literatura:

[1] Bartuška, K.: Sbírka řešených úloh z fyziky pro střední školy I. Prometheus, Praha, 1997.
[2] Bednařík, M. a kol.: Fyzika pro gymnázia-Mechanika. Prometheus, Praha, 1993.
[3] Czudková, L.: Vybrané problémy mechaniky soustav hmotných bodů a tuhého tělesa. Dizertační práce předložená na Přf MU v Brně, 2002.
[4] Halliday, D., Resnick, R., Walker, J.: Fyzika-Mechanika. VUTIUM, Brno, 2000.
[5] Kleinová, H.: Netradiční úlohy z mechaniky tekutin. Ročníková práce předložena na PřF MU v Brně, 2005.
[6] Kružík, M.: Sbírka úloh z fyziky pro žáky středních škol. SPN, Praha, 1969.
[7] Kvasnica, J., Havránek, A., Lukáč, P., Sprušil, B.: Mechanika. Academia, Praha, 2004.
[8] Mikulčák, J., Krkavec, L., Klimeš, B., Pauková, M.: Matematické, fyzikální a chemické tabulky pro všeobecně vzdělávací školy. SPN, Praha, 1966.
[9] Miklasová, V.: Fyzika-Sbírka úloh pro SOŠ a SOU. Prometheus, Praha, 1999.
[10] Nahodil, J.: Fyzika v běžném životě. Prometheus, Praha, 2004.
[11] Svoboda, E. a kol.: Přehled středoškolské fyziky. Prometheus, Praha, 1996.
[12] Šantavý, I. a kol.: Vybrané kapitoly z fyziky-Příručka pro opakování a sjednocení látky potřebné k zahájení studia na technické fakultě. Ediční středisko VUT Brno, 1986.

Internetové odkazy:

[13] http://cs.wikipedia.org/wiki/Hlavn%C3%AD_strana
[14] http://mfweb.wz.cz/fyzika/38.htm
[15] http://www.vpcp.cz
[16] http://www.physics.muni.cz/kof/clanky/nehody.pdf
[17] http://www.scpendolino.cz/cs_CZ/kdy-kde-jede/jizdni-rad-sc-pendolino/:/page.xhtml
[18] http://www.skiricky.cz/index.php?action=content&link=areal&lang=cz&id=1
[19] http://www.bolatice.cz/bolatice/czech/text.asp?sysID=188
[20] http://www.zoopraha.cz/lexikon.php?i=13
[21] http://www.stafbul.com/kdo-je-kdo-plemena-typu-bull.html
[22] http://www.army.cz/scripts/detail.php?id=2841
[23] http://magazin.auto.cz/historie/ferrari-f40-pocta-commendatorovi.html
[24] http://www.moravskykras.net/macocha.html
[25] http://www.pout.estranky.cz/fotoalbum/stanky/stanky/28
[26] http://www.detektorweb.cz/index.4me?s=show&i=892&mm=1&vd=1&PHPSESSID=62add5fcc1968dffa
[27] http://www.cztenis.cz/pravidla/pravidlatenisu.htm
[28] http://www.sportovnipravidla.cz/pravidla/hokej/hokej.php
[29] http://re3.mm-a8.yimg.com/image/4088490641
[30] http://www.vojsko.net/index.php?clanek=pozemni/dela/skoda_model_1928

[31] http://www.sweb.cz/pvoltr/
[32] http://re3.mm-a7.yimg.com/image/3970737787
[33] http://images.search.yahoo.com/search/images?p=child+on+sledge&ei=UTF-m8&qp_p=child+sledge&imgsz=all&fr=sfp&b=1
[34] http://images.google.cz/images?q=avia+&gbv=2&ndsp=20&svnum=10&hl=cs&start =60&sa=N
[35] http://images.google.cz/images?q=skluzavka&gbv=2&svnum=10&hl=cs&start =40
[36] http://www.volny.cz/v.schulz/fotoalbo.htm
[37] http://www.zahrada-eshop.com/index.php?show=detail&prn=ZA-0732
[38] http://tbn0.google.com/images?q=tbn:9U-5osP87-lj-M:http://www.caldarola.net/atwest/saloon.jpg
[39] http://re3.mm-a8.yimg.com/image/4055731363
[40] http://re3.mm-a8.yimg.com/image/4119185699
[41] http://www.rozhlednyunas.cz/rozhledny/petrinska-rozhledna-v-praze
[42] http://divysveta.webz.cz/evropa/italie01.jpg
[43] http:// www.hotelhoracioquiroga.com/images/tobogan%2520baja.jpg
[44] http://tbn0.google.com/images?q=tbn:TlZlisjS2qk6hM:http://www.northwave.cz/ admin/img_upl/1987.jpg
[45] http://tbn0.google.com/images?q=tbn:zSXn4pbuAQyJM:http://www.iabc.cz/images/ tistene_ABC/2506/27-zeny_Profi.jpg
[46] http://re3.mm-a6.yimg.com/image/3438168505
[47] http://tbn0.google.com/images?q=tbn:moY8UdnNBy57NM:http://www.zaja.cz/img/produkty/nahledy/p3.jpg
[48] http://www.miriamgrebeimages.com/images/Autumn/PumpkinsAndWheelbarrow 356.jpg