MASARYKOVA UNIVERZITA
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA

# DIPLOMOVÁ PRÁCE

## Teorie homodynní detekce

Vedoucí diplomové práce:
**doc. Mgr. Tomáš Tyc, Ph.D.**
Brno 2008

Vypracoval:
**Martin Plöschner**

# Anotace

Tato diplomová práce se zabývá teorií homodynní detekce, což je významná metoda používaná v mnoha moderních experimentech kvantové optiky. Práce je obecně koncipována jako krátký úvod do problematiky rekonstrukce kvantového stavu elektromagnetického pole s důrazem na roli vyvážené homodynní detekce v tomto procesu. Vlastní práce se poté pokouší, pro případ velké amplitudy lokálního oscilátoru, v souřadnicové reprezentaci dokázat ekvivalenci mezi meřením počtu fotonů na výstupních fotodetektorech a meřením kvadratury pole. Prezentovány jsou dva odlišné přístupy, které jsou podrobně analyzovány.

# Annotation

This Diploma thesis deals with the Theory of Homodyne Detection, a method that is used in a variety of modern quantum-optical experiments. The general concept of the work is to provide the reader with quick overview of the important role of one special subset of Homodyne Detection – Balanced Homodyne Detection, in the process of reconstruction of the quantum state of electromagnetic field. The main part of the work then attempts to prove in x-representation that the photon-number counting at two output photodetectors is, in the case of a large amplitude of local oscillator, mathematically equivalent to measurement of the field quadrature. Two separate calculations leading to this are provided and the results are thoroughly analyzed.

**Prohlášení**

Prohlašuji, že jsem vytvořil tuto diplomovou práci samostatně za vedení **doc. Mgr. Tomáše Tyce, Ph.D.**, a že jsem v seznamu použité literatury uvedl všechny zdroje použité při zpracovaní práce.

V Brně dne 11. května 2008

**Poděkování**

Rád bych na tomto místě poděkoval vedoucímu diplomové práce **doc. Mgr. Tomáši Tycovi, Ph.D.** za čas, který věnoval konzultacím, za jeho cenné a důležité připomínky při vzniku této práce.

# Obsah

# Předmluva

Fyzika, kterou známe, je postavena na třech pilířích - zvědavosti, teorii a experimentu. Zvědavost je hnacím motorem našeho snažení, teorie nám poskytuje možné vysvětlení jevu, jenž podnítil naši zvědavost a často také tuto zvědavost umocňuje, experiment nám poté dává možnost ověřit naší teorii a buď ji zavrhnout nebo ji dále rozvíjet. Při experimentu provádíme měření nejrůznějšího charakteru - prověřujeme závislosti veličin, ověřujeme předpovězené hodnoty fundametálních konstant atd.

Do objevení kvantové mechaniky nebylo měření žádným problémem. Ano, vyžadovalo někdy značný důvtip, ale principiálně nestála měření v cestě žádná překážka ukotvená ve fundametálních zákonech přírody. To vše se v kvantové mechanice změnilo. Najednou nebylo možné provádět měření hybnosti a pozice najednou a s libovolnou přesností, na už jednou změřeném systému nemělo smysl provádět měření znovu a vyvstalo mnoho dalších otázek, např. o roli pozorovatele (hlavně jakým způsobem ovlivňuje měření, jelikož musí být provázán se stavem objektu), o tom jak zobrazit kvantový stav na klasickém měřícím přístroji nebo o roli mozku v procesu měření (odezva mozku na nějaký podnět totiž v žádném případně není jednoznačná a opakovatelnost je jedním ze základních předpokladů úspěšného měření). Pěkná pojednání o měření v kvantové mechanice může čtenář najít v [1] a [2].

Tato práce se zabývá obecně měřením kvantového stavu světla, zvláště však teorií vyvážené homodynní detekce. V úvodní kapitole, nazvané *Úvod do teorie homodynní detekce*, se letmo seznámíme s tím, jaké je experimentální uspořádání u homodynní detekce, co měří a co je výstupem měření, přičemž zevrubnou teoretickou diskuzi ponecháme do kapitoly *Měření kvadratury*. Jelikož jsem se nechtěl zabývat jen teoretickým pojednáním o homodynní detekci, které by nemělo žádnou přímou naváznost na aplikace, tak jsem celý text koncipoval jako jakousi cestu vedoucí k rekonstrukci kvantového stavu světla. Již další kapitola, nazvaná *Kvantová tomografie*, se zabývá procesem dalšího zpracování výstupních dat získaných při homodynní detekci. Tento proces, při kterém z jakýchsi řezů ve fázovém prostoru, podobných těm, které se používají v lékařské tomografii (používá se dokonce velice podobná matematika), skládáme celkový obraz kvantového stavu, je fascinující a určitě si zaslouží hlubší diskuzi. Kapitola *Měření kvadratury* pak dává teoretický popis toho, co se děje při vyvážené homodynní detekci a obsahuje výpočet, který se pokouší v souřadnicové reprezentaci dokázat, že měření počtu fotonů na dvou výstupních fotodetektorech je při velké amplitudě lokálního oscilátoru ekvivalentní měření obecné kvadratury vstupního stavu. Tento výpočet byl proveden již v práci [3] a to ve Fockově reprezentaci

a poté v Glauber-Sudarshanově P reprezentaci a to dokonce s korekčním členy pro případ menší amplitudy lokálního oscilátoru, ovšem doufáme, že náš výpočet pomůže nahlédnout do problematiky homodynní detekce zase o něco dále.

# Kapitola 1

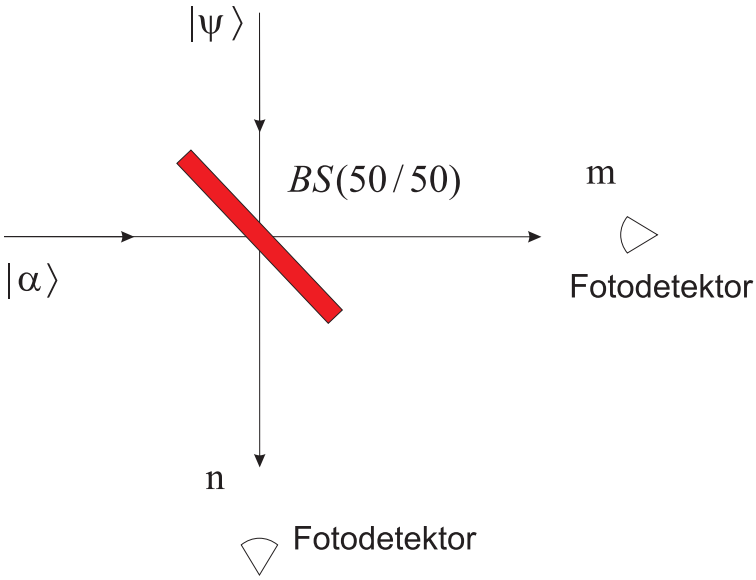
# Úvod do teorie homodynní detekce

## 1.1 Co je a k čemu je homodynní detekce?

Představte si, že Vám někdo dal za úkol změřit kvantový stav světla. První, co Vás asi napadne budou otázky typu. Proč bych vlastně něco takového měl dělat? Má to nějaký smysl? Obrátíme-li svou pozornost od ušlechtilých myšlenek o radosti z poznávání k čistě praktickým cílům, pak musíme zmínit obrovskou škálu nejrůznějších aplikací měření kvantového stavu světla. Stále častěji slýcháváme o kvantové kryptografii, kvantové teleportaci, kvantových počítačích atd. Ve všech těchto oblastech můžeme data reprezentovat kvantovým stavem světla, algoritmus, který s daty něco provádí, můžeme sestavit z aktivních a pasivních optických prvků a vyčtení informace po provedení algoritmu se může provést právě homodynní detekcí. Homodynní detekce tedy měří kvantový stav světla.

Co se děje při homodynní detekci? Experimentální uspořádání homodynní detekce je na obr. 1.1. Obecný stav $|\psi\rangle$ dopadá na dělič svazku (budeme značit BS z anglického beam splitter). V této práci se budeme zabývat vyváženou (balancovanou) homodynní detekcí (BHD), kdy je BS realizovaný polopropustným zrcadlem s propustností/odrazivostí 50%/50%. Na BS je obecný stav $|\psi\rangle$ "smíchán" s definovaným stavem tzv. **lokálního oscilátoru** (LO). LO je v koherentním stavu $|\alpha\rangle$ s velkou amplitudou a definovanou fází $\phi$ měřenou vůči signálnímu stavu, přičemž fáze LO a signálního stavu musí být vhodným způsobem sladěna. Toho se může docílit například tak, že jak LO, tak i signální stav pocházejí ze stejného zdroje. Fázi $\phi$ LO můžeme vůči fázi signálního stavu měnit například tak, že stavu LO vložíme do cesty médium, které má jiný index lomu než okolní médium. Dále musí být frekvence LO i signálního stavu stejná, z čehož ostatně plyne i název homodynní detekce. V případě, že by frekvence LO byla jiná než frekvence signálního stavu, jednalo by se o heterodynní detekci. Po promíchání obou stavů na BS měříme počty fotonů na fotodetektorech.[1]

[1] Ve skutečnosti je přímé měření počtu fotonů nelehká záležitost a proto se, spíše než počty fotonů, měří výstupní proudy na detektorech. V dalším však budeme rozebírat ideální případ, kdy jsme schopni určit přímo počty fotonů.




Obrázek 1.1: Experimentální uspořádání vyvážené homodynní detekce.

## 1.2 Co můžeme určit z počtu fotonů na výstupech?

Co vlastně měřením počtu fotonů na jednotlivých detektorech zjistíme? Při prvním setkání s BHD se tato metoda, ale hlavně její výsledek, může člověku jevit jako téměř zázračná věc. Když se snažím lidem, kteří se nezabývají fyzikou, vysvětlit, co se při homodynní detekci děje, používám následující analogii.

Představte si, že chcete zjistit, jak vypadá objekt, který jste nikdy předtím neviděli, aniž byste použili své smysly. Při homodynní detekci se postupuje zjednodušeně takto. Nejdříve se vybere vhodný referenční objekt, o kterém víme, jak vypadá a který je mnohem větší než objekt, který zkoumáme. Poté tyto dva objekty pošleme do zařízení, které jejich atomy promíchá dohromady definovaným způsobem a pošle určitý počet atomů na detektor 1 a zbytek atomů na detektor 2. Z rozdílu počtu atomů na jednotlivých detektorech nakonec můžeme určit, jaký atom byl na určité pozici v objektu, jehož charakter jsme zkoumali. Takto překvapivě se pro nezasvěceného homodynní detekce chová. Z veličiny, která se na první pohled nejeví nijak zajímavě, se dá určit tolik informací, až to člověka trochu šokuje.

### 1.2.1 Homodynní detekce měří kvadraturu

Pokud v předchozí analogii zaměníte neznámý objekt signálním stavem $|\psi\rangle$ a velký referenční objekt stavem LO, promícháte stavy na BS a měříte ne počty atomů, ale fotonů na detektorech, získáte docela dobrou intuitivní představu, co homodynní detekce měří na signálním stavu. Ovšem název kapitoly může znít poněkud vzdáleně člověku, který se nezabývá kvantovou optikou. Co se skrývá za tajemným slovem **kvadratura**? Co to vlastně na signálním stavu $|\psi\rangle$ měříme?

Každý se určitě už někdy setkal s operátory souřadnice $\hat{x}$ a hybnosti $\hat{p}$. Při řešení kvantového harmonického oscilátoru se definují tyto operátory pomocí kreačních a anihilačních operátorů. Má to své nesporné výhody. Například při řešení Heisenbergových pohybových rovnic

$$\frac{d\hat{A}^{(H)}}{dt} = \frac{1}{i\hbar}\left[\hat{A}^{(H)}, \hat{H}\right], \tag{1.1}$$

kde $\hat{A}^{(H)}$ je nějaký operátor v Heisenbergově reprezentaci, pro Hamiltonián harmonického oscilátoru

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2 \tag{1.2}$$

vychází následující provázané pohybové rovnice pro $\hat{x}$ a $\hat{p}$:

$$\frac{d\hat{p}}{dt} = -m\omega^2\hat{x}, \qquad \frac{d\hat{x}}{dt} = \frac{\hat{p}}{m}. \tag{1.3}$$

Když ovšem definujeme $\hat{x}$ a $\hat{p}$ následovně:

$$\hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}\left(\frac{\hat{a}+\hat{a}^\dagger}{\sqrt{2}}\right), \qquad \hat{p} = i\sqrt{\hbar m\omega}\left(\frac{\hat{a}^\dagger-\hat{a}}{\sqrt{2}}\right) \tag{1.4}$$

výsledné rovnice pro $\hat{a}$, $\hat{a}^\dagger$ již provázané nejsou a dostáváme rovnice mnohem jednodušší:

$$\frac{d\hat{a}}{dt} = -i\omega\hat{a}, \qquad \frac{d\hat{a}^\dagger}{dt} = i\omega\hat{a}^\dagger. \tag{1.5}$$

Pro další práci je navíc výhodné zavést bezrozměrné veličiny $\hat{X}$ a $\hat{P}$:

$$\hat{X} = \frac{\hat{x}}{\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}}, \qquad \hat{P} = \frac{\hat{p}}{\sqrt{\hbar m\omega}}. \tag{1.6}$$

Po přeznačení velkých $\hat{X}$ a $\hat{P}$ na malé $\hat{x}$ a $\hat{p}$ můžeme psát:

$$\hat{x} = \frac{\hat{a}+\hat{a}^\dagger}{\sqrt{2}}, \qquad \hat{p} = i\left(\frac{\hat{a}^\dagger-\hat{a}}{\sqrt{2}}\right). \tag{1.7}$$

Co je tedy ona **kvadratura**? Kvadratury jsou právě operátory $\hat{x}$ a $\hat{p}$. Lze ještě definovat obecnou kvadraturu, která je lineární kombinací $\hat{x}$ a $\hat{p}$ takto

$$\hat{x}_\phi = \hat{x}\cos\phi + \hat{p}\sin\phi = \frac{\hat{a}e^{-i\phi} + \hat{a}^\dagger e^{i\phi}}{\sqrt{2}}, \tag{1.8}$$

kde $\phi$ je fáze LO a $\hat{x}_\phi$ je jakousi natočenou původní kvadraturou $\hat{x}$. Tuto kvadraturu homodynní detekce efektivně měří, pokud je amplituda LO dostatečně velká a fáze LO je naladěna na $\phi$. Kvadratura $\hat{x}_\phi$ se může na první pohled jevit jako velice abstraktní záležitost, ovšem při kvantování elektromagnetického pole dospíváme ke stejnému výrazu (odvození

lze nalézt např. v [12]). Pro jeden mód můžeme polní operátor napsat zjednodušeně ve tvaru

$$\hat{E}(z,t) = \frac{\hat{a}e^{-i(\phi(z,t))} + \hat{a}^{\dagger}e^{i(\phi(z,t))}}{\sqrt{2}}, \tag{1.9}$$

z čehož je jasně vidět analogie s rovnicí (1.8).

Názorné vysvětlení toho, co kvadratura je a jak můžeme využít výše uvedené ekvivalence, musíme bohužel ponechat až do kapitoly 2.5, kdy již budeme mít potřebný teoretický základ. Následující sekce však také poskytne určitou odpověď.

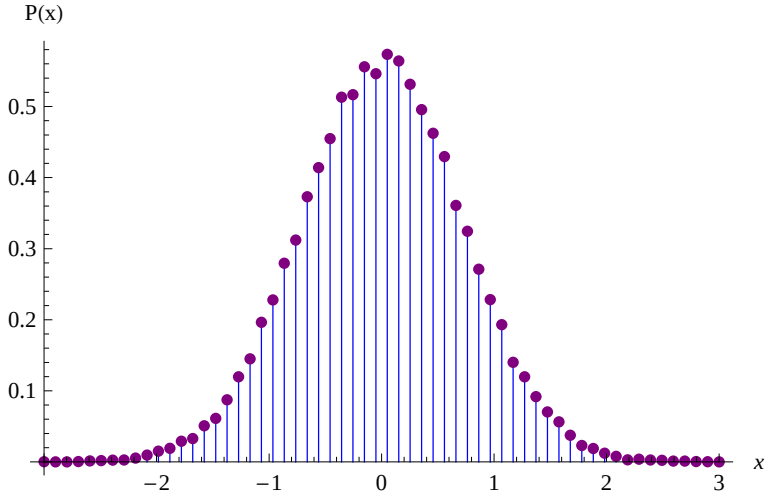
### 1.2.2 Měří kvadraturu? Co to znamená?

V případě velké amplitudy LO je měření pravděpodobnosti $P_n^m$ úzce provázáno s měřením hustoty pravděpodobnosti pro obecně natočenou kvadraturu[2] $P(x,\phi)$ ([3], [4], [5], [6]). Vysvětlení tohoto a odpovědi na další otázky, např. proč můžeme k sobě vztáhnout diskrétní a spojitou statistiku, uvedeme v sekci 1.3.

Nyní uvažujme pro názornou demonstraci toho, co vlastně pomocí homodynní detekce měříme, následující jednoduchý příklad. Mějme harmonický oscilátor, který je ekvivalentní jednomu módu elektromagnetického pole. Jestliže LO naladíme na fázi $\phi = 0$, pak pravděpodobnost $P_n^m$ toho, že na výstupních portech naměříme $m$ a $n$ fotonů je úměrná hustotě pravděpodobnosti $P(x,0)$ toho, že harmonický oscilátor nalezneme na pozici $x$, přičemž hodnota $x$ je určitým způsobem svázána s hodnotami $m$, $n$ (bližší informace opět v 1.3). Jinak řečeno, měříme kvadraturu $\hat{x}$ harmonického oscilátoru (daného módu elektromagnetického pole). Stejně tak pokud fázi LO zvolíme $\phi = \pi/2$, pak dostáváme souvislost mezi pravděpodobností $P_n^m$ nalezení $m$, $n$ fotonů na výstupních portech a hustotou pravděpodobnosti $P(x,\pi/2) = P(p)$ toho, že systém nalezneme s hybností $p$. Tedy provádíme měření kvadratury $\hat{p}$ harmonického oscilátoru. Při obecné fázi $\phi$ LO, pak homodynní detekce měří zobecněnou kvadraturu $\hat{x}_\phi$.

Bavíme-li se o pravděpodobnosti, pak je jasné, že musíme provést velký počet měření $m$, $n$. Proto musíme mít v zásobě dostatečné množství kopií signálního stavu. Experiment poté probíhá následovně. Pošleme jednu kopii stavu na BS, kde dojde k interferenci se stavem LO (pro jednoduchost naladíme LO na fázi $\phi = 0$) a na výstupu měříme pravěpodobnost $P_n^m$ události $m$ fotonů na prvním portu, $n$ fotonů na druhém portu. Opakováním tohoto postupu pro další a další kopie stavu nakonec obdržíme histogram pro $P_n^m$, který poté díky úměrnosti $P_n^m \propto P(x,0)$ můžeme vztáhnout k histogramu pro událost - harmonický oscilátor na pozici $x$ (elektromagnetické pole s kvadraturou $x$). Jak by eventuálně mohl vypadat výstup z měření, po převedení přímo měřené pravděpodobnosti $P_n^m$ na nepřímo měřenou pravděpodobnost $P(x,0)$, můžete vidět na obr. 1.2 pro vakuový stav.

[2] Výrazem $P(x,\phi)$ myslíme samozřejmě hustotu pravděpodobnosti pro obecně natočenou kvadraturu $P(x_\phi)$. Tímto způsobem zápisu se vyhneme nejasnostem v pozdějších fázích výkladu.

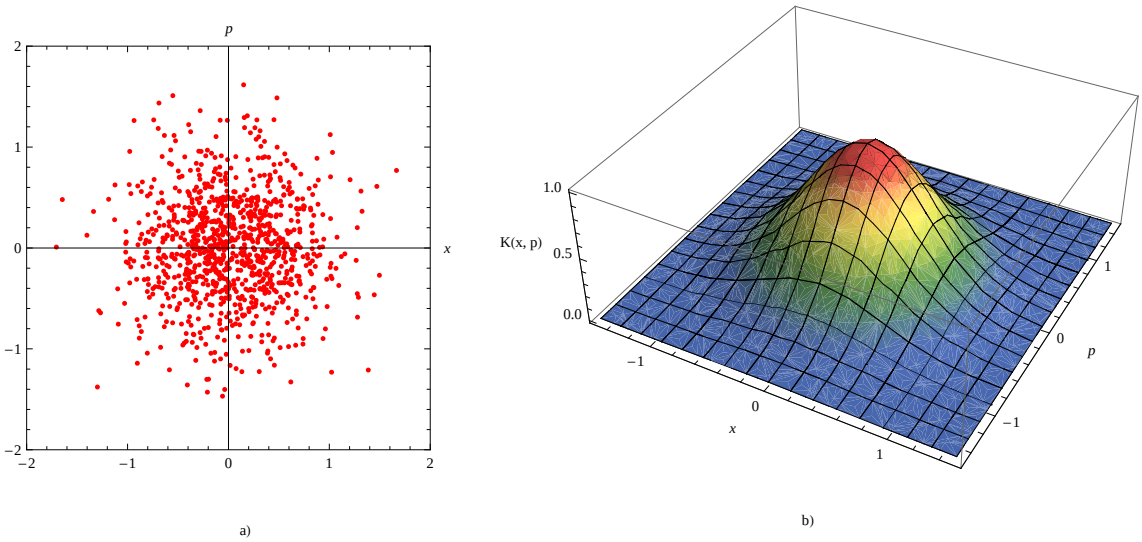



Obrázek 1.2: Možný výsledek měření homodynní detekcí pro vakuový stav při fázi LO $\phi = 0$.

### 1.2.3 BHD je fázově citlivá metoda

Homodynní detekce je **fázově citlivá** metoda měření kvantového stavu světla. To znamená, že zpřístupňuje nejen informaci o intenzitě pole, ale současně i o jeho fázi. Informace o fázi je zpřístupněna právě díky interferenci signálního stavu se stavem LO. Experiment můžeme provést pro obecné $\phi$ LO a místo histogramu $P(x, 0)$, který dostaneme při $\phi = 0$, obdržíme histogram pro pootočenou kvadraturu $P(x, \phi)$. Tato vlastnost je klíčová k získání úplné informace o kvantovém stavu světla, jak se brzy přesvědčíme. Není to ovšem tak přímočaré, jak by se na první pohled mohlo zdát. K rekonstrukci kvantového stavu světla budeme potřebovat několik matematických struktur. Nástin té nejdůležitější z nich je uveden v následujícím odstavci.

V klasické mechanice můžeme uvažovat následující velmi jednoduchý příklad. Mějme opět jeden harmonický oscilátor. Jeho stav lze reprezentovat bodem ve fázovém prostoru. Jestliže budeme mít velké množství takovýchto harmonických oscilátorů, pak se můžeme ptát, s jakou pravděpodobností vytáhneme z této množiny harmonických oscilátorů takový, který se právě nachází v bodě $x$ a $p$ fázového prostoru. Pokud bychom fázový prostor rozškatulkovali do malých oblastí, které by měly strany délky d$x$ a d$p$, a následně každý námi vytáhnutý harmonický oscilátor správně umístili do jeho škatulky, obdrželi bychom jakousi distribuci harmonických oscilátorů ve fázovém prostoru. Vezměme jako příklad dvourozměrnou Gaussovu distribuci harmonických oscilátorů ve fázovém prostoru. Naše měření by pak mohlo dopadnout tak, jak vidíme na obr. 1.3a. Kolem počátku fázového prostoru je větší hustota bodů, takže tam má přihrádka d$x$d$p$ větší váhu, směrem od centra hustota bodů klesá. Při obrovském počtu harmonických oscilátorů bychom mohli dospět k distribuci, kterou můžete vidět na obr. 1.3b. Označme ji $K(x, p)$. Funkce $K(x, p)$ musí být nezáporná v celém fázovém prostoru (protože pravděpodobnost nemůže být záporná) a in-




Obrázek 1.3: (a) Výsledek měření na souboru harmonických oscilátorů s dvourozměrnou Gaussovou distribucí; (b) Odpovídající pravděpodobností distribuce $K(x,p)$ v limitním případě velmi velkého počtu harmonických oscilátorů.

tegrál přes celý fázový prostor musí splňovat normovací podmínku $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} K(x,p)\,dx\,dp = 1$, jelikož systém v celém fázovém prostoru určitě někde je. Za zmínku stojí následující vlastnosti distribuce:

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(x,p)\,dx = P(x,\pi/2), \qquad \int_{-\infty}^{\infty} K(x,p)\,dp = P(x,0). \tag{1.10}$$

Tedy integrací přes $x$, respektive $p$, dostáváme hustoty pravděpodobnosti $P(x,\pi/2)$ a $P(x,0)$. Existuje v kvantové mechanice pravděpodobnostní distribuce podobných vlastností? Ano, v kvantové mechanice existuje distribuce podobných vlastností, která je však v pravém slova smyslu kvazidistribucí, protože může nabývat i záporných hodnot[3] - tzv. **Wignerova kvazidistribuční funkce**. Wignerova kvazidistribuce je spojovacím mostem mezi histogramem $P(x,\phi)$ a maticí hustoty měřeného stavu $\hat{\rho}$, tedy matematickým objektem, který v sobě skrývá maximální informaci o kvantovém stavu - a to jak čistém, tak i smíšeném. Tady vidíme první náznak toho, proč homodynní detekce hraje tak důležitou roli v procesu rekonstrukce kvantového stavu světla. V kapitole 2 se blíže seznámíme se strukturou tohoto spojovacího mostu.

[3]Důvod, proč tomu tak je, vyplývá z relací neurčitosti - nemůžeme změřit zároveň s absolutní přesností $x$ i $p$.

## 1.3 Proč homodynní detekce měří kvadraturu?

Vraťme se nyní k objasnění souvislosti mezi $P_n^m$ a $P(x,\phi)$. O homodynní detekci v případě velké amplitudy LO s fází $\phi$ už víme následující:

- BHD efektivně měří kvadraturu $\hat{x}_\phi$ signálního stavu
- mnohonásobným opakováním měření obdržíme histogram pro $\hat{x}_\phi$

Stále však nevíme, proč BHD při velké amplitudě LO měří kvadraturu $\hat{x}_\phi$ signálního stavu. Ještě jinak řečeno, nevíme jak souvisí přímo měřené počty fotonů na výstupech s měřením kvadratury $\hat{x}_\phi$. Tuto mezeru v našem chápání se nyní pokusíme zacelit (argumentace vychází z [7]).

Vstupní módy budeme reprezentovat polními operátory $\hat{a}_1$, $\hat{a}_2$, přičemž $\hat{a}_1$ bude polní operátor signálního stavu a $\hat{a}_2$ bude polní operátor LO. Výstupní stavy budeme popisovat polními operátory $\hat{a}_1'$ a $\hat{a}_2'$. Jak souvisí výstupní polní operátory se vstupními? Abychom mohli odpovědět na tuto otázku, musíme vědět, jakým Hamiltoniánem je popsána interakce na BS. Hamiltonián BS má následující tvar[4]

$$\hat{H} = i\Omega\left(\hat{a}_1\hat{a}_2^\dagger - \hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2\right), \tag{1.11}$$

kde $\Omega$ je frekvence charakterizující rychlost přechodu módů přes BS. Tento tvar Hamiltoniánu plyne z podmínek pro $\mathbf{E}$ a $\mathbf{B}$ na rozhraní, kde nastává odraz. Povšimněte si, že Hamiltonián skutečně "míchá" polní operátory mezi sebou, což je to, co od BS požadujeme.

Vždy, když se zajímáme o časový vývoj operátorů pod Hamiltoniánem $\hat{H}$, používáme Heisenbergovu reprezentaci a Heisebergovy pohybové rovnice (1.1). Proto můžeme psát

$$\frac{\mathrm{d}\hat{a}_1}{\mathrm{d}t} = -i\left[\hat{a}_1, \hat{H}\right], \qquad \frac{\mathrm{d}\hat{a}_2}{\mathrm{d}t} = -i\left[\hat{a}_2, \hat{H}\right]. \tag{1.12}$$

Pro polní operátory platí komutační relace

$$\left[\hat{a}_i, \hat{a}_j^\dagger\right] = \delta_{ij}\hat{1}, \qquad [\hat{a}_i, \hat{a}_j] = 0, \qquad \left[\hat{a}_i^\dagger, \hat{a}_j^\dagger\right] = 0. \tag{1.13}$$

Rozepišme nyní komutátory v (1.12) s použitím (1.13):

$$\begin{aligned} -i\left[\hat{a}_1, \hat{H}\right] &= \Omega\left[\hat{a}_1, \hat{a}_1\hat{a}_2^\dagger - \hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2\right] = \Omega\left(\hat{a}_1\hat{a}_1\hat{a}_2^\dagger - \hat{a}_1\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2 - \hat{a}_1\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_1 + \hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2\hat{a}_1\right) \\ &= \Omega\left(-\hat{a}_1\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2 + \hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2\hat{a}_1\right) = -\Omega\hat{a}_2, \end{aligned} \tag{1.14}$$

$$\begin{aligned} -i\left[\hat{a}_2, \hat{H}\right] &= \Omega\left[\hat{a}_2, \hat{a}_1\hat{a}_2^\dagger - \hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2\right] = \Omega\left(\hat{a}_2\hat{a}_1\hat{a}_2^\dagger - \hat{a}_2\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2 - \hat{a}_1\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_2 + \hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2\hat{a}_2\right) \\ &= \Omega\left(\hat{a}_2\hat{a}_1\hat{a}_2^\dagger - \hat{a}_1\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_2\right) = \Omega\hat{a}_1. \end{aligned} \tag{1.15}$$

[4] Bereme $\hbar = 1$.

Dostáváme

$$\frac{\mathrm{d}\hat{a}_1}{\mathrm{d}t} = -\Omega\hat{a}_2,\ \frac{\mathrm{d}\hat{a}_2}{\mathrm{d}t} = \Omega\hat{a}_1 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}^2\hat{a}_1}{\mathrm{d}t^2} = -\Omega\frac{\mathrm{d}\hat{a}_2}{\mathrm{d}t} = -\Omega^2\hat{a}_1,\ \frac{\mathrm{d}^2\hat{a}_2}{\mathrm{d}t^2} = \Omega\frac{\mathrm{d}\hat{a}_1}{\mathrm{d}t} = -\Omega^2\hat{a}_2. \tag{1.16}$$

Tyto rovnice můžeme vyřešit s uvážením počátečních podmínek v $t = 0$. Obdržíme

$$\hat{a}_1(t) = \hat{a}_1(0)\cos\Omega t - \hat{a}_2(0)\sin\Omega t, \qquad \hat{a}_2(t) = \hat{a}_2(0)\cos\Omega t + \hat{a}_1(0)\sin\Omega t. \tag{1.17}$$

Parametr $t$ můžeme chápat jako charakteristiku toho, po jak dlouhou dobu módy interagují na BS, což je pro daný BS jistě parametr konstantní. V případě symetrického děliče svazku (50%/50%) je poté parametr $\Omega t$ roven $\pi/4$. Transformaci můžeme pomocí (1.17) psát ve tvaru matice

$$\begin{pmatrix} \hat{a}_1' \\ \hat{a}_2' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \end{pmatrix}, \tag{1.18}$$

kde jsme $\hat{a}_1(t)$, $\hat{a}_2(t)$ přeznačili na $\hat{a}_1'$, $\hat{a}_2'$ a $\hat{a}_1(0)$, $\hat{a}_2(0)$ na $\hat{a}_1$, $\hat{a}_2$. Samozřejmě také platí (prosté hermiteovské sdružení)

$$\begin{pmatrix} \hat{a}_1'^{\dagger} \\ \hat{a}_2'^{\dagger} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \hat{a}_1^{\dagger} \\ \hat{a}_2^{\dagger} \end{pmatrix}. \tag{1.19}$$

Nyní zaveďme operátor rozdílu počtu fotonů na výstupech takto

$$\hat{\Delta} = \hat{n}_2' - \hat{n}_1' = \hat{a}_2'^{\dagger}\hat{a}_2' - \hat{a}_1'^{\dagger}\hat{a}_1'. \tag{1.20}$$

Zapsáno pomocí polních operátorů vstupních módů

$$\hat{\Delta} = -\hat{a}_1^{\dagger}\hat{a}_2 - \hat{a}_2^{\dagger}\hat{a}_1. \tag{1.21}$$

Jaká je střední hodnota rozdílu počtu fotonů na výstupu? Předně si musíme uvědomit, že jsme již veškerou interakci módů na BS zahrnuli do transformace polních operátorů, protože jsme výpočet prováděli v Heisenbergově obraze, takže výstupní brackety se rovnají vstupním bracketům. To je důvod, proč při výpočtu střední hodnoty $\langle\hat{\Delta}\rangle$ na výstupu "obložíme" $\hat{\Delta}$ vstupními stavy. Stav LO budeme zapisovat jako $|-Ae^{i\phi}\rangle$, kde amplituda $A$ je reálná, kladná, přičemž znaménko mínus je voleno čistě z konvenčních důvodů. Signální stav označme jako obvykle $|\psi\rangle$. Připomeňme, že $\hat{a}_1$ přísluší k signálnímu stavu $|\psi\rangle$ a $\hat{a}_2$ náleží k LO. Při úpravách také využijeme definující vlastnosti koherentního stavu

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle, \qquad \langle\alpha|\hat{a}^{\dagger} = \langle\alpha|\alpha^* \tag{1.22}$$

a toho, že $\langle\alpha|\alpha\rangle = 1$. Pro střední hodnotu rozdílu počtu fotonů na výstupu můžeme potom psát

$$\begin{aligned} {}_2\langle -Ae^{i\phi}|_1\langle\psi|\hat{\Delta}|\psi\rangle_1|-Ae^{i\phi}\rangle_2 &= {}_2\langle -Ae^{i\phi}|_1\langle\psi| - \hat{a}_1^{\dagger}\hat{a}_2 - \hat{a}_2^{\dagger}\hat{a}_1|\psi\rangle_1|-Ae^{i\phi}\rangle_2 \\ &= Ae^{-i\phi}\langle\psi|\hat{a}_1|\psi\rangle + Ae^{i\phi}\langle\psi|\hat{a}_1^{\dagger}|\psi\rangle. \end{aligned} \tag{1.23}$$

Když se nyní vrátíme ke vztahu (1.8) a budeme zjišťovat střední hodnotu kvadratury $\hat{x}_\phi$ ve stavu $|\psi\rangle$, obdržíme

$$\langle\psi|\hat{x}_\phi|\psi\rangle = \frac{e^{-i\phi}\langle\psi|\hat{a}|\psi\rangle + e^{i\phi}\langle\psi|\hat{a}^\dagger|\psi\rangle}{\sqrt{2}}. \tag{1.24}$$

To pro střední hodnotu rozdílu počtu fotonů na výstupu znamená (již ve zkráceném zápisu)

$$\langle\hat{\Delta}\rangle = \sqrt{2}A\langle\hat{x}_\phi\rangle. \tag{1.25}$$

Střední hodnota rozdílu počtu fotonů je tedy úměrná střední hodnotě obecné kvadratury. Abychom však mohli říci, že měření rozdílu počtu fotonů na výstupu je totéž, co měření kvadratury $\hat{x}_\phi$, musí se shodovat nejen střední hodnota, ale i celé statistické rozdělení, tedy musí platit

$$\langle\hat{\Delta}^n\rangle = \langle(-\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2 - \hat{a}_2^\dagger\hat{a}_1)^n\rangle. \tag{1.26}$$

Zkusíme rozebrat chování tohoto výrazu pro $A \to \infty$. Budeme vycházet z článku [4], kde je analyzován člen

$$\hat{X}_n = \langle\alpha|(\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2 + \hat{a}_2^\dagger\hat{a}_1)^n|\alpha\rangle. \tag{1.27}$$

Trik pro jeho rozumné vyjádření spočívá v použití koherentního posunovacího operátoru. Pro koherentní posunovací operátor tvaru

$$\hat{D}(\alpha) = \exp\left(\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a}\right) \tag{1.28}$$

platí následující vztahy

$$\hat{D}^\dagger(\alpha)\hat{a}_2\hat{D}(\alpha) = \hat{a}_2 + \alpha, \qquad \hat{D}^\dagger(\alpha)\hat{a}_2^\dagger\hat{D}(\alpha) = \hat{a}_2^\dagger + \alpha^*. \tag{1.29}$$

Pomocí těchto vztahů lze poměrně snadno dokázat, že pro jakoukoli funkci $f(\hat{a}_2, \hat{a}_2^\dagger)$, kterou můžeme napsat ve tvaru mocninné řady, platí

$$\hat{D}^\dagger(\alpha)f(\hat{a}_2, \hat{a}_2^\dagger)\hat{D}(\alpha) = f(\hat{a}_2 + \alpha, \hat{a}_2^\dagger + \alpha^*). \tag{1.30}$$

Stačí si uvědomit, že posunovací operátor je unitární a tudíž $\hat{D}(\alpha)\hat{D}^\dagger(\alpha) = 1$. Dále mezi každý člen mocninné řady, vezměme například člen $\hat{a}_2^l\hat{a}_2^{\dagger k}$, můžeme vložit $\hat{D}(\alpha)\hat{D}^\dagger(\alpha)$ a obdržíme

$$\begin{aligned}\hat{D}^\dagger(\alpha)\hat{a}_2^l\hat{a}_2^{\dagger k}\hat{D}(\alpha) &= \overbrace{\hat{D}^\dagger(\alpha)\hat{a}_2\hat{D}(\alpha)\hat{D}^\dagger(\alpha)\ldots\hat{a}_2\hat{D}(\alpha)}^{l}\overbrace{\hat{D}^\dagger(\alpha)\hat{a}_2^\dagger\hat{D}(\alpha)\hat{D}^\dagger(\alpha)\ldots\hat{a}_2^\dagger\hat{D}(\alpha)}^{k} \\ &= (\hat{a}_2 + \alpha)^l(\hat{a}_2^\dagger + \alpha^*)^k. \end{aligned} \tag{1.31}$$

Takto můžeme postupovat pro každý člen mocniného rozvoje a proto platí (1.30). Výraz (1.27) poté můžeme zapsat také takto:[5]

$$\langle 0|[(\hat{a}_1^\dagger\alpha + \hat{a}_1\alpha^*) + (\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2 + \hat{a}_2^\dagger\hat{a}_1)]^n|0\rangle. \tag{1.32}$$

[5] Použijeme $\hat{D}(\alpha)|0\rangle = |\alpha\rangle$ a $\langle 0|\hat{D}^\dagger(\alpha) = \langle\alpha|$.

V binomiálním rozvoji tohoto výrazu nás přitom v případě $A \to \infty$ zajímá pouze člen řádu $O(|\alpha|^n)$, člen řádu $O(|\alpha|^{n-1})$ je identicky roven nule, protože operátory $\hat{a}_2$, $\hat{a}_2^\dagger$ působící na vakuový stav dají nulu, další nenulový člen bude až řádu $O(|\alpha|^{n-2})$. Pro úplnost a představu o tom, jak se chovají další členy, uvádíme výsledek tak, jak je uveden v článku [4] i s členem řádu $O(|\alpha|^{n-2})$:

$$\begin{aligned}\hat{X}_n &= (\hat{a}_1^\dagger\alpha + \hat{a}_1\alpha^*)^n + \frac{n(n-1)}{2}\hat{a}_1^\dagger(\hat{a}_1^\dagger\alpha + \hat{a}_1\alpha^*)^{n-2}\hat{a}_1 \\ &+ \frac{n(n-1)(n-2)}{6}\left[\alpha\hat{a}_1^\dagger(\hat{a}_1^\dagger\alpha + \hat{a}_1\alpha^*)^{n-3} + \alpha^*\hat{a}_1(\hat{a}_1^\dagger\alpha + \hat{a}_1\alpha^*)^{n-3}\right] \\ &+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}|\alpha|^2(\hat{a}_1^\dagger\alpha + \hat{a}_1\alpha^*)^{n-4} + O(|\alpha|^{n-4}). \qquad (1.33)\end{aligned}$$

Vraťme se nyní k (1.26). Pro případ $A \to \infty$ a $\alpha = -Ae^{i\phi}$ můžeme s použitím výše uvedeného rozvoje psát[6]

$$\langle\hat{\Delta}^n\rangle \approx (-1)^n\langle(\hat{a}_1^\dagger\alpha + \hat{a}_1\alpha^*)^n\rangle = 2^{\frac{n}{2}}A^n\left\langle\left(\frac{\hat{a}_1^\dagger e^{i\phi} + \hat{a}_1 e^{-i\phi}}{\sqrt{2}}\right)^n\right\rangle = 2^{\frac{n}{2}}A^n\langle\hat{x}_\phi^n\rangle. \qquad (1.34)$$

I další momenty veličin $\hat{\Delta}$ a $\hat{x}_\phi$ jsou tedy sobě úměrné. Jestliže jsou však všechny momenty těchto veličin sobě úměrné, pak to znamená, že měření veličiny $\hat{\Delta}$ je současně měřením naškálované kvadratury $\hat{x}_\phi$. Proto jestliže měříme $\hat{\Delta}/\sqrt{2}A$, pak je to ekvivalentní měření kvadratury $\hat{x}_\phi$. To, že je statistika veličiny $\hat{\Delta}$ diskrétní a $\hat{x}_\phi$ má spojitou statistiku, pak v případě $A \to \infty$ nevadí, jelikož statistika veličiny $\hat{\Delta}/\sqrt{2}A$ může být v takovém případě považována za téměř spojitou vzhledem k tomu, že krok této veličiny, $1/2\sqrt{A}$, jde v případě $A \to \infty$ k nule.

Právě jsme tedy dokázali, že skutečně platí avizovaná souvislost $P_n^m$ s $P(x, \phi)$. Obraťme nyní naší pozornost k procesu rekonstrukce kvantového stavu světla.

[6] Člen $\langle\hat{\Delta}^n\rangle$ je "obložený" vstupními stavy, člen $(-1)^n\langle(\hat{a}_1^\dagger\alpha + \hat{a}_1\alpha^*)^n\rangle$ již pouze signálním stavem.

# Kapitola 2

# Kvantová tomografie

V této kapitole bychom rádi představili principy optické homodynní tomografie, což je metoda, jenž nám umožňuje přejít od naměřených histogramů pro obecné kvadratury až k matici hustoty signálního stavu $\hat{\rho}$. Pravděpodobně první návrh využití BHD k rekonstrukci Wignerovy kvazidistribuce[1], potažmo matice hustoty $\hat{\rho}$, se objevil v roce 1989 (*Vogel* a *Risken* [17]). První experimentální provedení kvantové tomografie se poté datuje do roku 1993 [16]. Kvantová tomografie získala svůj název díky blízké podobnosti s tomografií v medicíně[2]. Obě metody jsou totiž založeny na podobných principech, kdy z nějakého řezu, rekonstruují tvar a charakteristiky zkoumaného objektu. Používají přitom i stejný matematický aparát. Možná stojí za zmínku, že v době expermentální rekonstrukce Wignerovy kvazidistribuce, byla tomografie v medicíně již po dlouhá léta nepostradatelnou diagnostickou metodou.

## 2.1 Wignerova kvazidistribuce

V roce 1932 zavedl Wigner kvantovou kvazidistribuci ve fázovém prostoru [8], která měla mnoho společného s klasickou pravděpodobnostní distribucí ve fázovém prostoru. Má následující tvar

$$W(x,p) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \langle x - \frac{1}{2}q|\hat{\rho}|x + \frac{1}{2}q\rangle\, e^{iqp}\,\mathrm{d}q \tag{2.1}$$

kde $\hat{\rho}$ je matice hustoty nějakého obecného stavu a $|x + \frac{1}{2}q\rangle$, $|x - \frac{1}{2}q\rangle$ jsou vlastní stavy kvadratury $\hat{x}$ s vlastními hodnotami $x \pm q/2$. Tato kvazidistribuce není a ani nemůže být přímo měřitelná, protože nemůžeme současně provést měření $x$ a $p$ a určit hodnotu $W(x,p)$, ale existuje nepřímý způsob, jak se k Wignerově kvazidistribuci měřením dostat.

[1] Wignerova kvazidistribuce není jedinou kvazidistribucí v kvantové optice. Existuje například Q-funkce, která vznikne konvolucí Wignerovy kvazidistribuce a Gaussovy distribuce nebo P-funkce, která umožňuje diagonalizaci $\hat{\rho}$ v reprezentaci koherentních stavů. V dalším se však budeme zabývat pouze Wignerovou kvazidistribucí.

[2] Název je z latinského *tome*, což v překladu znamená *řez*.

Podívejme se nyní na nějaké vlastnosti vztahu 2.1. Především můžeme snadno dokázat, že integrací přes $x$ nebo $p$ dostáváme marginální distribuce $P(x, \pi/2)$ a $P(x, 0)$. S využitím vztahu pro $\delta$-funkci $2\pi\delta(q) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iqp}\, dp$ dostáváme

$$\int_{-\infty}^{\infty} W(x,p)\,\mathrm{d}p \;=\; \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \langle x - \frac{1}{2}q|\hat{\rho}|x + \frac{1}{2}q\rangle\, e^{iqp}\,\mathrm{d}q\,\mathrm{d}p = \langle x|\hat{\rho}|x\rangle, \tag{2.2}$$

kde $\langle x|\hat{\rho}|x\rangle$ je hustota pravděpodobnosti nalezení systému na pozici $x$. Podobně integrací přes $x$ dostáváme pomocí vložení jednotkových operátorů

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} W(x,p)\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{R}^4} \langle x - \frac{1}{2}q|p'\rangle\langle p'|\hat{\rho}|p''\rangle\langle p''|x + \frac{1}{2}q\rangle e^{iqp}\,\mathrm{d}q\,\mathrm{d}p'\,\mathrm{d}p''\,\mathrm{d}x \qquad (2.3)\\
&= \frac{1}{4\pi^2}\int_{\mathbf{R}^4} e^{i(x-\frac{1}{2}q)p'}\langle p'|\hat{\rho}|p''\rangle e^{-i(x+\frac{1}{2}q)p''} e^{iqp}\,\mathrm{d}q\,\mathrm{d}p'\,\mathrm{d}p''\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{4\pi^2}\int_{\mathbf{R}^4} e^{ix(p'-p'')} e^{-\frac{i}{2}qp'} e^{-\frac{i}{2}qp''} e^{iqp}\langle p'|\hat{\rho}|p''\rangle\,\mathrm{d}q\,\mathrm{d}p'\,\mathrm{d}p''\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{R}^3} \delta(p'-p'') e^{-\frac{i}{2}qp'} e^{-\frac{i}{2}qp''} e^{iqp}\langle p'|\hat{\rho}|p''\rangle\,\mathrm{d}q\,\mathrm{d}p'\,\mathrm{d}p''\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{R}^2} e^{iq(p-p')}\langle p'|\hat{\rho}|p'\rangle\,\mathrm{d}q\,\mathrm{d}p' = \langle p|\hat{\rho}|p\rangle,
\end{aligned}$$

což je právě hustota pravděpodobnosti $P(x, \pi/2)$. Integrací přes $p$ nebo $x$ tedy dostáváme marginální pravděpodobnosti

$$\int_{-\infty}^{\infty} W(x,p)\,\mathrm{d}x = P(x,\pi/2), \qquad \int_{-\infty}^{\infty} W(x,p)\,\mathrm{d}p = P(x,0). \tag{2.4}$$

Zároveň můžeme ihned vidět, že je Wignerova kvazidistribuce normovaná

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} W(x,p)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}p = 1, \tag{2.5}$$

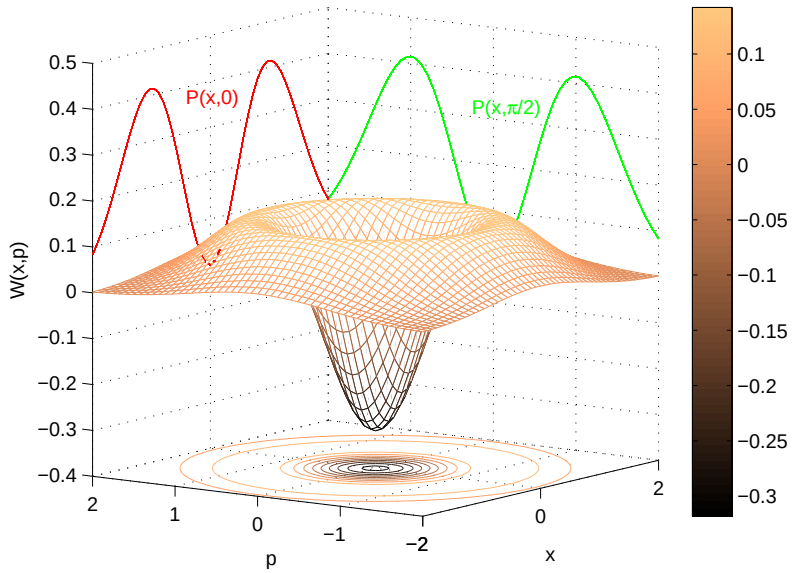
což plyne z toho, že je matice hustoty $\hat{\rho}$ normovaná

$$\int_{-\infty}^{\infty} \langle x|\hat{\rho}|x\rangle\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \langle p|\hat{\rho}|p\rangle\,\mathrm{d}p = \mathrm{tr}\,\{\hat{\rho}\} = 1. \tag{2.6}$$

Zatím se tudíž zdá, že má $W(x,p)$ všechny vlastnosti klasické distribuce, ovšem není tomu tak. $W(x,p)$ totiž nemusí být všude kladná. Za příkladem nemusíme chodit daleko. Stačí, když vezmeme první excitovaný Fockův stav, jehož matice hustoty je tvaru $\hat{\rho} = |1\rangle\langle 1|$. Dosazením do vztahu (2.1) dostáváme

$$W_{|1\rangle\langle 1|}(x,p) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \langle x - \frac{1}{2}q|1\rangle\langle 1|x + \frac{1}{2}q\rangle\, e^{iqp}\,\mathrm{d}q. \tag{2.7}$$

Normovaný vakuový stav je tvaru $\langle x|0\rangle = \pi^{-1/4}\exp(-x^2/2)$. Dále platí




Obrázek 2.1: Wignerova kvazidistribuce pro první excitovaný Fockův stav $|1\rangle\langle 1|$ spolu s marginálními distribucemi, které jsou v tomto případě identické.

$$\langle x|1\rangle = \langle x|\hat{a}^\dagger|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x - \frac{\partial}{\partial x}\right)\pi^{-\frac{1}{4}}e^{-\frac{x^2}{2}} = \sqrt{2}\pi^{-\frac{1}{4}}xe^{-\frac{x^2}{2}}. \tag{2.8}$$

Proto můžeme psát

$$\begin{aligned} W_{|1\rangle\langle 1|}(x,p) &= \pi^{-\frac{3}{2}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(x - \frac{1}{2}q\right)e^{-\frac{\left(x-\frac{1}{2}q\right)^2}{2}}\left(x + \frac{1}{2}q\right)e^{-\frac{\left(x+\frac{1}{2}q\right)^2}{2}}e^{iqp}\,\mathrm{d}q \\ &= \frac{1}{\pi}e^{-(x^2+p^2)}\left(2x^2+2p^2-1\right). \end{aligned} \tag{2.9}$$

Marginální distribuce $P(x,\pi/2)$ a $P(x,0)$ vychází následovně:

$$P(x,\pi/2) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\pi}e^{-(x^2+p^2)}\left(2x^2+2p^2-1\right)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\,p^2e^{-p^2}, \tag{2.10}$$

$$P(x,0) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\pi}e^{-(x^2+p^2)}\left(2x^2+2p^2-1\right)\,\mathrm{d}p = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\,x^2e^{-x^2}. \tag{2.11}$$

Průběh funkce (2.9) můžete vidět na obr. 2.1 spolu s marginálními distribucemi $P(x,0)$ a $P(x,\pi/2)$. $W_{|1\rangle\langle 1|}(x,p)$ je skutečně záporná kolem počátku, takže nemůže být reálnou distribucí, přesto marginální distribuce $P(x,0)$ a $P(x,\pi/2)$ jsou všude kladné. To, že Wignerova kvazidistribuce může, na rozdíl od klasické distribuce, být i záporná, by se dalo obrazně chápat tak, že ne všechny kvantové stavy mají svou klasickou analogii.

## 2.2 Souvislost marginální distribuce $P(x,\phi)$ s $W(x,p)$

Už jsme viděli, jak můžeme obdržet marginální distribuce $P(x,0)$ a $P(x,\pi/2)$ z $W(x,p)$. My bychom ovšem potřebovali vztah, který by dával do souvislosti histogram $P(x,\phi)$ s $W(x,p)$ pro obecnou fázi LO. Uvažujme následující příklad. Mějme koherentní stav reprezentovaný $W(x,p)$ ve fázovém prostoru. Co je koherentní stav? Jednou z definujících vlastností koherentního stavu je Glauberova podmínka $\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$ nebo ekvivalentně $\langle\alpha|\hat{a}^\dagger = \langle\alpha|\alpha^*$ (podrobnou diskuzi můžete nalézt v [10]), kde $\alpha$ je komplexní číslo. V souřadnicové reprezentaci potom můžeme psát

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(x+\frac{\partial}{\partial x}\right)\langle x|\alpha\rangle = \alpha\langle x|\alpha\rangle \rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x+\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi_\alpha(x) = \alpha\,\psi_\alpha(x). \tag{2.12}$$

Vyřešením této jednoduché diferenciální rovnice separací proměnných dospíváme k výrazu pro souřadnicovou reprezentaci koherentního stavu ve tvaru

$$\psi_\alpha(x) = Ce^{-x^2/2+\sqrt{2}\alpha x} = C'e^{-\frac{1}{2}(x-\sqrt{2}\alpha)^2}. \tag{2.13}$$

Nyní musíme normovat

$$\begin{aligned} 1 &= |C'|^2\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(x-\sqrt{2}\alpha)^2}e^{-\frac{1}{2}(x-\sqrt{2}\alpha^*)^2}\,\mathrm{d}x \qquad (2.14)\\ &= |C'|^2 e^{|\alpha|^2}e^{-\frac{\alpha^2+\alpha^{*2}}{2}}\overbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(x-\left(\frac{\alpha+\alpha^*}{\sqrt{2}}\right)\right)^2}\,\mathrm{d}x}^{\sqrt{\pi}}. \end{aligned}$$

Tedy normovací konstanta vychází

$$C' = \pi^{-\frac{1}{4}}e^{\frac{1}{4}(\alpha-\alpha^*)^2}. \tag{2.15}$$

Nakonec tedy dostáváme

$$\psi_\alpha(x) = \pi^{-\frac{1}{4}}e^{\frac{1}{4}(\alpha-\alpha^*)^2}e^{-\frac{1}{2}(x-\sqrt{2}\alpha)^2}. \tag{2.16}$$

Vyjádřeme nyní střední hodnoty $\langle\alpha|\hat{x}|\alpha\rangle$ a $\langle\alpha|\hat{p}|\alpha\rangle$ (stav $|\alpha\rangle$ je normovaný):

$$\langle\alpha|\hat{x}|\alpha\rangle = \left\langle\alpha\left|\frac{\hat{a}^\dagger+\hat{a}}{\sqrt{2}}\right|\alpha\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\alpha\overbrace{\langle\alpha|\alpha\rangle}^{1}+\alpha^*\overbrace{\langle\alpha|\alpha\rangle}^{1}\right) = \sqrt{2}\,\Re(\alpha), \tag{2.17}$$

$$\langle\alpha|\hat{p}|\alpha\rangle = \left\langle\alpha\left|\frac{i(\hat{a}^\dagger-\hat{a})}{\sqrt{2}}\right|\alpha\right\rangle = \frac{i}{\sqrt{2}}\left(\alpha^*\overbrace{\langle\alpha|\alpha\rangle}^{1}-\alpha\overbrace{\langle\alpha|\alpha\rangle}^{1}\right) = \sqrt{2}\,\Im(\alpha). \tag{2.18}$$

Z výše uvedených rovnic plyne následující

$$\alpha = \frac{\langle\hat{x}\rangle}{\sqrt{2}} + i\frac{\langle\hat{p}\rangle}{\sqrt{2}}. \tag{2.19}$$

Nyní (2.16) můžeme psát také takto

$$\psi_\alpha(x) = \pi^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{1}{2}\langle\hat{p}\rangle^2} e^{-\frac{1}{2}(x-\langle\hat{x}\rangle - i\langle\hat{p}\rangle)^2}. \tag{2.20}$$

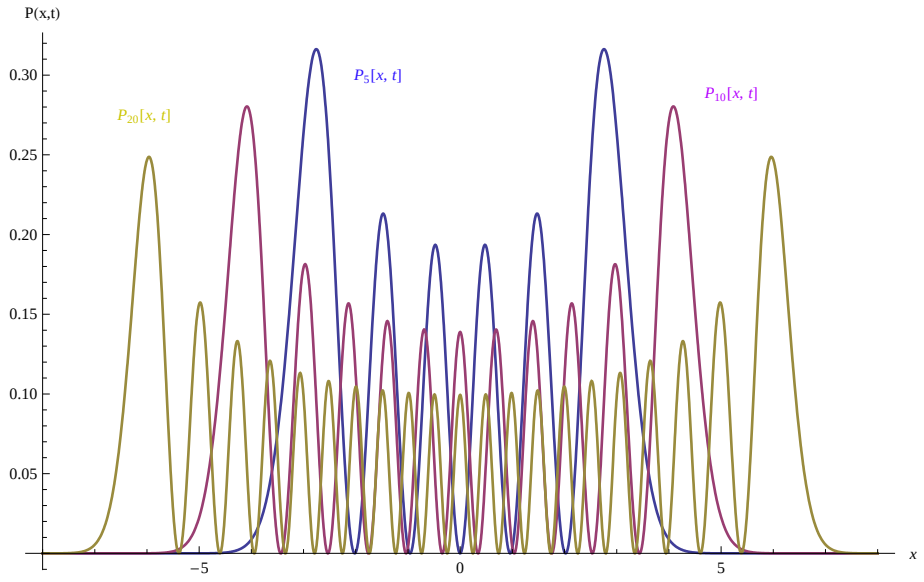
Použijeme-li vztahu (2.1), dosadíme koherentní stav $\hat{\rho} = |\alpha\rangle\langle\alpha|$ a použijeme výše uvedené souřadnicové reprezentace $\psi_\alpha(x)$, dostáváme

$$\begin{aligned} W(x,p) &= \frac{\pi^{-\frac{3}{2}}}{2} e^{-\langle\hat{p}\rangle^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\left[x-\frac{1}{2}q-\langle\hat{x}\rangle - i\langle\hat{p}\rangle\right]^2} e^{-\frac{1}{2}\left[x+\frac{1}{2}q-\langle\hat{x}\rangle + i\langle\hat{p}\rangle\right]^2} e^{iqp}\,\mathrm{d}q \\ &= \frac{\pi^{-\frac{3}{2}}}{2} e^{-\langle\hat{p}\rangle^2} e^{-(x-\langle\hat{x}\rangle)^2} e^{\langle\hat{p}\rangle^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{q^2}{4} - qi\langle\hat{p}\rangle} e^{iqp}\,\mathrm{d}q \\ &= \frac{1}{\pi} e^{-(x-\langle\hat{x}\rangle)^2} e^{-(p-\langle\hat{p}\rangle)^2}. \end{aligned} \tag{2.21}$$

Výsledek, který jsme právě obdrželi, zvýrazňuje důležitou vlastnost koherentních stavů a to totiž, že na rozdíl od Fockových stavů odrážejí klasické chování harmonického oscilátoru, jak se za chvíli přesvědčíme. Normální řešení Schrödingerovy rovnice pro harmonický oscilátor dává stacionární vlnové funkce tohoto tvaru

$$u_n(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}} e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x) e^{-iE_n t}. \tag{2.22}$$

Několik hustot pravděpodobností pro tyto vlnové funkce můžete vidět na obr. 2.2. Co nám




Obrázek 2.2: Hustota pravděpodobnosti pro 5., 10. a 20. Fockův stav.

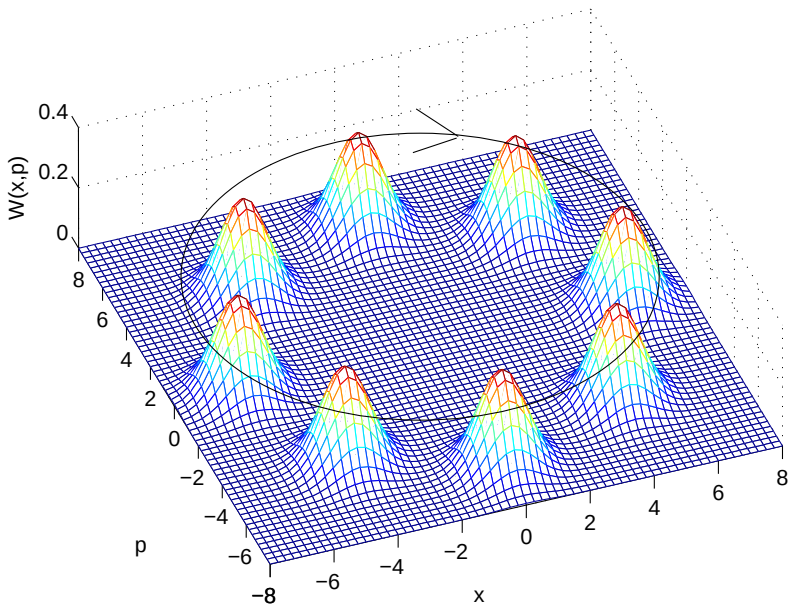
tento obrázek říká? Jestliže provedete mnoho měření v daném okamžiku $t$ na kvantovém

harmonickém oscilátoru v 5., 10. a 20. excitovaném stavu, dostanete pravděpodobnostní distribuce, které vůbec neodpovídají stejnému měření na klasickém harmonickém oscilátoru, kdy dostanete distribuci s ostrým maximem kolem bodu, kde se harmonický oscilátor v čase $t$ právě nachází. Se zvyšováním energie kvantového harmonického oscilátoru navíc nezmizí oscilační charakter pravděpodobnostní distribuce, ačkoli je pravda, že pravděpodobnostní distribuce má největší maxima v bodech obratu.

Koherentní stav však vykazuje chování, které je velice blízké chování klasického oscilátoru. Jestliže komplexní číslo $\alpha$ charakterizující koherentní stav zapíšeme ve tvaru $|A|e^{-i\omega t}$, kde $|A|$ je amplituda a $\omega$ úhlová frekvence harmonického oscilátoru, pak díky (2.17), (2.18) platí $\langle\hat{x}\rangle = \sqrt{2}|A|\cos(\omega t)$ a $\langle\hat{p}\rangle = -\sqrt{2}|A|\sin(\omega t)$. Vztah (2.21) pak nabude tvaru

$$W(x,p) = \frac{1}{\pi} e^{-(x-\sqrt{2}|A|\cos(\omega t))^2} e^{-(p+\sqrt{2}|A|\sin(\omega t))^2}. \tag{2.23}$$

Z toho je vidět, že Wignerova kvazidistribuce je dvourozměrná Gaussova funkce centrovaná kolem bodu $(x_0, p_0) = (\sqrt{2}|A|\cos(\omega t), -\sqrt{2}|A|\sin(\omega t))$ ve fázovém prostoru. Tento bod se pohybuje po kružnici o poloměru $\sqrt{2}|A|$ s úhlovou frekvencí $\omega$. To je ale naprosto stejné, jako chování klasického oscilátoru ve fázovém prostoru, až na to, že v kvantovém případě nemůže být harmonický oscilátor přesně v bodě $(x_0, p_0)$, ale je okolo tohoto bodu 'rozmazán' relacemi neurčitosti, což se projeví jako dvourozměrná Gaussova funkce kolem bodu $(x_0, p_0)$. Vše můžete vidět na obr. 2.3. Marginální distribuce $P(x, 0)$ a $P(x, \pi/2)$



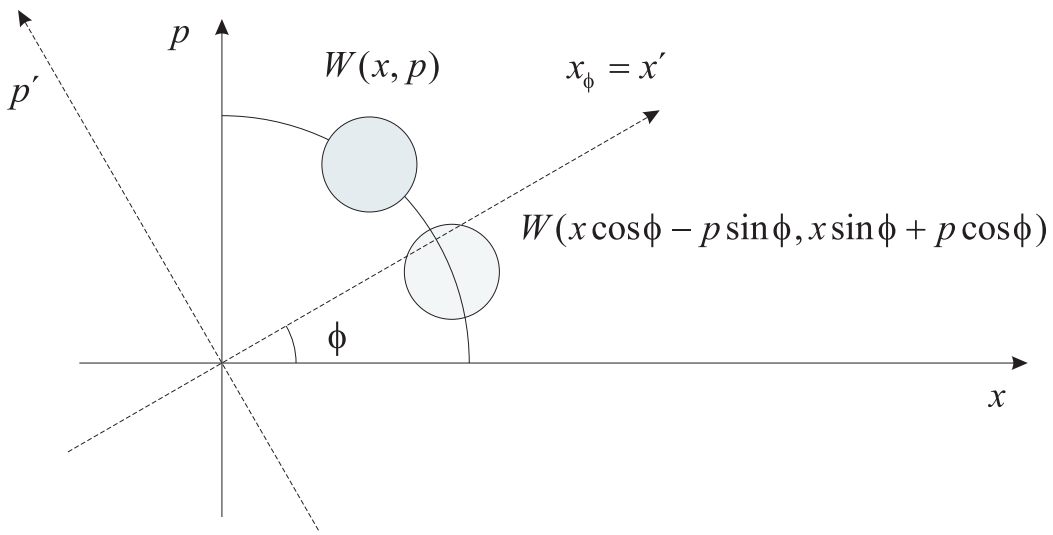

Obrázek 2.3: Časové momentky Wignerovy kvazidistribuce ve fázovém prostoru pro koherentní stav reprezentující harmonický oscilátor s amplitudou $\sqrt{2}|A| = 6$.

můžeme zjistit jako obvykle a dostaneme:

$$P(x,0) = \int_{-\infty}^{\infty} W(x,p)\,\mathrm{d}p = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-(x-\sqrt{2}|A|\cos(\omega t))^2}, \tag{2.24}$$

$$P(x,\pi/2) = \int_{-\infty}^{\infty} W(x,p)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-(p+\sqrt{2}|A|\sin(\omega t))^2}. \tag{2.25}$$

Proč toto všechno děláme? Vzpomeňte si, že naším cílem je najít vztah dávající do souvislosti $P(x,\phi)$ s $W(x,p)$. Jestliže chceme provést měření $P(x,\phi)$ pro obecnou kvadraturu $x_\phi$ na koherentním stavu, můžeme postupovat následovně. Zvolme pozici koherentního stavu popsaného $W(x,p)$ ve fázovém prostoru tak, jak je znázorněno na obr. 2.4. Marginální distribuce $P(x,0)$ a $P(x,\pi/2)$ bychom pro stav popsaný $W(x,p)$ získali jako




Obrázek 2.4: Marginální distribuci $P(x,\phi)$ můžeme získat zrotováním $W(x,p)$ o úhel $\phi$ po směru hodinových ručiček a následnou integrací přes $p$.

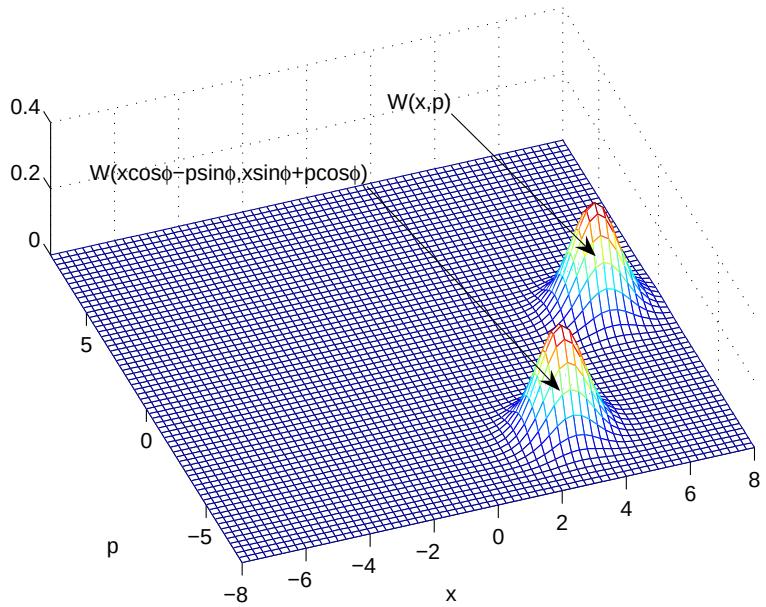
obvykle. Nyní si zvolme natočené souřadnice $x'$ a $p'$ tak, aby osa $x'$ byla rovnoběžná s osou $x_\phi$, a položme si otázku, jak v tomto případě určit marginální distribuci $P(x,\phi)$ z $W(x,p)$. Pro tuto situaci nemáme žádný matematický předpis vedoucí k cíli. Pozornému oku však jistě neunikne skutečnost, že rotací $W(x,p)$ v prostoru po směru hodinových ručiček můžeme docílit toho, že pozice $W(x,p)$ v pootočených souřadnicích a pozice zrotované $W(x\cos\phi - p\sin\phi, x\sin\phi + p\cos\phi)$ v původních souřadnicích jsou identické. O tom, že Wignerovu kvazidistribuci rotujeme správným směrem, se můžeme přesvědčit na našem příkladu. Jestliže vezmeme původní nezrotovanou Wignerovu distribuci (2.23) v čase $t = 0$ a novou zrotovanou Wignerovu distribuci danou následujícím vztahem (také v $t = 0$)

$$W(x\cos\phi - p\sin\phi, x\sin\phi + p\cos\phi) = \frac{1}{\pi} e^{-(x\cos\phi - p\sin\phi - \sqrt{2}|A|)^2} e^{-(x\sin\phi + p\cos\phi)^2}, \tag{2.26}$$

pak po několika dalších úpravách docházíme k rovnici

$$W(x\cos\phi - p\sin\phi, x\sin\phi + p\cos\phi) = \frac{1}{\pi} e^{-(x-\sqrt{2}|A|\cos\phi)^2} e^{-(p+\sqrt{2}|A|\sin\phi)^2}. \tag{2.27}$$

Z poslední rovnice je již jasně patrné, jakým směrem rotovala $W(x,p)$. Vše můžete vidět na obr. 2.5.




Obrázek 2.5: Nezrotovaná $W(x,p)$ a zrotovaná $W(x\cos\phi - p\sin\phi, x\sin\phi + p\cos\phi)$ pro úhel $\phi = \pi/3$ a amplitudu $\sqrt{2}|A| = 6$.

Je tudíž jasné, že celou situaci je možné vyřešit tím, že budeme integrovat přes $p$ zrotovanou Wignerovu kvazidistribuci $W(x\cos\phi - p\sin\phi, x\sin\phi + p\cos\phi)$ v původních souřadnicích. Čili platí

$$P(x,\phi) = \int_{-\infty}^{\infty} W(x\cos\phi - p\sin\phi, x\sin\phi + p\cos\phi)\,\mathrm{d}p. \tag{2.28}$$

Právě odvozená rovnice je platná nejen pro náš konkrétní ilustrativní příklad. Platí obecně. Situaci si vždy můžeme představit takovým způsobem, že zrotujeme $W(x,p)$ právě o takový úhel, který odpovídá úhlu $\phi$ obecné kvadratury, a tím docílíme analogické situace v původním nezrotovaném fázovém prostoru. O správnosti výsledku se můžeme přesvědčit na dvou speciálních případech, které již dobře známe. Pro úhel $\phi = 0$ okamžitě dostáváme

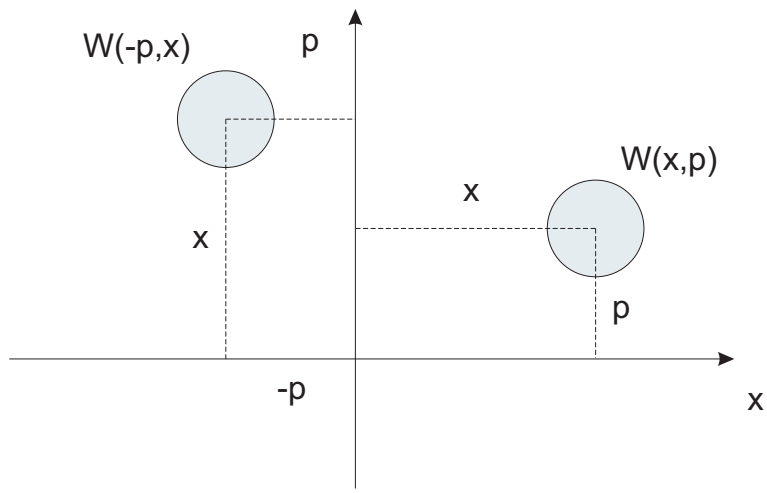
$$P(x,0) = \int_{-\infty}^{\infty} W(x,p)\,\mathrm{d}p. \tag{2.29}$$

O něco obtížnější je situace pro úhel $\phi = \pi/2$. Po dosazení totiž obdržíme

$$P(x, \pi/2) = \int_{-\infty}^{\infty} W(-p, x)\,\mathrm{d}p. \tag{2.30}$$

Jestliže se však podíváme na obr. 2.6, tak ihned vidíme, že skutečně platí

$$P(x, \pi/2) = \int_{-\infty}^{\infty} W(-p, x)\,\mathrm{d}p = \int_{-\infty}^{\infty} W(x, p)\,\mathrm{d}x. \tag{2.31}$$




Obrázek 2.6: Integrály $\int_{-\infty}^{\infty} W(-p, x)\,\mathrm{d}p$ a $\int_{-\infty}^{\infty} W(x, p)\,\mathrm{d}x$ jsou totožné.

## 2.3 Souvislost $W(x,p)$ s maticí hustoty stavu $\hat{\rho}$

Vztah (2.28) je nazýván *Radonova trasformace*. My budeme potřebovat vztah inverzní, jelikož marginální distribuce $P(x, \phi)$ jsou výstupy měření a my tato měření použijeme k rekonstrukci Wignerovy kvazidistribuce. Toto ovšem bude téma následující sekce, protože ještě předtím je nutné vysvětlit, odkud se vzal vztah (2.1), který dává do souvislosti Wignerovu kvazidistribuci a matici hustoty signálního stavu, což je cíl našeho snažení.

Ačkoli to z předchozího postupu není zřejmé, vztah (2.28) lze chápat jako definující vztah Wignerovy kvazidistribuce (Bertrand a Bertrand [11]) a je přímým důsledkem vlastností, které musí $W(x,p)$ splňovat, jestliže má být považována za kvantovou distribuci. Musí pro ni platit:

- vztahy (2.4)
- při fázovém posuvu o úhel $\phi$ dojde k rotaci komponent $x$ a $p$ ve $W(x,p)$ ve fázovém prostoru a současně dojde k rotaci marginálních pravděpodobností [9].

Toto vede ke vztahu (2.28), který jsme odvodili na konkrétním příkladu. Je dobré si uvědomit, že stejně jako můžeme psát $P(x,0) = \langle x|\hat{\rho}|x\rangle$ nebo $P(x,\pi/2) = \langle p|\hat{\rho}|p\rangle$, můžeme pro obecnou distribuci psát

$$P(x,\phi) = \langle x|\hat{R}(\phi)\hat{\rho}\hat{R}^{\dagger}(\phi)|x\rangle, \tag{2.32}$$

kde $\hat{R}(\phi)$ je unitární rotace o úhel $\phi$ tvaru

$$\hat{R}(\phi) = e^{-i\phi\hat{n}}, \tag{2.33}$$

kde $\hat{n} = \hat{a}^{\dagger}\hat{a}$ je operátor počtu fotonů.

Zkusme nyní odvodit vztah (2.1) (odvození vesměs vychází z [9]). Zaveďme Fourierův obraz $W'(u,v)$ takto

$$W'(u,v) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} W(x,p)e^{-iux}e^{-ivp}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}p \tag{2.34}$$

a $P'(x',\phi)$ následovně

$$P'(x',\phi) = \int_{-\infty}^{\infty} P(x,\phi)e^{-ix'x}\,\mathrm{d}x. \tag{2.35}$$

Jestliže dosadíme za $P(x,\phi)$ ze vzahu (2.28), obdržíme

$$P'(x',\phi) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} W(x\cos\phi - p\sin\phi, x\sin\phi + p\cos\phi)e^{-ix'x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}p. \tag{2.36}$$

Nyní v integrálu provedeme substituci

$$X = x\cos\phi - p\sin\phi, \qquad P = x\sin\phi + p\cos\phi \tag{2.37}$$

a dospíváme k

$$P'(x',\phi) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} W(X,P)e^{-i(x'\cos\phi)X}e^{-i(x'\sin\phi)P}\,\mathrm{d}X\,\mathrm{d}P. \tag{2.38}$$

Srovnáním tohoto výrazu se vztahem (2.34) docházíme k následující identitě

$$P'(x',\phi) = W'(x'\cos\phi, x'\sin\phi). \tag{2.39}$$

To, co jsme nyní obdrželi, je velice zajímavá rovnice. Podívejme se na následující příklad, abychom ji lépe pochopili. Když se snažíme zjistit střední hodnotu nějaké veličiny $x$, provádíme to vždy tak, že středujeme $x$ s vahou danou pravděpodobnostním rozdělením veličiny $x$. Pokud je $x$ diskrétní veličinou, pak sčítáme přes všechny možné události $x$ vynásobené jejich pravděpodobností $P(x)$ a obdržíme $\langle x\rangle$. V případě spojitého $x$ pak platí

$$\langle x\rangle = \int x\cdot P(x)\,\mathrm{d}x. \tag{2.40}$$

Můžeme také zjistit střední hodnotu $\langle f(x)\rangle$ a to tímto způsobem

$$\langle f(x)\rangle = \int f(x)\cdot P(x)\,\mathrm{d}x. \tag{2.41}$$

Například můžeme kromě již dříve spočítané střední hodnoty $\langle\alpha|\hat{x}|\alpha\rangle$ spočítat také $\langle\alpha|\hat{x}^2|\alpha\rangle$ a tím zjistit střední hodnotu z $f(\hat{x}) = \hat{x}^2$. Takovému výrazu se říká druhý moment. Obecně jestliže zjišťujeme střední hodnotu z $f(\hat{x}) = \hat{x}^m$, tak počítáme $m$-tý moment.

Toto byly velice známé příklady. Můžeme však spočítat střední hodnotu třeba i z $f(x) = \exp(-ix'x)$

$$C(x') = \langle e^{-ix'x}\rangle = \int e^{-ix'x}P(x)\,\mathrm{d}x. \tag{2.42}$$

Funkce $C(x')$ je nazývána *charakteristickou funkcí* (bližší informace viz. [12]). Jestliže výše uvedenou rovnici srovnáme s (2.35), zjistíme, že $P'(x',\phi)$ je charakteristickou funkcí. Dále musí být díky platnosti vztahu (2.39) také $W'(x'\cos\phi, x'\sin\phi)$ charakteristickou funkcí. Zároveň je $P'(x',\phi)$ Fourierovým obrazem $P(x,\phi)$. Vztah (2.39) můžeme tedy nakonec formulovat takto. Fourierův obraz pravděpodobnostní distribuce $P(x,\phi)$ se rovná charakteristické funkci $W'(x'\cos\phi, x'\sin\phi)$ v polárních souřadnicích.

Dále můžeme zkombinovat rovnici (2.32) s rovnicí (2.35) a dostaneme

$$P'(x',\phi) = \int_{-\infty}^{\infty} P(x,\phi)e^{-ix'x}\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty}\langle x|\hat{R}(\phi)\hat{\rho}\hat{R}^\dagger(\phi)|x\rangle e^{-ix'x}\,\mathrm{d}x. \tag{2.43}$$

Jestliže si uvědomíme, že $f(\hat{x})|x\rangle = f(x)|x\rangle$, pak můžeme psát

$$P'(x',\phi) = \int_{-\infty}^{\infty}\langle x|\hat{R}(\phi)\hat{\rho}\hat{R}^\dagger(\phi)e^{-ix'\hat{x}}|x\rangle\,\mathrm{d}x = \mathrm{tr}\left\{\hat{R}(\phi)\hat{\rho}\hat{R}^\dagger(\phi)e^{-ix'\hat{x}}\right\}. \tag{2.44}$$

Matice ve stopě bychom nyní potřebovali vhodně přeuspořádat. Předně platí

$$\mathrm{tr}\,\{A_1A_2\ldots A_n\} = \mathrm{tr}\,\{A_2\ldots A_nA_1\} = \mathrm{tr}\,\{A_3\ldots A_nA_1A_2\} = \ldots \tag{2.45}$$

čili při cyklické permutaci matic je stopa invariantní. Proto můžeme psát

$$\begin{aligned} P'(x',\phi) &= \mathrm{tr}\left\{\hat{R}(\phi)\hat{\rho}\hat{R}^\dagger(\phi)e^{-ix'\hat{x}}\right\} = \mathrm{tr}\left\{\hat{\rho}\hat{R}^\dagger(\phi)e^{-ix'\hat{x}}\hat{R}(\phi)\right\} \\ &= \mathrm{tr}\left\{\hat{\rho}e^{i\phi\hat{n}}e^{-ix'\hat{x}}e^{-i\phi\hat{n}}\right\}. \end{aligned} \tag{2.46}$$

Snadno se můžeme přesvědčit, že platí následující vztah

$$\begin{aligned} \left[\exp(s\hat{A})\hat{B}\exp(-s\hat{A})\right]^n &= \exp(s\hat{A})\hat{B}\overbrace{\exp(-s\hat{A})\exp(s\hat{A})}^{1}\hat{B}\exp(-s\hat{A}) \\ &\quad \ldots\exp(s\hat{A})\hat{B}\exp(-s\hat{A})\exp(s\hat{A})\hat{B}\exp(-s\hat{A}) \\ &= \exp(s\hat{A})\hat{B}^n\exp(-s\hat{A}), \end{aligned} \tag{2.47}$$

z čehož plyne, že jakákoli operátorová funkce $f(\hat{B})$, která může být vyjádřena ve tvaru mocninné řady, splňuje tuto identitu

$$\exp(s\hat{A})f(\hat{B})\exp(-s\hat{A}) = f\left(\exp(s\hat{A})\hat{B}\exp(-s\hat{A})\right). \tag{2.48}$$

Tudíž dále platí

$$P'(x',\phi) \;=\; \mathrm{tr}\left\{\hat{\rho}e^{i\phi\hat{n}}e^{-ix'\hat{x}}e^{-i\phi\hat{n}}\right\} = \mathrm{tr}\left\{\hat{\rho}\exp\left(-ix'e^{i\phi\hat{n}}\hat{x}e^{-i\phi\hat{n}}\right)\right\}. \tag{2.49}$$

Nyní jde o to, jakým způsobem upravit $e^{i\phi\hat{n}}\hat{x}e^{-i\phi\hat{n}}$. Zavedením následující funkce

$$\hat{f}(s) = \exp(s\hat{A})\hat{B}\exp(-s\hat{A}) \tag{2.50}$$

a jejím rozvojem kolem bodu $s = 0$, můžeme dospět k

$$\hat{f}(s) = \hat{f}(0) + \hat{f}'(0)s + \hat{f}''(0)\frac{s^2}{2!} + \dots. \tag{2.51}$$

První derivace je tohoto tvaru

$$\frac{d\hat{f}(s)}{ds} = \exp(s\hat{A})(\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A})\exp(-s\hat{A}) \to \hat{f}'(0) = \left[\hat{A},\hat{B}\right]. \tag{2.52}$$

Druhá pak vychází následovně

$$\frac{d^2\hat{f}(s)}{ds^2} = \exp(s\hat{A})\left(\hat{A}\left[\hat{A},\hat{B}\right] - \left[\hat{A},\hat{B}\right]\hat{A}\right)\exp(-s\hat{A}) \to \hat{f}''(0) = \left[\hat{A},\left[\hat{A},\hat{B}\right]\right]. \tag{2.53}$$

Stejným způsobem bychom získali všechny derivace vyššího řádu. Nakonec tudíž můžeme psát

$$\exp(s\hat{A})\hat{B}\exp(-s\hat{A}) = \hat{B} + \left[\hat{A},\hat{B}\right]s + \left[\hat{A},\left[\hat{A},\hat{B}\right]\right]\frac{s^2}{2!} + \dots. \tag{2.54}$$

Nyní použijeme $\hat{x} = (\hat{a} + \hat{a}^\dagger)/\sqrt{2}$. Pro kreační a anihilační operátory použitím odvozených vztahů dostáváme:

$$\begin{aligned}\exp(i\phi\hat{a}^\dagger\hat{a})\hat{a}\exp(-i\phi\hat{a}^\dagger\hat{a}) &= \hat{a} + \overbrace{[\hat{a}^\dagger\hat{a},\hat{a}]}^{-\hat{a}}i\phi + \overbrace{[\hat{a}^\dagger\hat{a},[\hat{a}^\dagger\hat{a},\hat{a}]]}^{\hat{a}}\frac{(i\phi)^2}{2!} + \dots \\ &= \hat{a}\left(1 - i\phi - \frac{\phi^2}{2}\dots\right) = \hat{a}\exp(-i\phi),\end{aligned} \tag{2.55}$$

$$\begin{aligned}\exp(i\phi\hat{a}^\dagger\hat{a})\hat{a}^\dagger\exp(-i\phi\hat{a}^\dagger\hat{a}) &= \hat{a}^\dagger + \overbrace{[\hat{a}^\dagger\hat{a},\hat{a}^\dagger]}^{\hat{a}^\dagger}i\phi + \overbrace{[\hat{a}^\dagger\hat{a},[\hat{a}^\dagger\hat{a},\hat{a}^\dagger]]}^{\hat{a}^\dagger}\frac{(i\phi)^2}{2!} + \dots \\ &= \hat{a}^\dagger\left(1 + i\phi - \frac{\phi^2}{2}\dots\right) = \hat{a}^\dagger\exp(i\phi).\end{aligned} \tag{2.56}$$

Celkem tedy můžeme psát

$$\begin{aligned}\exp\left(i\phi\hat{a}^\dagger\hat{a}\right)\hat{x}\exp\left(-i\phi\hat{a}^\dagger\hat{a}\right) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\exp\left(i\phi\hat{a}^\dagger\hat{a}\right)\left(\hat{a}+\hat{a}^\dagger\right)\exp\left(-i\phi\hat{a}^\dagger\hat{a}\right)\right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{a}e^{-i\phi}+\hat{a}^\dagger e^{i\phi}\right).\end{aligned} \tag{2.57}$$

Srovnáním se vztahem (1.8) dospíváme k následujícímu závěru

$$\exp\left(i\phi\hat{a}^\dagger\hat{a}\right)\hat{x}\exp\left(-i\phi\hat{a}^\dagger\hat{a}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{a}e^{-i\phi}+\hat{a}^\dagger e^{i\phi}\right) = \hat{x}\cos\phi+\hat{p}\sin\phi, \tag{2.58}$$

takže nakonec obdržíme

$$P'(x',\phi) = \mathrm{tr}\left\{\hat{\rho}\exp\left(-ix'(\hat{x}\cos\phi+\hat{p}\sin\phi)\right)\right\} = W'(x'\cos\phi, x'\sin\phi), \tag{2.59}$$

což po přeznačení $u = x'\cos\phi$, $v = x'\sin\phi$ dává

$$W'(u,v) = \mathrm{tr}\left\{\hat{\rho}\exp\left(-i(\hat{x}u+\hat{p}v)\right\}\right. . \tag{2.60}$$

Toto je velice zajímavý výsledek, protože kromě tohoto výrazu platí pro $W'(u,v)$ také (2.34), který má podobnou strukturu, ale je v něm explicitně obsažena Wignerova kvazidistribuce $W(x,p)$. To jasně signalizuje, že $W(x,p)$ bude úzce souviset s maticí hustoty stavu $\hat{\rho}$. Abychom odvodili vztah (2.1), invertujeme výraz (2.34)

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{R}^2} W'(u,v)e^{iuX}e^{ivP}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v &= \int_{\mathbf{R}^4} W(x,p)e^{-iu(x-X)}e^{-iv(p-P)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}p\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \\ &= 4\pi^2\int_{\mathbf{R}^2} W(x,p)\delta(x-X)\delta(p-P)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}p \\ &= 4\pi^2 W(X,P).\end{aligned} \tag{2.61}$$

Nyní potřebujeme vyjádřit $W'(u,v)$. Vypočítejme proto stopu v rovnici (2.60)

$$W'(u,v) = \int_{-\infty}^{\infty}\langle x|\hat{\rho}\exp\left(-iu\hat{x}-iv\hat{p}\right)|x\rangle\,\mathrm{d}x. \tag{2.62}$$

V dalších úpravách budeme muset použít Campbell-Baker-Hausdorffovu formuli, která postuluje následující. Mějme dva operátory $\hat{A}$ a $\hat{B}$, které splňují podmínku

$$\left[\hat{A},\left[\hat{A},\hat{B}\right]\right] = \left[\hat{B},\left[\hat{A},\hat{B}\right]\right] = 0, \tag{2.63}$$

tedy $\hat{A}$, $\hat{B}$ komutují s komutátorem $\left[\hat{A},\hat{B}\right]$. Pak platí

$$\begin{aligned}\exp\left(s(\hat{A}+\hat{B})\right) &= \exp\left(s\hat{A}\right)\exp\left(s\hat{B}\right)\exp\left(-s^2\left[\hat{A},\hat{B}\right]/2\right) \\ &= \exp\left(s\hat{B}\right)\exp\left(s\hat{A}\right)\exp\left(s^2\left[\hat{A},\hat{B}\right]/2\right).\end{aligned} \tag{2.64}$$

Důkaz můžete nalézt v Dodatku A. My máme situaci, kdy $\hat{A} = u\hat{x}$ a $\hat{B} = v\hat{p}$ a $s = -i$. Proto dostáváme

$$\exp(-iu\hat{x} - iv\hat{p}) = \exp(-iu\hat{x})\exp(-iv\hat{p})\exp(iuv/2). \tag{2.65}$$

A po dosazení do (2.62) obdržíme

$$W'(u,v) = \int_{-\infty}^{\infty} \langle x|\hat{\rho}\exp(iuv/2)\exp(-iu\hat{x})\exp(-iv\hat{p})|x\rangle \,\mathrm{d}x. \tag{2.66}$$

Operátor $\exp(-iv\hat{p})$ působí na $|x\rangle$ takto[3] $\exp(-iv\hat{p})|x\rangle = |x+v\rangle$ a tedy musí platit

$$\begin{aligned} W'(u,v) &= \int_{-\infty}^{\infty} \langle x|\hat{\rho}\exp(iuv/2)\exp(-iu\hat{x})|x+v\rangle \,\mathrm{d}x \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \langle x|\hat{\rho}\exp(iuv/2)\exp(-iu(x+v))|x+v\rangle \,\mathrm{d}x \\ &= \exp(-iuv/2)\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-iux)\,\langle x|\hat{\rho}|x+v\rangle \,\mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{2.67}$$

Nyní provedeme substituci $X = x + v/2$ a nakonec přeznačíme $X$ zpátky na $x$ a dospíváme k

$$W'(u,v) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-iux)\left\langle x - \frac{v}{2}|\hat{\rho}|x + \frac{v}{2}\right\rangle \mathrm{d}x. \tag{2.68}$$

Tento výsledek dosadíme do vztahu (2.61) a obdržíme

$$\begin{aligned} W(x,p) &= \frac{1}{4\pi^2}\int_{\mathbf{R}^3} e^{-iu(x'-x)}e^{ivp}\left\langle x' - \frac{v}{2}|\hat{\rho}|x' + \frac{v}{2}\right\rangle \mathrm{d}x'\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{R}^2} \delta(x'-x)e^{ivp}\left\langle x' - \frac{v}{2}|\hat{\rho}|x' + \frac{v}{2}\right\rangle \mathrm{d}x'\,\mathrm{d}v \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ivp}\left\langle x - \frac{v}{2}|\hat{\rho}|x + \frac{v}{2}\right\rangle \mathrm{d}v. \end{aligned} \tag{2.69}$$

Dospěli jsme tedy ke vztahu (2.1). Tato rovnice je velice významná. Je to spojovací most mezi středními hodnotami veličin, které jsme schopni v kvantové mechanice měřit, a zakódovaním stavu ve fázovém prostoru. To ve svém důsledku vede až k možnosti rekonstrukce matice hustoty $\hat{\rho}$ signálního stavu.

Při měření však z marginálních distribucí rekonstruujeme Wignerovu kvazidistribuci a z ní bychom potřebovali získat matici hustoty $\hat{\rho}$. Potřebujeme tedy inverzní vztah. Provedením Fourierovy transformace můžeme jednoduše dospět ke vztahu

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} W(x,p)e^{-iv'p}\,\mathrm{d}p &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ip(v-v')}\left\langle x - \frac{v}{2}|\hat{\rho}|x + \frac{v}{2}\right\rangle \mathrm{d}v\,\mathrm{d}p \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(v-v')\left\langle x - \frac{v}{2}|\hat{\rho}|x + \frac{v}{2}\right\rangle \mathrm{d}v \\ &= \left\langle x - \frac{v'}{2}|\hat{\rho}|x + \frac{v'}{2}\right\rangle. \end{aligned} \tag{2.70}$$

[3] Podrobnější diskuze viz vztahy (3.12) až (3.22).

Mnohem výhodnější by však bylo, pokud bychom měli vztah mezi maticí hustoty a Wignerovou kvazidistribucí vyjádřený v libovolné bázi, protože právě odvozený vztah v konkrétní bázi nemusí být vždy nejlepší pro práci. Dokažme proto užitečný vztah. Prozkoumejme následující integrál

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{R}^4}\left\langle x-\frac{u}{2}\left|\hat{\rho}_1\right|x+\frac{u}{2}\right\rangle\left\langle x-\frac{v}{2}\left|\hat{\rho}_2\right|x+\frac{v}{2}\right\rangle e^{ip(u+v)}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}p \qquad (2.71)\\ &= \int_{\mathbf{R}^3}\delta(u+v)\left\langle x-\frac{u}{2}\left|\hat{\rho}_1\right|x+\frac{u}{2}\right\rangle\left\langle x-\frac{v}{2}\left|\hat{\rho}_2\right|x+\frac{v}{2}\right\rangle\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}x\\ &= \int_{\mathbf{R}^2}\left\langle x+\frac{v}{2}\left|\hat{\rho}_1\right|x-\frac{v}{2}\right\rangle\left\langle x-\frac{v}{2}\left|\hat{\rho}_2\right|x+\frac{v}{2}\right\rangle\mathrm{d}v\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Použijeme substituci $x=(\xi+\eta)/2$, $v=\eta-\xi$, pak díky $\int_{-\infty}^{\infty}|\xi\rangle\langle\xi|\,\mathrm{d}\xi=1$, dostáváme

$$I=\int_{\mathbf{R}^2}\langle\eta\left|\hat{\rho}_1\right|\xi\rangle\,\langle\xi\left|\hat{\rho}_2\right|\eta\rangle\;\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta=\mathrm{tr}\left\{\hat{\rho}_1\hat{\rho}_2\right\}. \qquad (2.72)$$

Zároveň ale platí

$$I=2\pi\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}W_{\hat{\rho}_1}(x,p)W_{\hat{\rho}_2}(x,p)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}p, \qquad (2.73)$$

z čehož plyne

$$\mathrm{tr}\left\{\hat{\rho}_1\hat{\rho}_2\right\}=2\pi\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}W_{\hat{\rho}_1}(x,p)W_{\hat{\rho}_2}(x,p)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}p. \qquad (2.74)$$

Jestliže za $\hat{\rho}_2$ zvolíme $|\xi'\rangle\langle\xi|$, pak můžeme psát

$$\mathrm{tr}\left\{\hat{\rho}_1|\xi'\rangle\langle\xi|\right\}=2\pi\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}W_{\hat{\rho}_1}(x,p)W_{|\xi'\rangle\langle\xi|}(x,p)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}p. \qquad (2.75)$$

Stopa je invariant, tudíž ji můžeme vypočítat v libovolné bázi. Proto za předpokladu $\langle\xi|\eta\rangle=\delta_\eta^\xi$ platí

$$\mathrm{tr}\left\{\hat{\rho}_1|\xi'\rangle\langle\xi|\right\}=\int_\eta\langle\eta|\hat{\rho}_1|\xi'\rangle\langle\xi|\eta\rangle\,\mathrm{d}\eta=\langle\xi|\hat{\rho}_1|\xi'\rangle. \qquad (2.76)$$

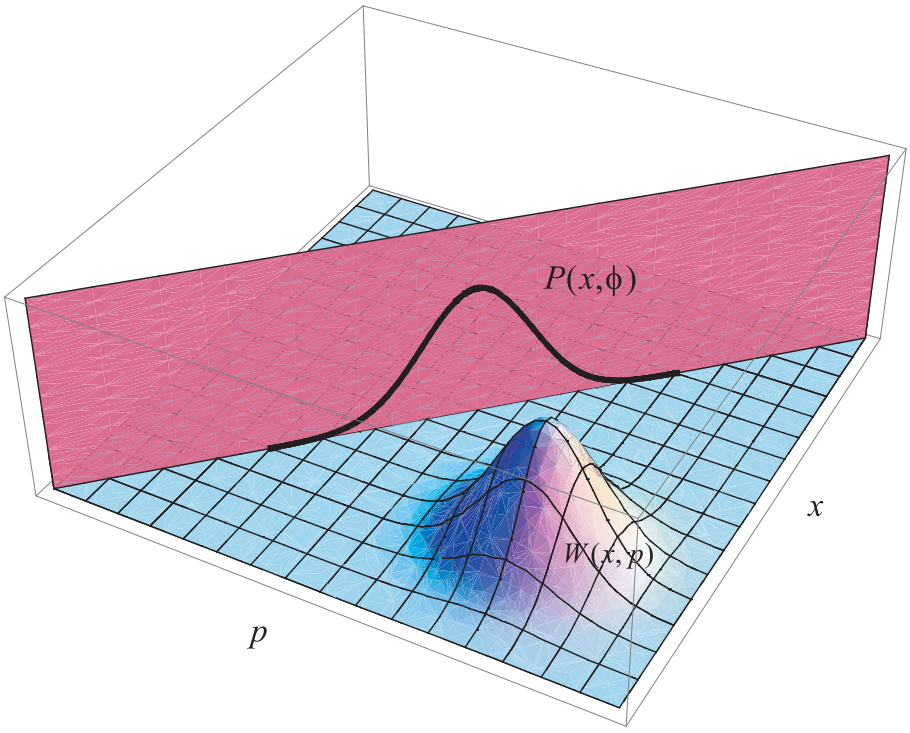
Tím jsme dosáhli zcela obecného výsledku

$$\langle\xi|\hat{\rho}|\xi'\rangle=2\pi\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}W_{\hat{\rho}}(x,p)W_{|\xi'\rangle\langle\xi|}(x,p)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}p. \qquad (2.77)$$

Ze vztahu je patrné, že znalost $W(x,p)$ nám umožní získat matici hustoty signálního stavu v libovolné bázi. Tudíž nám zbývá již poslední spojovací článek týkající se toho, jak získat z marginálních distribucí $P(x,\phi)$ Wignerovu distribuci $W(x,p)$.

## 2.4 Rekonstrukce $W(x,p)$ z $P(x,\phi)$ aneb kvantová tomografie

Poslední článek v celém procesu rekonstrukce kvantového stavu světla je příznačně nazýván kvantovou tomografií. Díky Heisenbergovým relacím neurčitosti nemůžeme sice přímo změřit Wignerovu kvazidistribuci, ale co můžeme změřit jsou právě histogramy pro obecně natočenou kvadraturu $P(x,\phi)$ To jsou vlastně jakési 'stíny', které Wignerova kva-




Obrázek 2.7: Zákony kvantové mechaniky nám dovolují pozorovat pouze 'stíny' Wignerovy kvazidistribuce. Ovšem máme-li dostatečné množství stínů z různých úhlů pohledu, můžeme si dovolit zrekonstruovat objekt, jenž stín vrhá. To je podstata kvantové tomografie.

zidistribuce vytváří na rovinách, které jsou kolmé k rovině $xp$ a zároveň prochází přímkou, která určuje natočenou kvadraturu ve fázovém prostoru, což můžete vidět na obr. 2.7.

Pro odvození analytického vztahu (opět čerpáme z [9]) je výhodné začít u (2.61) a uvědomit si, že Fourierův obraz $P(x,\phi)$ je roven Fourierovu obrazu Wignerovy kvazidistribuce (2.39). Proto můžeme v polárních souřadnicích psát

$$\begin{aligned} W(x,p) &= \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\pi} W'(x'\cos\phi, x'\sin\phi)e^{ix'(x\cos\phi+p\sin\phi)}|x'|\,\mathrm{d}x'\,\mathrm{d}\phi = \\ &= \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\pi} P'(x',\phi)e^{ix'(x\cos\phi+p\sin\phi)}|x'|\,\mathrm{d}x'\,\mathrm{d}\phi. \end{aligned} \tag{2.78}$$

Navíc platí (2.35), takže konečně

$$W(x,p) = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\pi} P(w,\phi)e^{ix'(x\cos\phi+p\sin\phi-w)}|x'|\,\mathrm{d}x'\,\mathrm{d}w\,\mathrm{d}\phi. \tag{2.79}$$

Jestliže označíme

$$K(z) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}|x'|e^{ix'z}\,\mathrm{d}x' \tag{2.80}$$

můžeme dále psát

$$W(x,p) = \frac{1}{2\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\pi} P(w,\phi)K(x\cos\phi+p\sin\phi-w)\,\mathrm{d}w\,\mathrm{d}\phi. \tag{2.81}$$

Tím bychom mohli celý problém uzavřít, ovšem z matematické hlediska je výraz (2.80) poněkud nešťastný. Divergence ve fyzice jsou vždy nepříjemnou záležitostí. Naštěstí je však možné provést poměrně jednoduše regularizaci tohoto výrazu a dospět k fyzikálně přijatelnému závěru. Nejdříve výraz (2.80) upravíme

$$\begin{aligned} K(z) &= \frac{1}{2}\left(\int_0^{\infty} e^{ix'z}x'\,\mathrm{d}x' - \int_{-\infty}^{0} e^{ix'z}x'\,\mathrm{d}x'\right) = \\ &= \frac{1}{2i}\frac{\partial}{\partial z}\left(\int_0^{\infty} e^{ix'z}\,\mathrm{d}x' - \int_{-\infty}^{0} e^{ix'z}\,\mathrm{d}x'\right) = \\ &= \frac{1}{2i}\frac{\partial}{\partial z}\left(\int_0^{\infty} e^{ix'z}\,\mathrm{d}x' - \int_0^{\infty} e^{-ix'z}\,\mathrm{d}x'\right) = \frac{\partial}{\partial z}\mathrm{Im}\int_0^{\infty} e^{ix'z}\,\mathrm{d}x', \end{aligned} \tag{2.82}$$

což je vlastně integrál z funkce sinus. Pro regularizaci tohoto integrálu se používá známý trik, i když popravdě matematicky trochu divoký, s přidáním členu $e^{-\epsilon x'}$ (kde $\epsilon \to 0$), který chování integrandu v nekonečnu učiní přijatelným. Spočítejme nyní tento upravený integrál

$$I = \int_0^{\infty} e^{ix'(z+i\epsilon)}\,\mathrm{d}x' = \left[\frac{e^{ix'(z+i\epsilon)}}{i(z+i\epsilon)}\right]_0^{\infty} = -\frac{1}{i(z+i\epsilon)}. \tag{2.83}$$

Dále[4]

$$\begin{aligned} K(z) &= \frac{\partial}{\partial z}\mathrm{Im}\left(-\frac{1}{i(z+i\epsilon)}\right) = \frac{\partial}{\partial z}\mathrm{Im}\left(\frac{i}{z+i\epsilon}\right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial z}\mathrm{Re}\left(\frac{1}{z+i\epsilon}\right) = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{z^2+\epsilon^2}\right) = \frac{\epsilon^2-z^2}{(z^2+\epsilon^2)^2}. \end{aligned} \tag{2.84}$$

Správně bychom měli výsledek psát jako

$$W(x,p) = \frac{1}{2\pi^2}\lim_{\epsilon\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\pi} P(w,\phi)\frac{\epsilon^2-(x\cos\phi+p\sin\phi-w)^2}{((x\cos\phi+p\sin\phi-w)^2+\epsilon^2)^2}\,\mathrm{d}w\,\mathrm{d}\phi. \tag{2.85}$$

[4]Správně bychom měli psát $\int_0^{\infty} f(z)e^{ix'z}\,\mathrm{d}x' = \lim_{\epsilon\to 0}\left(-f(z)\frac{1}{i(z+i\epsilon)}\right)$, kde $f(z)$ je nějaká 'pěkně' se chovající funkce, protože teprve poté dostane výraz smysl.

Regularizace výrazu (2.80) je ovšem ekvivalentní tomu, že vezmeme pouze Cauchyovu hlavní hodnotu z integrálu (2.81), protože tím, že vezmeme Cauchyovu hlavní hodnotu se vyhneme singularitám, které jsou příčinou divergentního chování členu (2.80). Nakonec proto můžeme psát

$$W(x,p) = -\frac{1}{2\pi^2}\mathrm{PV}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\pi}\frac{P(w,\phi)}{(x\cos\phi + p\sin\phi - w)^2}\,\mathrm{d}w\,\mathrm{d}\phi. \tag{2.86}$$

Tento vztah je nazýván *inverzní Radonovou transformací* a je základní matematickou metodou používanou jak v tomografii v medicíně, tak i v kvantové optice. V praxi se samozřejmě namísto integrace používá sumace přes naměřené histogramy.

Právě jsme se tedy přesvědčili, že vyvážená homodynní detekce je skutečně velmi užitečnou metodou. Stojí na počátku cesty k rekonstrukci kvantového stavu světla.

## 2.5 Kvadratura a elektrické pole

V sekci 1.2.1 jsem viděli, že obecná kvadratura (1.8) je ekvivalentní operátoru elektrického pole (1.9). Díky analogické struktuře vztahů (1.8) a (1.9) můžeme změnou $\phi$ v podstatě měřit časový průběh elektrického pole. Při zafixovaném $z$ máme totiž v (1.9) $\phi(0,t)$ a $\phi$ závisí na $t$ lineárně. Jestliže tudíž známe histogram pro $\hat{x}_\phi$, známe i histogram $P(E(t))$. Na následujících stránkách uvidíte sérii obrázků, které byly vytvořeny tak, že jsme vždy vyšli ze známé Wignerovy kvazidistribuce pro daný stav, pomocí vztahu (2.28) jsme spočetli $P(x,\phi)$, zakreslili jsme průběh $P(x,\phi)$ pro různá $\phi$ a nakonec jsme zakreslili, jakým způsobem by mohlo dopadnout měření elektrického pole. V posledním kroku jsme pro každé $\hat{x}_\phi$ ke generaci náhodných čísel použili Gaussovu distribuci s daným rozptylem a posunutím.

Pro vakuový stav je situace jednoduchá. Je to koherentní stav umístěný v počátku. Wignerova kvazidistribuce je tudíž tvaru

$$W(x,p) = \frac{1}{\pi}e^{-(x^2+p^2)}. \tag{2.87}$$

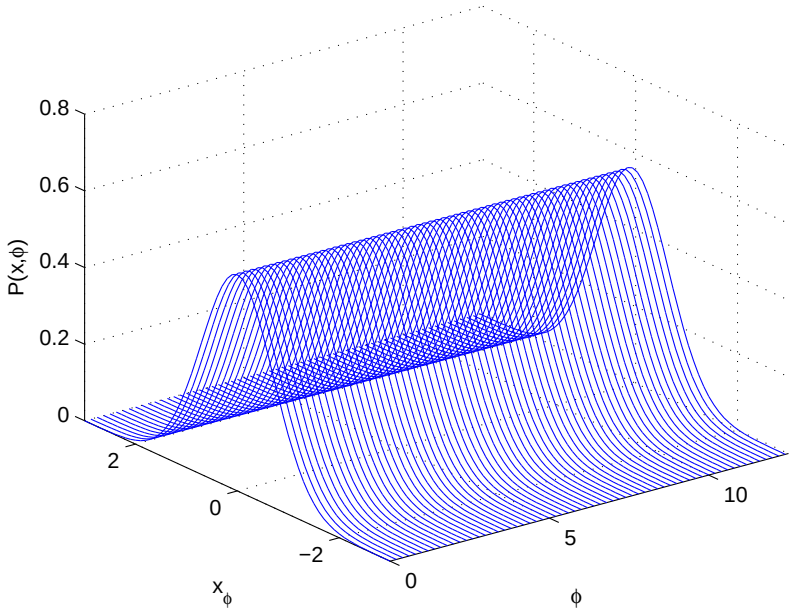
Na tomto místě je již myslím zřejmé, že marginální distribuce se nebude měnit s $\phi$ díky symetrii, ale přesto můžeme dosadit do (2.28) a provést integraci přes $p$. Výsledek je

$$P(x,\phi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}. \tag{2.88}$$

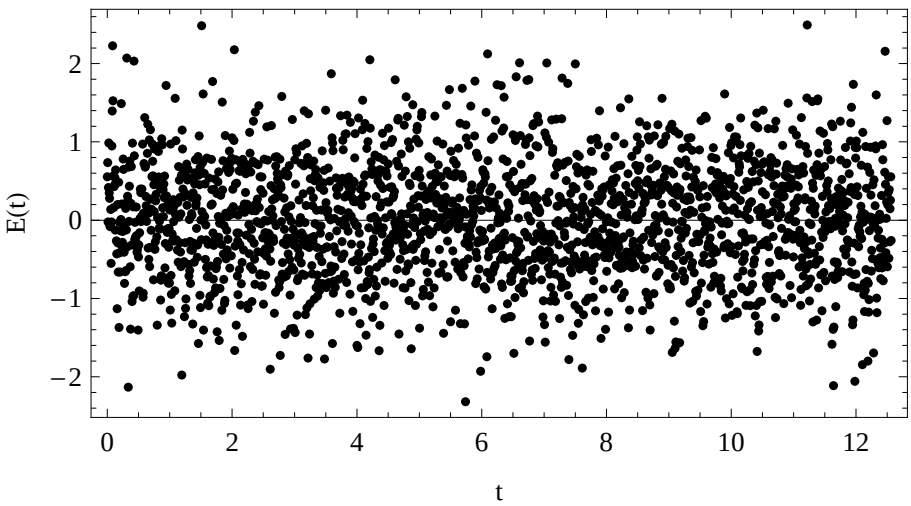
Na obr. 2.8 můžete vidět průběh marginálních distribucí pro různá $\phi$ a na obr. 2.9 potom tomu odpovídají průběh elektrického pole.

Nyní rozebereme případ pro koherentní stav. Do rovnice (2.28) můžeme dosadit ze vztahu (2.27) a po integraci přes $p$ dostáváme

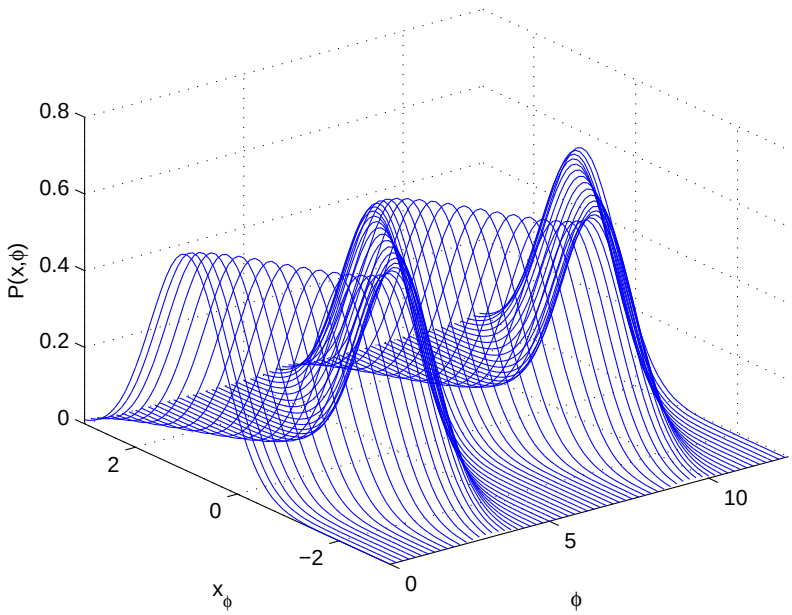
$$P(x,\phi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-(x-\sqrt{2}|A|\cos\phi)^2}. \tag{2.89}$$



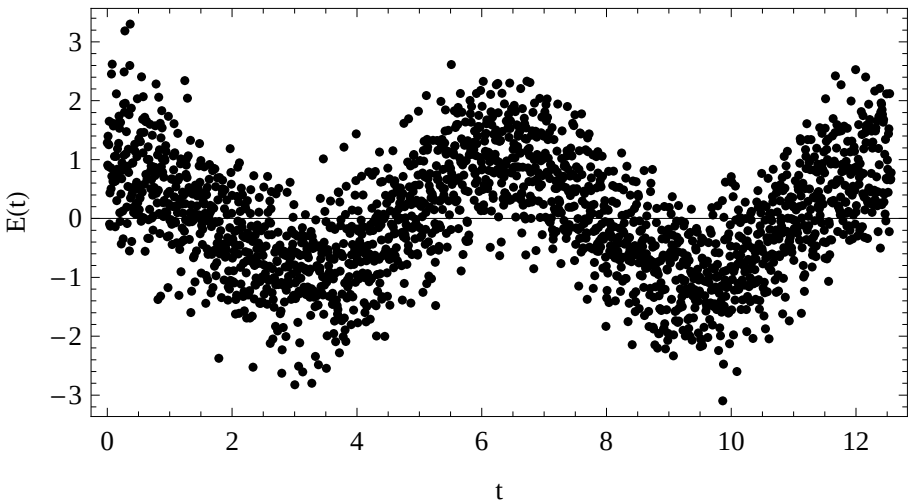

Obrázek 2.8: Marginální distribuce pro různá $\phi$ pro vakuový stav.



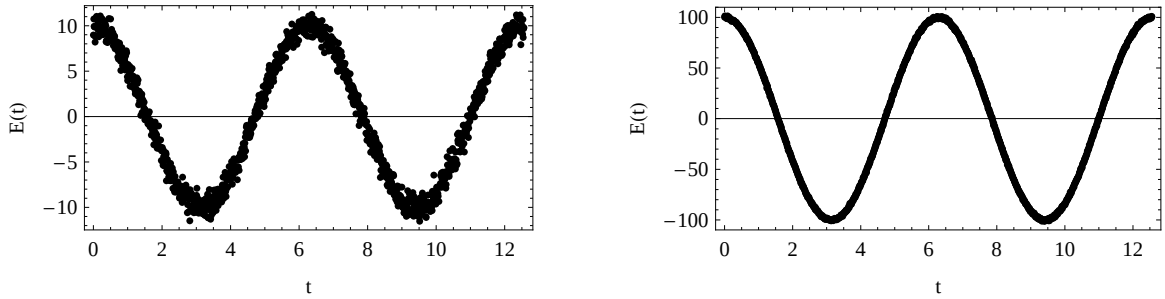

Obrázek 2.9: Průběh elektrického pole pro vakuový stav.




Obrázek 2.10: Marginální distribuce $P(x, \phi)$ pro různá $\phi$ pro koherentní stav s $\sqrt{2}|A| = 1$.




Obrázek 2.11: Simulace možného výsledku měření $E(t)$ pro koherentní stav $\sqrt{2}|A| = 1$.




Obrázek 2.12: Kvantový šum při větší amplitudě koherentního stavu již nehraje takovou roli a elektrické pole postupně získává charakter klasické oscilace.

Tento výsledek můžete vidět na obr. 2.10 a obr. 2.11. Pro ilustraci role kvantového šumu uvádím ještě obr. 2.12 pro koherentní stavy s $\sqrt{2}|A| = 10$ a $\sqrt{2}|A| = 100$.

Nakonec bychom rádi demonstrovali průběh elektrického pole u stlačených stavů, tj. u stavů, které minimalizují relace neurčitosti $\Delta x \cdot \Delta p = 1/2$. Ve skutečnosti jsme tedy už s některými stlačenými stavy pracovali, protože například koherentní stavy relace neurčitosti minimalizují. U koherentních stavů jsou ovšem neurčitosti $\Delta x$ a $\Delta p$ stejné a rovny $1/\sqrt{2}$. U stlačených stavů, které jsou hodny svého jména, však dochází k minimalizaci relací neurčitosti tak, že jedna z neurčitostí $\Delta x$, $\Delta p$ je menší než $1/\sqrt{2}$, zatímco druhá musí být větší než $1/\sqrt{2}$, aby nedocházelo k porušení relací neurčitosti. Wignerovu kvazidistribuci pro speciální případ stlačení ve směru $x$ nebo $p$ pak můžeme logicky psát ve tvaru

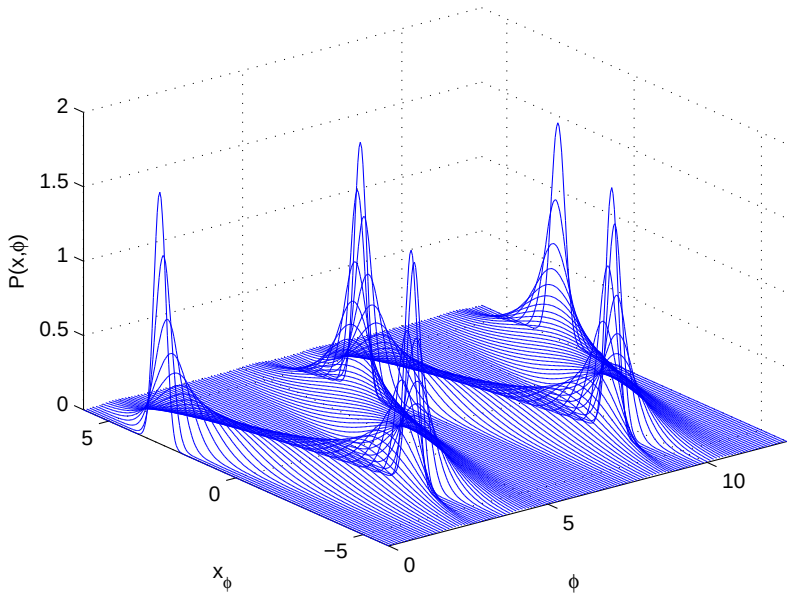
$$W(x\cos\phi - p\sin\phi, x\sin\phi + p\cos\phi) = \frac{1}{\pi} e^{-s^2(x\cos\phi - p\sin\phi - \sqrt{2}|A|)^2} e^{-\frac{(x\sin\phi + p\cos\phi)^2}{s^2}}, \tag{2.90}$$

kde $s$ je parametr stlačení. Pokud je $|s| > 1$, pak je Wignerova kvazidistribuce stlačená v $x$ a naopak rozšířená v $p$. Takový stav se pak logicky nazývá *amplitudově stlačený*. Naopak pokud $|s| < 1$, pak je Wignerova kvazidistribuce stlačená v $p$ a protažená v $x$. Takový stav se pak nazývá *fázově stlačený*. Dosazením (2.90) do (2.28) dospíváme po integraci přes $p$ k následujícímu vztahu

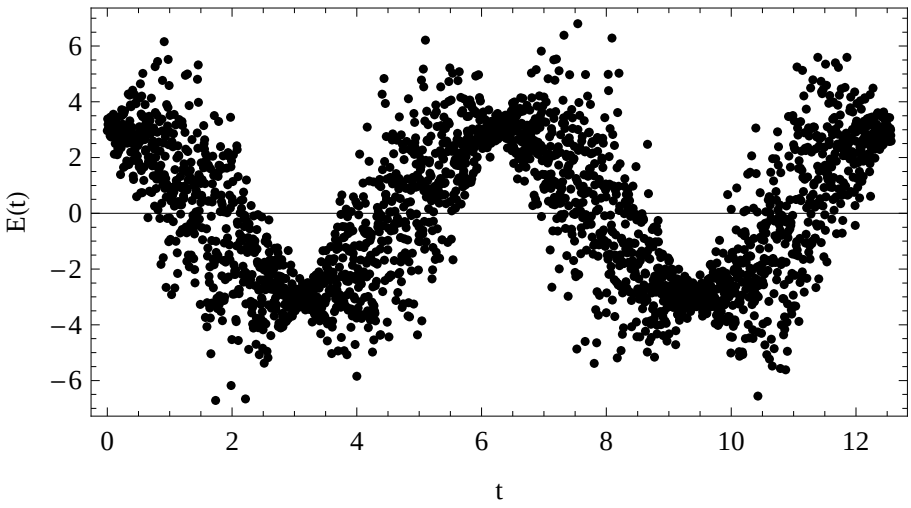
$$P(x,\phi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\exp\left(-\frac{s^2(x-\sqrt{2}|A|\cos\phi)^2}{\cos^2\phi + s^4\sin^2\phi}\right)}{\sqrt{\frac{\cos^2\phi + s^4\sin^2\phi}{s^2}}}. \tag{2.91}$$

Výsledky pro oba stavy jsou zobrazeny na obrázcích níže. Je z nich pěkně vidět, odkud se vzaly názvy fázově a amplitudově stlačený stav. Mohli bychom samozřejmě vyšetřit ještě obecně stlačený stav, ale myslím, že jako názorná demonstrace toho, jakým způsobem můžeme vyváženou homodynní detekcí dospět až k fyzikálně snadno interpretovatelným veličinám, jsou tyto příklady naprosto dostačující.

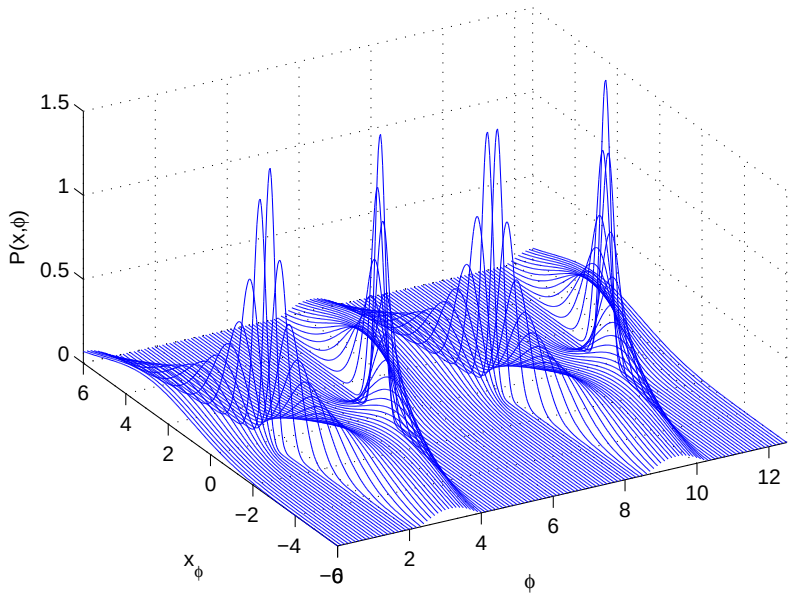
Motivováni výsledky této kapitoly, můžeme nyní naší pozornost obrátit na stěžejní výpočet této práce.



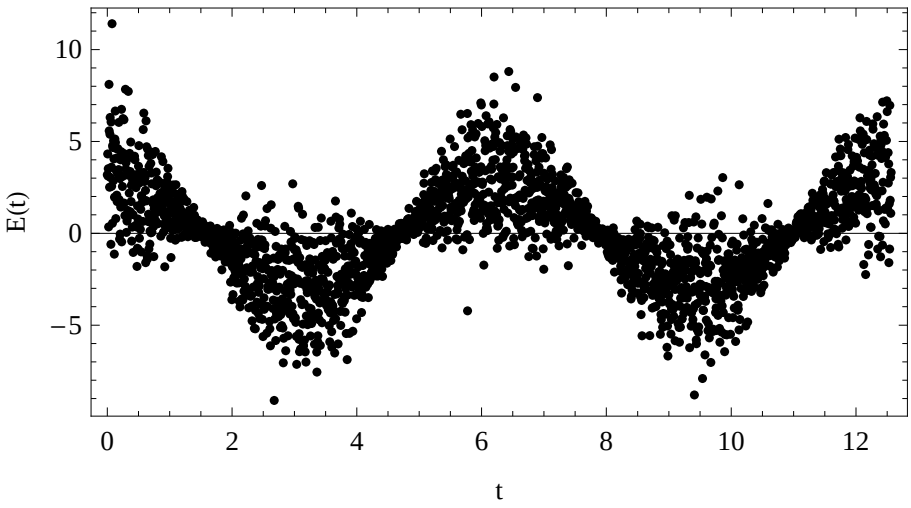

Obrázek 2.13: Koherentní stav se stlačenou amplitudou, kde koeficient stlačení je $s = 3$ a platí $\sqrt{2}|A| = 3$.




Obrázek 2.14: Simulace možného výsledku měření $E(t)$ pro koherentní stav se stlačenou amplitudou, kde koeficient stlačení je $s = 3$ a platí $\sqrt{2}|A| = 3$.




Obrázek 2.15: Koherentní stav se stlačenou fází, kde koeficient stlačení je $s = 1/3$ a platí $\sqrt{2}|A| = 3$.




Obrázek 2.16: Simulace možného výsledku měření $E(t)$ pro koherentní stav se stlačenou fází, kde koeficient stlačení je $s = 1/3$ a platí $\sqrt{2}|A| = 3$.

# Kapitola 3

# Měření kvadratury

V této kapitole se již budeme věnovat formálnímu důkazu toho, že pro velké $A$ je měření počtu fotonů na výstupních fotodetektorech ekvivalentní měření kvadratury signálního stavu.

Výpočet jsem provedl dvěma způsoby, přičemž každý z nich nám poskytl jiný úhel pohledu na daný problém. Kapitola začne výpočtem, který nás dovedl k výrazu pro amplitudu pravděpodobnosti naměření $n$ a $m$ fotonů na výstupních fotodetektorech ve tvaru přidružených Laguerrových polynomů, exponenciál a cosinové části. Poté stručně zanalyzujeme tento výsledek a budeme pokračovat alternativním výpočtem, který nás dovedl k značně odlišnému výrazu, který ovšem umožnil typ analýzy, který byl u předchozího případu nerealizovatelný. Kapitolu uzavřeme obecnou diskuzí o problémech spjatých s výpočty a srovnáním obou přístupů.

## 3.1 Výpočet $M_m^n$ při BHD

Vyjděme ze schématu BHD podle obr. 1.1. Máme signální stav $|\psi\rangle$, který můžeme vyjádřit v souřadnicové bázi $|x\rangle$ takto

$$|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x)|x\rangle \,\mathrm{d}x. \tag{3.1}$$

Stav LO vezmeme pro zjednodušení tvaru $|-A\rangle$, kde $A$ je reálné, kladné a $A \to \infty$, tedy LO je v koherentním stavu s velkou amplitudou. Znaménko mínus přidáváme čistě pro pozdější zjednodušení. Na samotný výpočet tato volba nemá žádný vliv. Stav $|-A\rangle$ také vyjádříme v souřadnicové bázi. Použitím vztahu (2.16) dostáváme

$$|-A\rangle = \pi^{-\frac{1}{4}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(y+\sqrt{2}A)^2}|y\rangle \,\mathrm{d}y. \tag{3.2}$$

Vstupní stav $\psi_{\mathrm{in}}$ můžeme psát tedy takto

$$\psi_{\mathrm{in}} = \pi^{-\frac{1}{4}} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) e^{-\frac{1}{2}(y+\sqrt{2}A)^2}|x\rangle|y\rangle \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \tag{3.3}$$

Nyní necháme oba tyto stavy projít děličem svazku, který je popsaný Hamiltoniánem $\hat{H}_{\mathrm{BS}}$ (1.11). Stavy se na děliči svazku ztransformují a výstupní stav $\psi_{\mathrm{out}}$ můžeme obecně zapsat takto

$$\psi_{\mathrm{out}} = \pi^{-\frac{1}{4}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) e^{-\frac{1}{2}(y+\sqrt{2}A)^2} \hat{H}_{\mathrm{BS}} |x\rangle |y\rangle \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y. \tag{3.4}$$

Jakým způsobem se však stavy $|x\rangle$ a $|y\rangle$ ztransformují po zapůsobení $\hat{H}_{\mathrm{BS}}$? Již víme, jak se transformují polní operátory $\hat{a}_1$ a $\hat{a}_2$. Tuto informaci můžeme využít k odvození transformace kvadratur $\hat{x}_1$, $\hat{x}_2$ na děliči svazku. Podle (1.7), (1.18) a (1.19) platí

$$\hat{x}_1' = \frac{\hat{a}_1' + \hat{a}_1'^{\dagger}}{\sqrt{2}} = \frac{\frac{\hat{a}_1 - \hat{a}_2}{\sqrt{2}} + \frac{\hat{a}_1^{\dagger} - \hat{a}_2^{\dagger}}{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}} = \frac{\frac{\hat{a}_1 + \hat{a}_1^{\dagger}}{\sqrt{2}} - \frac{\hat{a}_2 + \hat{a}_2^{\dagger}}{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}} = \frac{\hat{x}_1 - \hat{x}_2}{\sqrt{2}}. \tag{3.5}$$

Podobně

$$\hat{x}_2' = \frac{\hat{a}_2' + \hat{a}_2'^{\dagger}}{\sqrt{2}} = \frac{\frac{\hat{a}_1 + \hat{a}_2}{\sqrt{2}} + \frac{\hat{a}_1^{\dagger} + \hat{a}_2^{\dagger}}{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}} = \frac{\frac{\hat{a}_1 + \hat{a}_1^{\dagger}}{\sqrt{2}} + \frac{\hat{a}_2 + \hat{a}_2^{\dagger}}{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}} = \frac{\hat{x}_1 + \hat{x}_2}{\sqrt{2}}. \tag{3.6}$$

V maticovém zápisu:

$$\begin{pmatrix} \hat{x}_1' \\ \hat{x}_2' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{pmatrix}. \tag{3.7}$$

Právě odvozené transformace vyjadřují situaci v Heisenbergově obraze. My bychom ale pro úpravu (3.4) potřebovali spíše vědět, jakým způsobem se transformují stavy $|x\rangle$ a $|y\rangle$ v Schrödingerově obraze. K tomu můžeme použít velmi jednoduchou úvahu. Především si musíme uvědomit, že výsledek měření nezávisí na volbě obrazu. Oba obrazy jsou z fyzikálního hlediska ekvivalentní. Z toho plyne, že to, co musí zůstávat stejné, ať už vývoj systému popisujeme v jednom či druhém obraze, jsou vlastní hodnoty, které získáme působením operátorů na vlastní stavy.

V našem konkrétním případě máme vstupní stav tvaru $|x\rangle_1 |y\rangle_2$ a k němu příslušející vstupní operátory $\hat{x}_1$ a $\hat{x}_2$.[1] V Heisenbergově obraze zůstane stav $|x\rangle_1 |y\rangle_2$ po průchodu děličem svazku nezměněn. Interakce s děličem svazku je zahrnuta v transformaci $\hat{x}_1$ a $\hat{x}_2$ (3.7). Na výstupu proto můžeme psát

$$\begin{aligned} \frac{\hat{x}_1 - \hat{x}_2}{\sqrt{2}} |x\rangle_1 |y\rangle_2 &= \frac{x - y}{\sqrt{2}} |x\rangle_1 |y\rangle_2 \\ \frac{\hat{x}_1 + \hat{x}_2}{\sqrt{2}} |x\rangle_1 |y\rangle_2 &= \frac{x + y}{\sqrt{2}} |x\rangle_1 |y\rangle_2. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Ke stejnému výsledku musíme dospět i v Schrödingerově obraze, kde jsou ale naopak $\hat{x}_1$ a $\hat{x}_2$ stejné jako na vstupu. Abychom obdrželi stejné vlastní hodnoty na výstupu jako v (3.8)

[1] Připomeňme, že vše s indexem 1 přísluší k signálnímu stavu $|\psi\rangle$ a vše označené indexem 2 se týká LO. Navíc operátor $\hat{x}_1$ působí pouze na stav $|x\rangle_1$ a podobně $\hat{x}_2$ působí pouze na stav $|y\rangle_2$.

musí platit:

$$\begin{aligned}
\hat{x}_1 \left|\frac{x-y}{\sqrt{2}}\right\rangle_1 \left|\frac{x+y}{\sqrt{2}}\right\rangle_2 &= \frac{x-y}{\sqrt{2}} \left|\frac{x-y}{\sqrt{2}}\right\rangle_1 \left|\frac{x+y}{\sqrt{2}}\right\rangle_2, \\
\hat{x}_2 \left|\frac{x-y}{\sqrt{2}}\right\rangle_1 \left|\frac{x+y}{\sqrt{2}}\right\rangle_2 &= \frac{x+y}{\sqrt{2}} \left|\frac{x-y}{\sqrt{2}}\right\rangle_1 \left|\frac{x+y}{\sqrt{2}}\right\rangle_2.
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Z toho je jasně patrné, že pro výstupní stav ve Schrödingerově obraze platí

$$\psi_{\text{out}} = \pi^{-\frac{1}{4}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) e^{-\frac{1}{2}(y+\sqrt{2}A)^2} \left|\frac{x-y}{\sqrt{2}}\right\rangle_1 \left|\frac{x+y}{\sqrt{2}}\right\rangle_2 \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \tag{3.10}$$

Nyní nás zajímá amplituda pravpěpodobnosti $M_m^n$ události - $n$ fotonů na portu 1, $m$ fotonů na portu 2. Můžeme psát

$$M_m^n = \pi^{-\frac{1}{4}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) e^{-\frac{1}{2}(y+\sqrt{2}A)^2} \left\langle n \middle| \frac{x-y}{\sqrt{2}}\right\rangle_1 \left\langle m \middle| \frac{x+y}{\sqrt{2}}\right\rangle_2 \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \tag{3.11}$$

Pro další postup si musíme připomenout, jak působí koherentní posunovací operátor, který je operátorem unitárním, na brackety. Koherentní posunovací operátor je definovaný vztahem (1.28). Jestliže zvolíme $\alpha = z$, kde $z$ je reálné číslo, pak můžeme psát

$$\hat{D}(z) = \exp\left[z\left(\frac{\hat{x}-i\hat{p}}{\sqrt{2}}\right) - z\left(\frac{\hat{x}+i\hat{p}}{\sqrt{2}}\right)\right] = \exp\left(-iz\sqrt{2}\hat{p}\right) = \exp\left((-z\sqrt{2})\frac{\partial}{\partial x}\right). \tag{3.12}$$

Protože je operátor $\hat{D}(z)$ unitární, platí pro něj

$$\hat{D}^\dagger(z) = \hat{D}^{-1}(z) = \hat{D}(-z), \tag{3.13}$$

kde poslední rovnost plyne z toho, že inverzní operace k posunutí o $z\sqrt{2}$ je posunutí na druhou stranu, tudíž o $-z\sqrt{2}$. Posunovací operátor $\hat{D}^\dagger(z)$ působící na vlnovou funkci $\psi(x)$ dává

$$\begin{aligned}
\hat{D}^\dagger(z)\psi(x) &= \exp\left((z\sqrt{2})\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi(x) = \left(1 + z\sqrt{2}\frac{\partial}{\partial x} + \ldots\right)\psi(x) \\
&= \psi(x) + z\sqrt{2}\psi'(x) + \ldots = \psi(x + z\sqrt{2}).
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Mohli bychom se tedy mylně domnívat, že operátor $\hat{D}^\dagger(z)$ mění $|x\rangle$ na $|x + z\sqrt{2}\rangle$, protože evidentně

$$\langle x + z\sqrt{2}|\psi\rangle = \psi(x + z\sqrt{2}). \tag{3.15}$$

To by ale byl příliš uspěchaný závěr. Abychom to dokázali, můžeme provést následující rozbor. Především platí[2]

$$\begin{aligned}
\hat{D}^\dagger(z)\hat{x}\hat{D}(z) &= \exp\left(iz\sqrt{2}\hat{p}\right)\hat{x}\exp\left(-iz\sqrt{2}\hat{p}\right) \\
&= \hat{x} + [\hat{p}, \hat{x}](iz\sqrt{2}) = \hat{x} + z\sqrt{2} = \hat{x}_D.
\end{aligned} \tag{3.16}$$

[2]Použitím (2.54) a uvědoměním si, že další komutátory ve vztahu (2.54) jsou již nulové.

Nyní zadefinujme posunutý stav následovně

$$|u\rangle = \hat{D}^\dagger(z)|x\rangle. \tag{3.17}$$

Snadno můžeme odvodit následující identitu

$$\hat{x}_D|u\rangle = \hat{D}^\dagger(z)\hat{x}\hat{D}(z)|u\rangle = \hat{D}^\dagger(z)\hat{x}\overbrace{\hat{D}(z)\hat{D}^\dagger(z)}^{1}|x\rangle = \hat{D}^\dagger(z)x|x\rangle = x|u\rangle. \tag{3.18}$$

Zároveň však platí

$$\hat{x}_D|u\rangle = (\hat{x} + z\sqrt{2})|u\rangle = (u + z\sqrt{2})|u\rangle. \tag{3.19}$$

Porovnáním výše uvedených rovnic dostaneme

$$x|u\rangle = (u + z\sqrt{2})|u\rangle, \tag{3.20}$$

takže musí platit $u = x - z\sqrt{2}$. Rovnice (3.17) tudíž nabývá konkrétního tvaru

$$\hat{D}^\dagger(z)|x\rangle = |x - z\sqrt{2}\rangle. \tag{3.21}$$

Podobně bychom mohli odvodit, že platí

$$\hat{D}(z)|x\rangle = |x + z\sqrt{2}\rangle. \tag{3.22}$$

Vraťme se zpátky k našemu výpočtu. S použitím výše odvozených vztahů můžeme psát (od teď dále vypustíme indexy 1 a 2)

$$M_m^n = \pi^{-\frac{1}{4}} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) e^{-\frac{1}{2}(y+\sqrt{2}A)^2} \left\langle n \middle| \hat{D}\left(\frac{x}{2}\right) \middle| \frac{-y}{\sqrt{2}} \right\rangle \left\langle m \middle| \hat{D}\left(\frac{x}{2}\right) \middle| \frac{y}{\sqrt{2}} \right\rangle \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \tag{3.23}$$

Jistě také platí

$$\left\langle m \middle| \hat{D}\left(\frac{x}{2}\right) \middle| \frac{y}{\sqrt{2}} \right\rangle = \left\langle \frac{y}{\sqrt{2}} \middle| \hat{D}^\dagger\left(\frac{x}{2}\right) \middle| m \right\rangle^* = \left\langle \frac{y}{\sqrt{2}} \middle| \hat{D}\left(-\frac{x}{2}\right) \middle| m \right\rangle^*, \tag{3.24}$$

což plyne přímo z definice skalárního součinu. Proto můžeme psát

$$M_m^n = \pi^{-\frac{1}{4}} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) e^{-\frac{1}{2}(y+\sqrt{2}A)^2} \left\langle n \middle| \hat{D}\left(\frac{x}{2}\right) \middle| \frac{-y}{\sqrt{2}} \right\rangle \left\langle \frac{y}{\sqrt{2}} \middle| \hat{D}\left(-\frac{x}{2}\right) \middle| m \right\rangle^* \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \tag{3.25}$$

Pro další postup si budeme muset připomenout některé vlastnosti vlastních stavů harmonického oscilátoru, které se standartně označují $u_n(x) = \langle x|n\rangle$. Především:

$$u_n(x) = (\pi)^{-\frac{1}{4}} \frac{(-1)^n}{\sqrt{2^n n!}} e^{-\frac{x^2}{2}} e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x^2}\right). \tag{3.26}$$

Ovšem výraz

$$(-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} \left( e^{-x^2} \right) \tag{3.27}$$

je definujícím vztahem pro Hermiteovy polynomy, tudíž můžeme psát

$$u_n(x) = (\pi)^{-\frac{1}{4}} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2^n n!}} H_n(x). \tag{3.28}$$

Tento výraz je reálný, proto nemá smysl komplexně sdružovat a dostáváme

$$M_m^n = \pi^{-\frac{1}{4}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) e^{-\frac{1}{2}(y+\sqrt{2}A)^2} \left\langle n \middle| \hat{D}\left(\frac{x}{2}\right) \middle| \frac{-y}{\sqrt{2}} \right\rangle \left\langle \frac{y}{\sqrt{2}} \middle| \hat{D}\left(-\frac{x}{2}\right) \middle| m \right\rangle \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y. \tag{3.29}$$

Dále pro Hermiteovy polynomy platí

$$H_n(-x) = (-1)^n H_n(x) \tag{3.30}$$

a jelikož je zbytek $u_n(x)$ funkce sudá, můžeme udělat následující závěr (zase s využitím toho, že $u_n(x)$ je reálná funkce)

$$u_n\left(\frac{x-y}{\sqrt{2}}\right) = (-1)^n u_n\left(\frac{y-x}{\sqrt{2}}\right) \Rightarrow (-1)^n \left\langle \frac{y-x}{\sqrt{2}} \middle| n \right\rangle = (-1)^n \left\langle n \middle| \frac{y-x}{\sqrt{2}} \right\rangle. \tag{3.31}$$

Tento závěr využijeme k následující úpravě:

$$\left\langle n \middle| \hat{D}\left(\frac{x}{2}\right) \middle| \frac{-y}{\sqrt{2}} \right\rangle = \left\langle n \middle| \frac{x-y}{\sqrt{2}} \right\rangle = (-1)^n \left\langle n \middle| \frac{y-x}{\sqrt{2}} \right\rangle = (-1)^n \left\langle n \middle| \hat{D}\left(-\frac{x}{2}\right) \middle| \frac{y}{\sqrt{2}} \right\rangle. \tag{3.32}$$

Čili platí

$$M_m^n = (-1)^n \pi^{-\frac{1}{4}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) e^{-\frac{1}{2}(y+\sqrt{2}A)^2} \left\langle n \middle| \hat{D}\left(-\frac{x}{2}\right) \middle| \frac{y}{\sqrt{2}} \right\rangle \left\langle \frac{y}{\sqrt{2}} \middle| \hat{D}\left(-\frac{x}{2}\right) \middle| m \right\rangle \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y. \tag{3.33}$$

Zaměřme nyní naší pozornost na integrál přes $y$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(y+\sqrt{2}A)^2} \left| \frac{y}{\sqrt{2}} \right\rangle \left\langle \frac{y}{\sqrt{2}} \right| \mathrm{d}y. \tag{3.34}$$

Substitucí $z = y/\sqrt{2}$ dospíváme k výrazu

$$\sqrt{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(z+A)^2} |z\rangle\langle z|\, \mathrm{d}z. \tag{3.35}$$

Nyní tento výraz vyjádříme v impulsové reprezentaci. To můžeme technicky provést tak, že do stávajícího výrazu na vhodných místech vložíme dva jednotkové operátory v impulsové reprezentaci a tudíž dostáváme

$$\sqrt{2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(z+A)^2} |p\rangle\langle p|z\rangle\langle z|p'\rangle\langle p'|\, \mathrm{d}z\, \mathrm{d}p\, \mathrm{d}p'. \tag{3.36}$$

Dále platí

$$\langle p|z\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ipz}, \qquad \langle z|p'\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ip'z}. \tag{3.37}$$

Takže integrál můžeme přepsat do tohoto tvaru

$$\frac{1}{\sqrt{2}\pi} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(z+A)^2} e^{-ipz} e^{ip'z} |p\rangle\langle p'| \,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}p\,\mathrm{d}p'. \tag{3.38}$$

Nyní zavedeme substituci $z + A = y$ a provedeme několik triviálních úprav:

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{\sqrt{2}\pi} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} e^{-i(p-p')y} e^{i(p-p')A} |p\rangle\langle p'| \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}p\,\mathrm{d}p' \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}\pi} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left[\left(y+\frac{i}{2}(p-p')\right)^2 + \frac{(p-p')^2}{4}\right]} e^{i(p-p')A} |p\rangle\langle p'| \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}p\,\mathrm{d}p'. \end{aligned} \tag{3.39}$$

Další substituce $(p, p') \to (p, p - \Delta p)$ (jak se můžete snadno přesvědčit Jakobián transformace je $-1$) vede k výrazu

$$-\frac{1}{\sqrt{2}\pi} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left[\left(y+\frac{i}{2}\Delta p\right)^2 + \frac{\Delta p^2}{4}\right]} e^{i\Delta p A} |p\rangle\langle p - \Delta p| \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}p\,\mathrm{d}\Delta p. \tag{3.40}$$

Jako poslední substituci zvolíme $p' = \frac{\Delta p}{\sqrt{2}}$ a dostáváme

$$-\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left[\left(y+\frac{i\sqrt{2}}{2}p'\right)^2\right]} e^{-\frac{p'^2}{2}} e^{i\sqrt{2}p'A} |p\rangle\langle p - \sqrt{2}p'| \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}p\,\mathrm{d}p'. \tag{3.41}$$

Nyní použijeme vztah (1.28). Platí

$$\hat{D}(ip') = \exp\left[ip'\left(\frac{\hat{x} - i\hat{p}}{\sqrt{2}}\right) + ip'\left(\frac{\hat{x} + i\hat{p}}{\sqrt{2}}\right)\right] = \exp\left[ip'\sqrt{2}\hat{x}\right] = \exp\left[(-p'\sqrt{2})\frac{\partial}{\partial p}\right]. \tag{3.42}$$

Postupem zcela analogickým tomu, který vedl ke vztahu (3.22) můžeme dospět také ke vztahu, který nám říká, jakým způsobem působí koherentní posunovací operátor $\hat{D}(ip')$ na impulsový ket. Snadno se můžete přesvědčit, že platí

$$\hat{D}(ip')|p\rangle = |p + \sqrt{2}p'\rangle. \tag{3.43}$$

V našich úpravách integrálu pak využijeme

$$\langle p|\hat{D}^\dagger(-ip') = \langle p|\hat{D}(ip') = \langle p - \sqrt{2}p'|. \tag{3.44}$$

S použitím tohoto vztahu můžeme náš integrál přepsat do tvaru

$$-\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left[\left(y+\frac{i\sqrt{2}}{2}p'\right)^2\right]} e^{-\frac{p'^2}{2}} e^{i\sqrt{2}p'A} |p\rangle\langle p|\hat{D}(ip') \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}p\,\mathrm{d}p'. \tag{3.45}$$

Integrál přes $p$ je roven jedné a dále můžeme zavést substituci $y = z - i\frac{\sqrt{2}}{2}p'$. Integrál přejde do následujícího tvaru:

$$-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} e^{-\frac{p'^2}{2}} e^{i\sqrt{2}p'A}\hat{D}(ip')\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}p'. \tag{3.46}$$

Na tomto místě můžeme provést integraci přes $z$ a dostáváme velmi zjednodušený vztah

$$-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{p'^2}{2}} e^{i\sqrt{2}p'A}\hat{D}(ip')\,\mathrm{d}p'. \tag{3.47}$$

Vraťme se nyní k původnímu integrálu (3.34). Dosazením výše uvedeného výsledku a přeznačením $p' \to p$ můžeme psát

$$M_m^n = (-1)^{n+1}\pi^{-\frac{3}{4}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\psi(x)e^{-\frac{p^2}{2}+iA\sqrt{2}p}\left\langle n\left|\hat{D}\left(-\frac{x}{2}\right)\hat{D}\left(ip\right)\hat{D}\left(-\frac{x}{2}\right)\right|m\right\rangle \mathrm{d}x\,\mathrm{d}p. \tag{3.48}$$

S využitím vztahu (1.28) a použitím CBH formule (viz Dodatek A) můžeme snadno dokázat, že platí

$$\begin{aligned}\hat{D}(v)\hat{D}(v') &= e^{v\hat{a}^\dagger - v^*\hat{a}}e^{v'\hat{a}^\dagger - v'^*\hat{a}} = e^{(v+v')\hat{a}^\dagger-(v^*+v'^*)\hat{a}}e^{(vv'^*-v^*v')/2} \\ &= \hat{D}(v+v')e^{(vv'^*-v^*v')/2}.\end{aligned} \tag{3.49}$$

A dále můžeme dokázat:

$$\begin{aligned}\hat{D}(v+v')\hat{D}(v) &= \hat{D}(\alpha)\hat{D}(\beta) = \hat{D}(\alpha+\beta)e^{(\alpha\beta^*-\alpha^*\beta)/2} \\ &= \hat{D}(v'+2v)e^{((v+v')v^*-(v*+v'^*)v)/2} = \hat{D}(v'+2v)e^{(v'v^*-v'^*v)/2}.\end{aligned} \tag{3.50}$$

Celkem tedy můžeme psát

$$\hat{D}(v)\hat{D}(v')\hat{D}(v) = \hat{D}(v'+2v). \tag{3.51}$$

Nakonec dospíváme ke kompaktnímu výrazu

$$M_m^n = (-1)^{n+1}\pi^{-\frac{3}{4}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\psi(x)e^{-\frac{p^2}{2}+iA\sqrt{2}p}\left\langle n\left|\hat{D}\left(-x+ip\right)\right|m\right\rangle \mathrm{d}x\,\mathrm{d}p. \tag{3.52}$$

Výraz $\left\langle n\left|\hat{D}\left(-x+ip\right)\right|m\right\rangle$ může být za podmínky[3] $n \geq m$ upraven na (bližší podrobnosti lze nalézt například v [14])

$$\left\langle n\left|\hat{D}\left(-x+ip\right)\right|m\right\rangle = \sqrt{\frac{m!}{n!}}e^{-\frac{1}{2}(x^2+p^2)}(-x+ip)^{n-m}L_m^{n-m}(x^2+p^2), \tag{3.53}$$

[3]Existuje i výraz pro případ $m \geq n$, ale pro zjednodušení následujících úvah bude lepší uvažovat pouze speciální případ $n \geq m$, protože výsledky pro oba případy jsou analogické.

kde $L_m^{n-m}(x^2+p^2)$ jsou přidružené Laguerrovy polynomy. Celkově tedy dostáváme

$$\begin{aligned} M_m^n &= (-1)^{n+1}\pi^{-\frac{3}{4}}\sqrt{\frac{m!}{n!}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\psi(x)e^{-p^2+iA\sqrt{2}p}e^{-\frac{1}{2}x^2}\times \\ &\times (-x+ip)^{n-m}L_m^{n-m}(x^2+p^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}p, \end{aligned} \tag{3.54}$$

což můžeme dále upravit na

$$\begin{aligned} M_m^n &= (-1)^{n+1}\pi^{-\frac{3}{4}}\sqrt{\frac{m!}{n!}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\psi(x)e^{-p^2-\frac{x^2}{2}}e^{i\left(A\sqrt{2}p+(n-m)\arctan\left(-\frac{p}{x}\right)\right)}\times \\ &\times (x^2+p^2)^{\frac{n-m}{2}}L_m^{n-m}(x^2+p^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}p \end{aligned} \tag{3.55}$$

Dále můžeme rozepsat výraz

$$\begin{aligned} e^{i\left(A\sqrt{2}p+(n-m)\arctan\left(-\frac{p}{x}\right)\right)} &= \cos\left(A\sqrt{2}p+(n-m)\arctan\left(-\frac{p}{x}\right)\right) \\ &+ i\sin\left(A\sqrt{2}p+(n-m)\arctan\left(-\frac{p}{x}\right)\right). \end{aligned} \tag{3.56}$$

Vyjma tohoto členu, je zbytek integrandu sudá funkce v $p$. Proto můžeme okamžitě konstatovat, že při integraci od $-\infty$ do $\infty$ přes $p$ bude lichá část integrandu, tj. ta obsahující sinus, nulová a zůstane nám pouze sudá část integrandu. Nakonec tedy můžeme psát

$$\begin{aligned} M_m^n &= (-1)^{n+1}\pi^{-\frac{3}{4}}\sqrt{\frac{m!}{n!}}\int_{\mathbf{R}^2}\psi(x)e^{-p^2-\frac{x^2}{2}}\cos\left(A\sqrt{2}p-(n-m)\arctan\frac{p}{x}\right)\times \\ &\times (x^2+p^2)^{\frac{n-m}{2}}L_m^{n-m}(x^2+p^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}p. \end{aligned} \tag{3.57}$$

Ačkoli se tento výraz nezdá příliš přístupný analýze, přesto je možné z něj extrahovat několik zajímavých informací. V analýze budeme vycházet z výsledků zveřejněných v článku [3]. V tomto článku bylo odvozeno, že pro velkou amplitudu LO měří BHD kvadraturu $x=\frac{n-m}{\sqrt{2}A}$. To znamená, že integrál[4]

$$\begin{aligned} I_m^n(x) &= \sqrt{\frac{m!}{n!}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-p^2-\frac{x^2}{2}}\cos\left(A\sqrt{2}p-(n-m)\arctan\frac{p}{x}\right)\times \\ &\times \left(x^2+p^2\right)^{\frac{n-m}{2}}L_m^{n-m}(x^2+p^2)\,\mathrm{d}p \end{aligned} \tag{3.58}$$

by měl dávat velice významný příspěvek pro $x$ blízké výše zmíněné hodnotě, kdežto pro jiná $x$ by měl být příspěvek tohoto integrálu velice malý. To jinými slovy znamená, že v limitě $A\to\infty$ očekáváme

$$I_m^n(x)\approx\delta\left(x-\frac{n-m}{\sqrt{2}A}\right). \tag{3.59}$$

To by nám zajistilo po integraci přes $x$ vybrání $\psi\left(\frac{n-m}{\sqrt{2}A}\right)$. Podívejme se nyní, co nám říkají grafy těchto poměrně složitých funkcí.

[4] Záměrně nepíšeme v $I_m^n(x)$ člen $(-1)^{n+1}$, kvůli větší přehlednosti grafů, které budou následovat.

## 3.2 Analýza integrálu $I_m^n(x)$

V této a v několika po ní následujících sekcích se pokusíme kombinací kvalitativních a kvantitativních analýz lépe pochopit chování integrálu $I_m^n(x)$. Začneme analýzou chování integrálu pro různá $x$ pro nějaké konkrétní hodnoty $m$, $n$ a $A$. Pro srozumitelný popis situace bude vhodné rozdělit si integrand

$$\sqrt{\frac{m!}{n!}}\cos\left(A\sqrt{2}p-(n-m)\arctan\frac{p}{x}\right)\cdot e^{-p^2-\frac{x^2}{2}}(x^2+p^2)^{\frac{n-m}{2}}L_m^{n-m}(x^2+p^2) \tag{3.60}$$

v (3.58) na dvě části. První bude 'cosinová' část, tj. výraz:

$$\cos\left(A\sqrt{2}p-(n-m)\arctan\frac{p}{x}\right). \tag{3.61}$$

Druhá část bude poté tvořena přidruženým Laguerrovým polynomem a zbylými členy, tj. budeme pracovat s výrazem

$$\sqrt{\frac{m!}{n!}}e^{-p^2-\frac{x^2}{2}}(x^2+p^2)^{\frac{n-m}{2}}L_m^{n-m}(x^2+p^2). \tag{3.62}$$

Budeme také používat aproximaci $A\approx\sqrt{m+n}$, která platí z následujících důvodů. Celkový počet fotonů na výstupech je pro $A\to\infty$ velice blízký počtu fotonů v LO, protože ten dodává dominantní část fotonů ve srovnání se signálním stavem. Jaký je střední počet fotonů ve stavu LO můžeme snadno zjistit. Platí (již dříve jsme zvolili $|\alpha\rangle=|-A\rangle$)

$$\langle\alpha|\hat{a}^\dagger\hat{a}|\alpha\rangle=|\alpha|^2=A^2. \tag{3.63}$$

Někdo by mohl namítnout, že pravděpodobnostní rozdělení má určitou střední kvadratickou odchylku, ale snadno se můžeme přesvědčit, že platí $(\Delta n)^2=A^2$, a tudíž můžeme pro případ $A\to\infty$ bez obav psát $A\approx\sqrt{m+n}$, jelikož relativní šířka Poissonovského rozdělení se ze zvětšujícím se A zmenšuje.

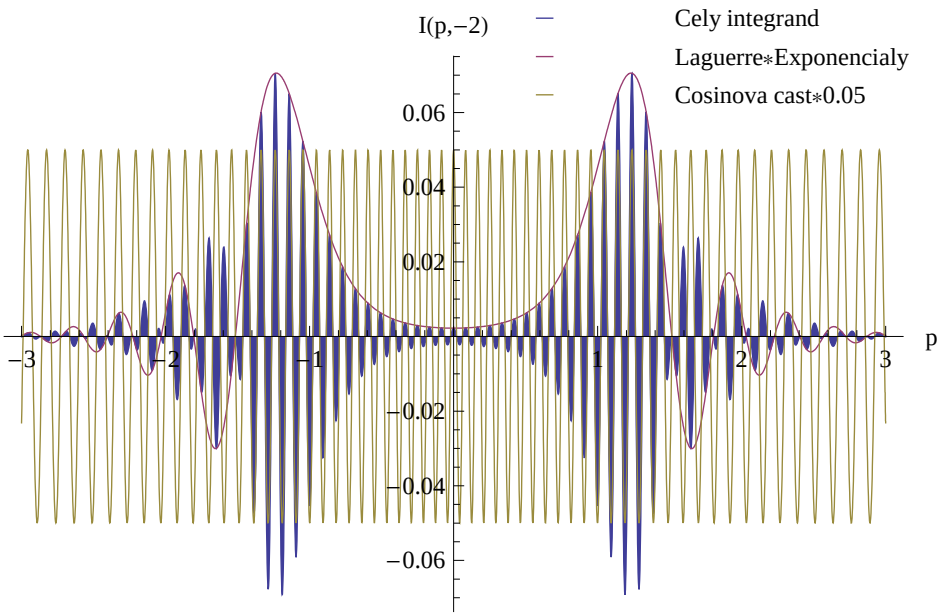
Následující grafy budou znázorňovat průběhy výrazů (3.60), (3.61) a (3.62). Okrovou barvou bude vykreslena část (3.61). Fialovou barvou bude vykrelena část (3.62). Plně bude poté vykreslena plocha pod funkcí (3.60), která je rozhodující pro konečnou váhu s jakou budeme brát $\psi(x)$ pro dané zafixované $x$.

Na obr. 3.1 můžete vidět chování výše uvedených výrazů pro hodnoty $n=350$, $m=270$ a $A\approx\sqrt{m+n}$ při zafixované hodnotě $x=-2$. Pro dané počty fotonů na výstupních fotodetektorech, předpovídá článek [3] měření kvadratury $x\approx 2.27$. Jak je vidět, průběh integrandu má rychle oscilující charakter, tudíž po provedení integrace přes $p$ pro dané $x=-2$ nemůžeme očekávat situaci, kdy by bylo $\psi(-2)$ bráno s příliš velkou vahou. Naopak se zdá, že oscilace jsou natolik "divoké", že v podstatě násobíme $\psi(-2)$ nulou.

Situace se příliš nezmění ani pro další $x$, která jsou "dostatečně" daleko od předpovídané hodnoty, jak můžete vidět na obr. 3.2, který znázorňuje situaci pro $x=6$ a nezměněné koeficienty $m$, $n$ a $A$. Oscilace sice již není tak divoká, což je dáno změnou znaménka ve

výrazu (3.61), kde se změna v $p$ v prvním členu (obsahujícím $A$) částečně kompenzuje se změnou $p$ v členu druhém (s arkustangens), ale i přesto je možné soudit, že po integraci tohoto výrazu neobdržíme žádný významný výsledek.

Vše se ovšem radikálně změní, pokud zafixujeme $x$ 'poměrně' blízko předpovídané hodnotě, tj. $x \approx 2.27$. Tuto situaci můžete vidět na obr. 3.3. Oba dva členy v integrandu

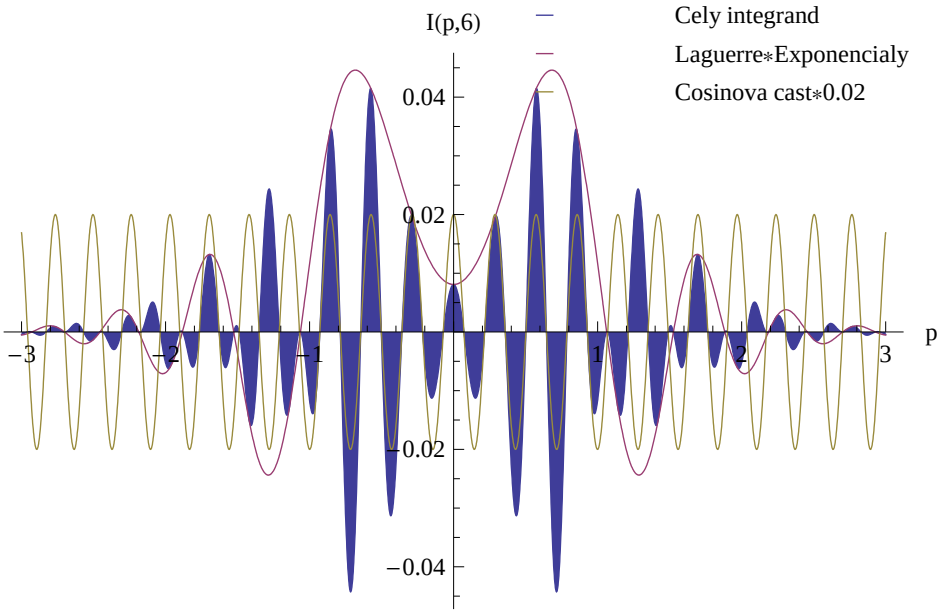



Obrázek 3.1: Pro $x = -2$ má integrand rychle oscilující charakter, tudíž po integraci dostáváme téměř nulu.

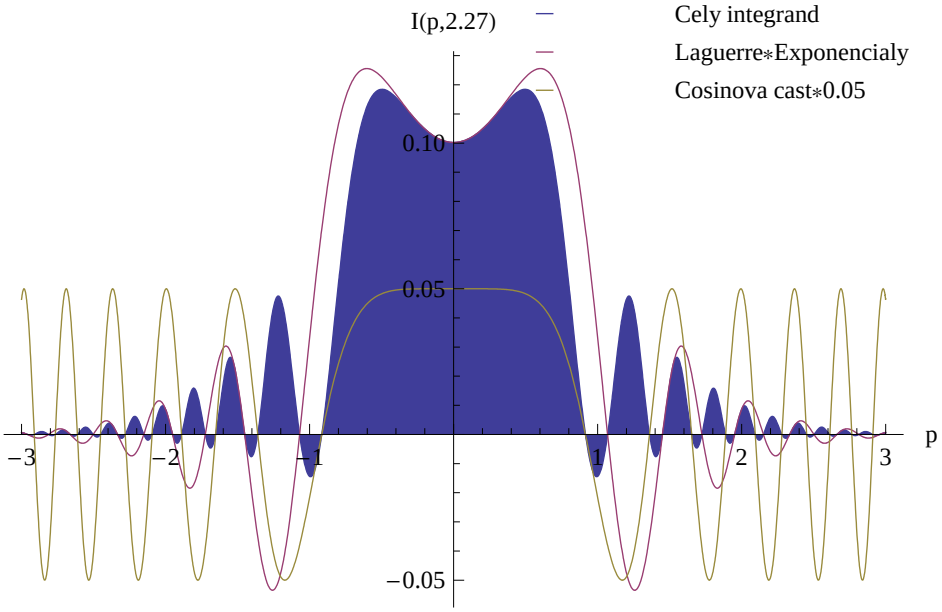
začnou pro danou hodnotu $x$ jakoby kooperovat. Člen (3.62) vytvoří široký peak v místě, kde se (3.61) stává v podstatě konstantní. Skoro bychom mohli konstatovat, že jak člen (3.62), tak i člen (3.61) jsou ve fázi a vzájemně se "chytře" ovlivňují takovým způsobem, že výsledná plocha pod (3.60) je skutečně významná, zejména provedeme-li konfrontaci s grafy pro jiná $x$. Navíc část (3.62) nabývá mnohem větších maximálních hodnot, než v předchozích případech.

Zajímavá situace nastává pro $x \approx -2.27$. V této zrcadlové situaci je sice člen (3.62) stejný jako v případě $x = 2.27$ (díky sudosti (3.62) vůči $x$), ale člen (3.61) vykazuje divoké oscilace. Je to dáno tím, že funkce arkustangens je lichá a tudíž se změna znaménka u $x$ přenese na změnu znaménka v argumentu cosinu, což vede místo zeslabení oscilací naopak k jejich zesílení. Celá situace je ilustrována na obr. 3.4.

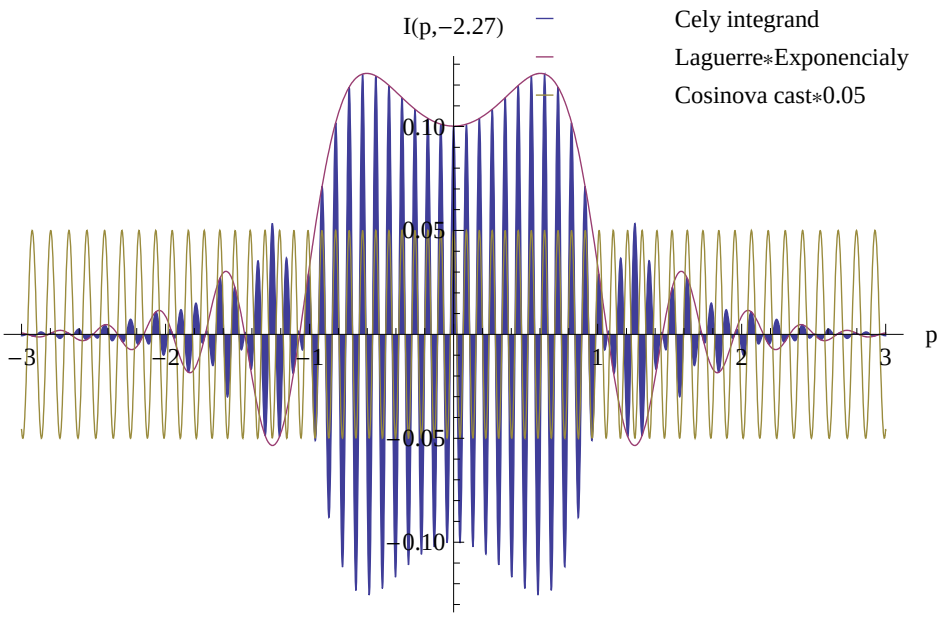
Část (3.61) má také velice zajímavé chování. Pro $x = (n-m)/\sqrt{2(n+m)}$ totiž okolo počátku dojde k vymizení oscilací a (3.61) se stává v podstatě konstantní. Důvod pro tento průběh je snadné vysvětlit. Stačí si uvědomit, že v případě $p/x \ll 1$ platí $\arctan(p/x) \approx p/x$




Obrázek 3.2: Pro $x = 6$ integrand neosciluje tak rychle jako na obr. 3.1, ale přesto po integraci nedostáváme pro dané $x$ žádný významný příspěvek.




Obrázek 3.3: Pro $x = 2.27$ se integrand chová velice 'příznivě'. Zdá se, že po integraci dostaneme opravdu významný příspěvek pro danou volbu $x$.




Obrázek 3.4: Pro $x = -2.27$ se díky změně znaménka v argumentu (3.61) neopakuje situace pro případ $x = 2.27$.

a tudíž můžeme psát

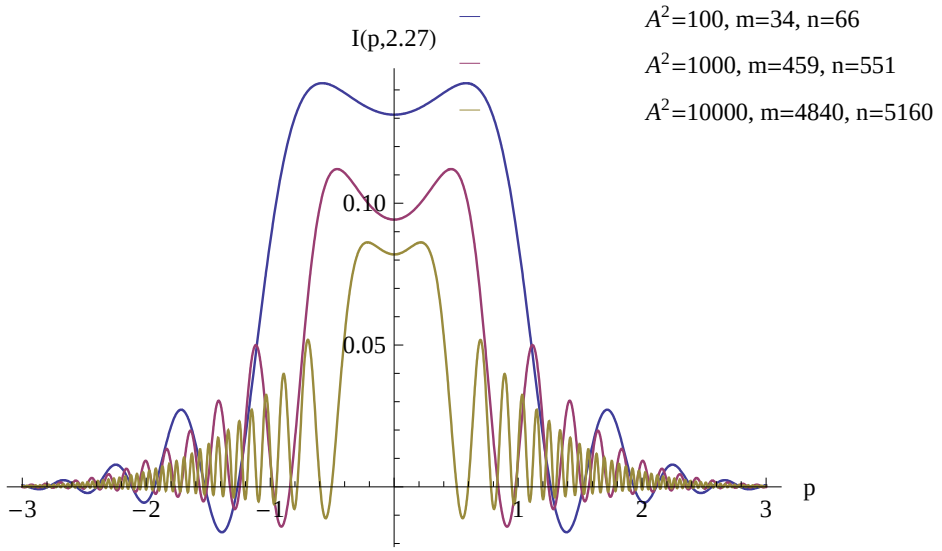
$$\cos\left(p\left[A\sqrt{2} - (n-m)\frac{1}{x}\right]\right), \tag{3.64}$$

z čehož je jasně vidět, že pro $x = (n-m)/\sqrt{2(n+m)}$ dostaneme $\cos(p\cdot 0)$, což je konstantní funkce. To, že je v cosinové části obsažený arkustangens vede k nelineárnímu chování, které se projeví prostě tím, že 'konstantní' úsek v (3.61) je omezený na malé okolí kolem počátku.

Předešlé úvahy by mohly svádět k vyslovení závěru, že je vymizení oscilací v (3.61) zodpovědné za to, že po integraci dostaneme jediný významný příspěvek pro $x = (n-m)/\sqrt{2(n+m)}$, zatímco příspěvek pro jiná $x$ bude naprosto zanedbatelný. Je pravda, že pro $x$ různá od $(n-m)/\sqrt{2(n+m)}$ budou oscilace velice rychlé. Navíc při $A \to \infty$ stačí již drobná odchylka od $(n-m)/\sqrt{2(n+m)}$ k tomu, aby se rychlé oscilace objevily. Ovšem bylo by poněkud unáhlené činit takovéto závěry, jelikož část (3.62) zjevně osciluje v okolí inkriminovaného $x$ 'podobně' rychle jako cosinová část. Oscilace v (3.61) by musely být mnohem rychlejší než v (3.62), abychom mohli říci, že oscilace v (3.61) vedou k tomu, že je integrand po integraci nulový. Celkový výsledek, zdá se, určuje spíše než individuální chování jedné nebo druhé části v integrandu, společné chování obou přítomných částí.

Celý integrál vykazuje také určitý typ škálování. Nehledě na to, jaké $m$ a $n$ zvolíme, integrand se okolo inkriminovaného místa, tj. pro $x = (n-m)/\sqrt{2(n+m)}$ chová vždy velice podobně. To znamená, že (3.61) a (3.62) se 'sejdou' takovým způsobem, že zmaximalizují plochu pod grafem. Toto chování můžete vidět na obr. 3.5, kde je pro zajímavost srovnáno chování integrandu přibližně okolo bodu $x = (n-m)/\sqrt{2(n+m)}$ pro tři různé počty

fotonů.




Obrázek 3.5: Grafy pro různé hodnoty $m$, $n$ a $A$, ovšem dávající stejnou hodnotou $x = (n-m)/\sqrt{2(n+m)}$. Grafy jsou okolo inkriminovaného $x$ velice podobné.

Ačkoli nám tedy výraz (3.57) dává jakousi nápovědu ohledně místa, kde můžeme očekávat ostré maximum po zintegrování integrandu a tato nápověda přesně koresponduje se závěry [3], přesto není možné říci, že bychom tuto skutečnost dokázali pro $A \to \infty$. Uvedené výsledky sice vizuálně potvrzují dříve odhalené skutečnosti týkající se vyvážené homodynní detekce, avšak postrádají matematickou rigoróznost. V následujícím se pokusíme o trochu matematičtější analýzu situace, i když složitá a komplexní povaha integrandu nám naší pozici výrazně komplikuje.

## 3.3 Je pro $A \to \infty$ měření lokalizovanější?

Otázka nyní zní, jestli se peak funkce $I_m^n(x)$ pro inkriminované $x$ zužuje se zvětšujícím se $A$. Provedení numerické analýzy tohoto problému rozebereme později. V této fázi bychom chtěli zužování peaku názorně ilustrovat analyticky pro obecné $A$.

Analyzovat integrand jako celek není příliš efektivní přístup. Ovšem díky podobnému naškálování jednotlivých částí integrandu při změně parametrů se zdá, že by nám informaci o změně šířky peaku mohla poskytnout i samotná cosinová část. Navíc můžeme pro zjednodušení zanedbat i arkustangens, protože nás nyní bude zajímat pouze to, jak rychle dojde ke změně v cosinové části od 'konstantnosti' k rychlým oscilacím. Zajímá nás tedy, jaký je přírůstek ke $g(x)$

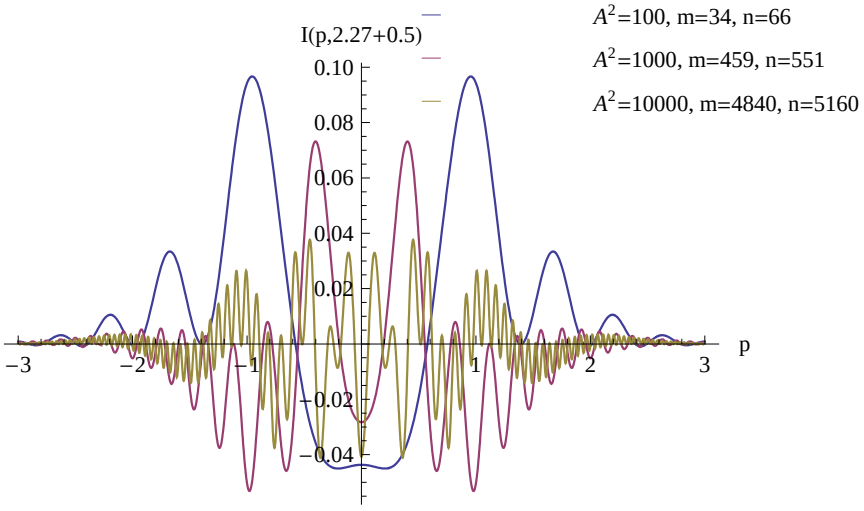
$$g(x) = A\sqrt{2} - \frac{n-m}{x} \tag{3.65}$$

v závislosti na změně $x$. Platí

$$\mathrm{d}g(x) = \frac{n-m}{x^2}\,\mathrm{d}x. \tag{3.66}$$

Zdá se tedy, že pro zafixované $x$ je změna $\mathrm{d}g(x)$ přímo úměrná členu $n-m$. Jak rychle se mění tento člen? Protože platí $x = (n-m)/\sqrt{2}A$, pak pro zafixované $x$ se člen $n-m$ zřejmě mění úměrně $A$.

Celou diskuzi můžeme tedy uzavřít tvrzením, že změna $\mathrm{d}g(x)$ při změně $\mathrm{d}x$ je přímo úměrná nárůstu amplitudy lokálního oscilátoru. To se ve výsledku projeví tak, že pro dané $x$ a narůstající $A$ se při vychýlení o nějaké $\mathrm{d}x$ objeví větší oscilace u členů s větším $A$. Toto chování můžete vidět na obr. 3.6 Je jasně vidět, že oscilace jsou pro posunutí o $\mathrm{d}x = 0.5$




Obrázek 3.6: Porovnání průběhu oscilací pro $x + \mathrm{d}x \approx 2.27 + 0.5$ pro narůstající počty fotonů.

rychlejší pro větší $A$. Přítomnost těchto oscilací, již pro malé vychýlení z inkriminovaného místa, je indikací toho, že peak funkce $I_m^n(x)$ bude pro rostoucí $A$ užší.

## 3.4 Člen obsahující přidružený Laguerrův polynom

V tomto oddíle obrátíme svoji pozornost na chování výrazu (3.62), protože jeho analýza nám poodkryje důvody, proč a kde tento člen nabývá velkých hodnot kolem počátku, což v součinnosti s cosinovým členem dává významný příspěvek k $I_m^n(x)$ pouze pro určitá $x$.

Především, podle (3.53), můžeme výraz (3.62) přepsat takto:

$$e^{-\frac{p^2}{2}}\left\langle n\middle|\hat{D}\left(\sqrt{x^2+p^2}\right)\middle|m\right\rangle = e^{-\frac{p^2}{2}}\sqrt{\frac{m!}{n!}}e^{-\frac{1}{2}(x^2+p^2)}(x^2+p^2)^{\frac{n-m}{2}}L_m^{n-m}(x^2+p^2). \tag{3.67}$$

Gaussovskou obálku $e^{-\frac{p^2}{2}}$ prozatím ponecháme stranou a budeme zkoumat člen

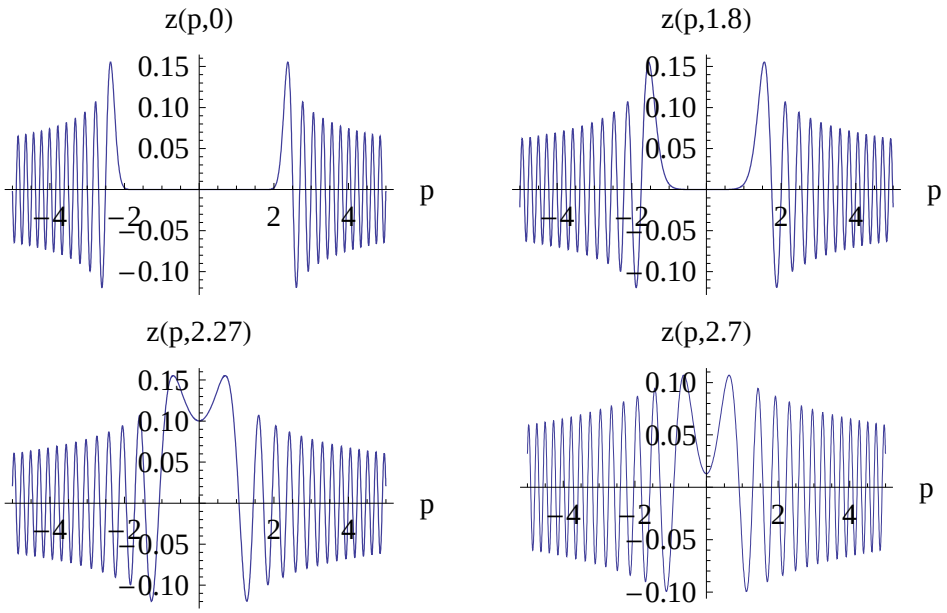
$$z(p,x) = \left\langle n \middle| \hat{D}\left(\sqrt{x^2+p^2}\right) \middle| m \right\rangle = \sqrt{\frac{m!}{n!}} e^{-\frac{1}{2}(x^2+p^2)} (x^2+p^2)^{\frac{n-m}{2}} L_m^{n-m}(x^2+p^2). \tag{3.68}$$

Vidíme, že člen (3.68) je v podstatě amplitudou pravděpodobnosti přechodu mezi posunutým Fockovým stavem $|m\rangle$ a stavem $|n\rangle$. Vzpomeňme si nyní na vzorec (2.74). Jestliže bychom vzali dva čisté stavy $\hat{\rho}_1 = |\psi_1\rangle\langle\psi_1|$ a $\hat{\rho}_2 = |\psi_2\rangle\langle\psi_2|$, pak můžeme psát

$$|\langle\psi_1|\psi_2\rangle|^2 = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} W_1(x,p) W_2(x,p)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}p, \tag{3.69}$$

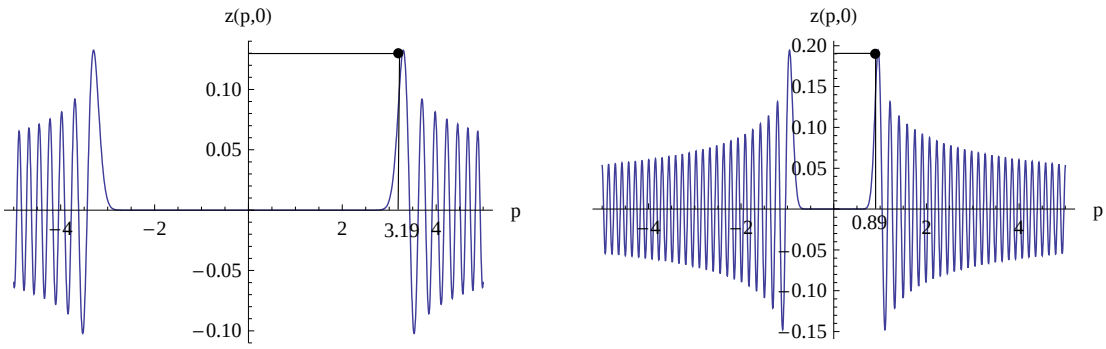
z čehož plyne, že amplituda pravděpodobnosti přechodu mezi dvěma stavy závisí na Wignerových kvazidistribucích jednotlivých stavů. Tohoto jevu můžeme s výhodou využít v nadcházející analýze.

Pro získání představy o chování členu (3.68) uvádíme obr. 3.7, který znázorňuje průběh (3.68) pro několik různých $x$ opět pro případ $m = 270$ a $n = 350$. Situace je opravdu




Obrázek 3.7: Výraz (3.68) pro různá $x$ pro případ $m = 270$, $n = 350$.

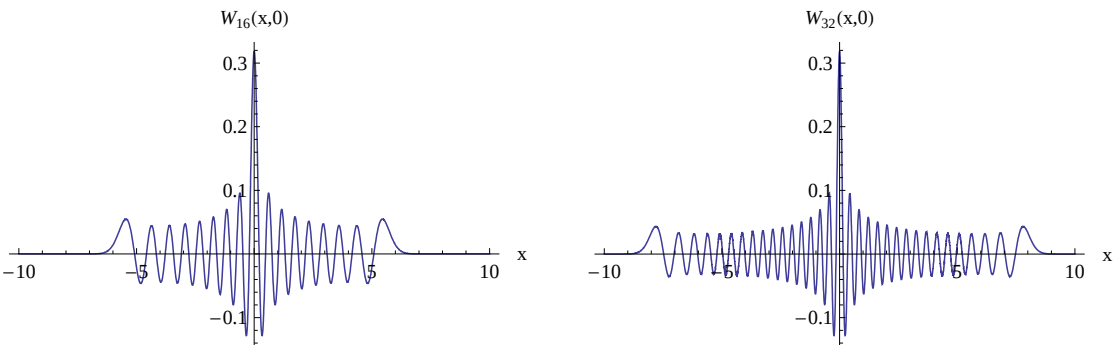
zajímavá. Pro $x = 0$ nastávají ostrá maxima pro $p \approx \pm 2.27$. O tom, že tento výsledek není rozhodně pouhou šťastnou shodou náhod, se můžete přesvědčit na obr. 3.8, kde je simulace pro $m = 350$, $n = 480$ resp. $m = 480$, $n = 520$ fotonů. Pro takovéto počty fotonů bychom měli měřit kvadraturu $x \approx 3.19$ resp. $x \approx 0.89$, což téměř přesně souhlasí s obr. 3.8, ale v proměnné $p$ (proč tomu tak je se dozvíme za chvíli). Navíc můžete na obr. 3.7 vidět, že se zvětšováním $x$ ve výrazu (3.68) dochází k přibližování maxim k počátku a pro




Obrázek 3.8: Výraz (3.68) pro $m = 350$, $n = 480$ dávající ostré maximum pro $p \approx \pm 3.19$ a $m = 480$, $n = 520$ s ostrým maximem kolem bodu $p \approx \pm 0.89$.

inkriminované $x$ se dvě maxima 'srazí' a vytvoří kolem počátku široké maximum, které je, jak již jsme dříve avizovali, šikovně sladěné s chováním členu (3.61) a jejich společné chování je zodpovědné za významný příspěvek výrazu (3.60) zintegrovaného podle $p$ pro inkriminované $x$. S dalším zvětšováním $x$ se tato dvě maxima jakoby vzájemně zruší a následuje kolize v pořadí druhých, tentokráte již nižších, maxim a tak to pokračuje stále dál a dál.

Pro pochopení celé situace musíme vědět, jakým způsobem se chová Wignerova kvazidistribuce $W_n(x, p)$ pro Fockovy stavy $|n\rangle$. Díky symetrii můžeme úplnou informaci o podobě $W_n(x, p)$ získat řezem rovinou kolmou na rovinu $xp$ a procházející počátkem. Na obr. 3.9 můžete vidět $W_{16}(x, 0)$ a $W_{32}(x, 0)$. Jak je vidět, kromě úzkého centrálního peaku, mají



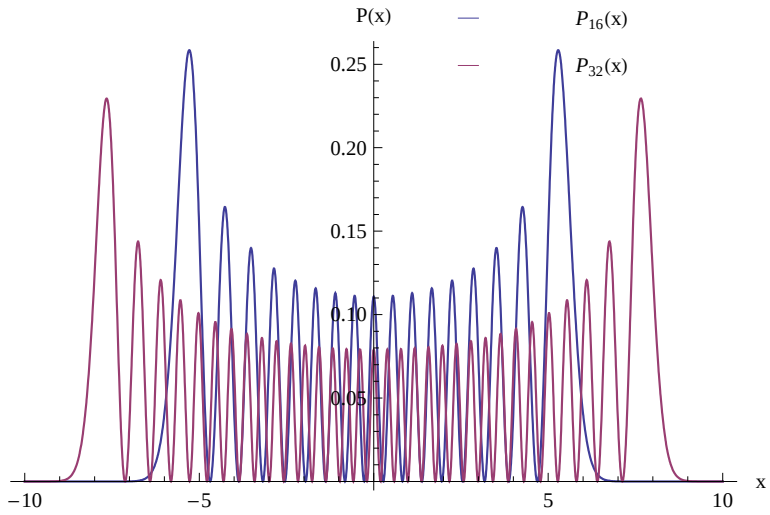

Obrázek 3.9: Řez $W_{16}(x, 0)$ a $W_{32}(x, 0)$.

jak $W_{16}(x, 0)$ tak i $W_{32}(x, 0)$ další, tentokráte široká, maxima v $x \approx \pm\sqrt{2n}$. Tato maxima jsou celkem logická. Když počítáme hustoty pravděpodobnosti v nějakém Fockově stavu, pak právě popsaná místa jsou v blízkém okolí klasické maximální výchylky oscilátoru s danou energií. Protože Hamiltonián harmonického oscilátoru pro velká $n$ (zanedbáme 1/2)

můžeme psát ve tvaru

$$H \approx n \approx \frac{x^2 + p^2}{2}, \tag{3.70}$$

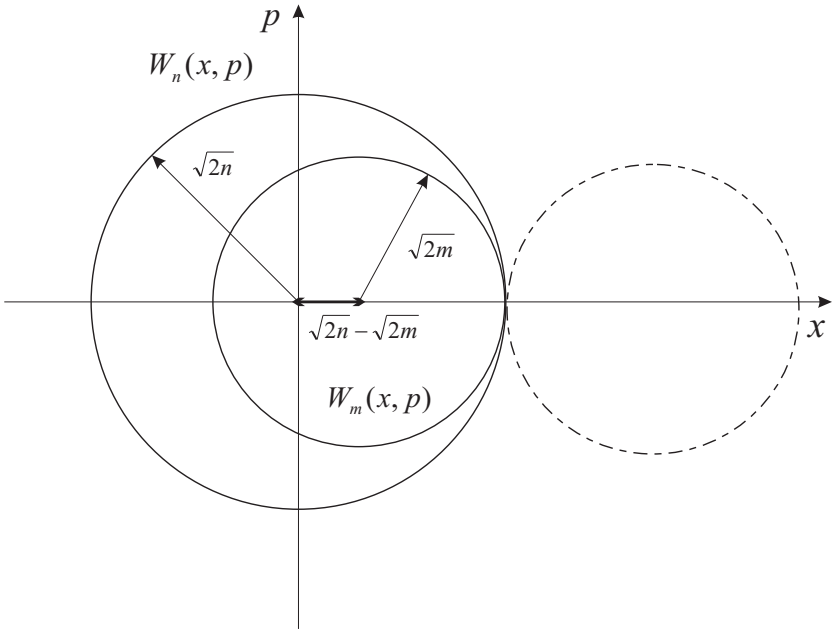
tak pro maximální výchylku dostáváme právě $x \approx \pm\sqrt{2n}$. Hustoty pravděpodobnosti $P_{16}(x)$ a $P_{32}(x)$ můžete vidět na obr. 3.10. Jasně jsou vidět společné vlastnosti obr. 3.10 a




Obrázek 3.10: Hustoty pravděpodobnosti pro $P_{16}(x)$ a $P_{32}(x)$.

obr. 3.9, ale také jejich rozdílnosti. Největší rozdíl spočívá v přítomnosti úzkého centrálního maxima u obr. 3.9, který není na obr. 3.10 přítomný. Toto centrální maximum nám trochu kazí následující úvahu, protože nám neumožňuje jednoznačně a bez pochybností prohlásit, že výraz (3.69), je pro dvě neposunuté Wignerovy kvazidistribuce různých Fockových stavů zanedbatelný a že výrazný příspěvek dostaneme pouze pokud Wignerovy kvazidistribuce určitým způsobem posuneme. Ale i přes tuto nepříjemnost je přínosné diskutovat následující úvahu.

Zdá se, že pro $n \gg 1$, bude, vyjma centrálního maxima Wignerovy kvazidistribuce, důležité již jen široké maximum ve vzdálenosti $x \approx \pm\sqrt{2n}$. V takovém případě bude výraz (3.69) dávat výrazné příspěvky pouze pokud se budou tato dvě široká maxima vzájemně překrývat. Existují dvě možné konfigurace, při kterých toto nastává. Můžete je vidět na obr. 3.11. Z obrázků je myslím zřejmé, že vnitřní dotyk širokých maxim bude dávat větší příspěvky, než dotyk vnější. Ovšem posunutí o $x = \sqrt{2n} - \sqrt{2m}$ není to samé jako posunutí o $x = (n-m)/\sqrt{2(n+m)}$, takže kde je problém? První věcí, kterou si musíme uvědomit, je způsob, jakým se posunutí o nějaké $x$ realizuje v členu (3.68). Již dříve jsme se totiž přesvědčili (3.22), že posunovací operátor, do které vstupuje argument $x$ realizuje posunutí o $\sqrt{2}x$. Tudíž reálně musíme v členu (3.68) za $x$ dosadit $x \approx \sqrt{n} - \sqrt{m}$, abychom Wignerovu kvazidistribuci posunuli o $\Delta x \approx \sqrt{2n} - \sqrt{2m}$. Navíc pro $n, m \gg 1$ a pro velkou amplitudu




Obrázek 3.11: Zdá se, že při vnitřním dotyku, tj. při posunutí o $\sqrt{2n}-\sqrt{2m}$, bude překryv širokých maxim větší, než při vnějším dotyku širokých maxim.

lokálního oscilátoru platí

$$n \approx \frac{A^2}{2} + \epsilon, \qquad m \approx \frac{A^2}{2} + \delta, \tag{3.71}$$

kde $\epsilon, \delta \ll A^2$. Tento výraz je platný díky vztahu (3.63) a díky tomu, že dělič svazku (50/50) rozdělí fotony přibližně půl na půl jen s malými rozdíly. S použitím (3.71) můžeme psát

$$\begin{aligned} x &\approx \sqrt{n}-\sqrt{m} \approx \left(\sqrt{\frac{A^2}{2}+\epsilon}-\sqrt{\frac{A^2}{2}+\delta}\right) = \frac{A}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{1+\frac{2\epsilon}{A^2}}-\sqrt{1+\frac{2\delta}{A^2}}\right) \approx \\ &\approx \frac{A}{\sqrt{2}}\left(\left[1+\frac{\epsilon}{A^2}\right]-\left[1+\frac{\delta}{A^2}\right]\right) = \frac{\epsilon-\delta}{\sqrt{2}A} \approx \frac{n-m}{\sqrt{2}A} \approx \frac{n-m}{\sqrt{2(m+n)}}, \end{aligned} \tag{3.72}$$

což skutečně odpovídá našemu předpokladu. Díky záměnnosti $x$ a $p$ ve vztahu (3.68) tato úvaha zároveň vysvětluje chování na obr. 3.7, protože numericky zjištěná maxima ve vzdálenostech $p = 2.27$, $p = 3.19$ a $p = 0.89$ přesně odpovídají potřebnému posunutí Wignerovy kvazidistribuce, tentokráte ve směru $p$. Zároveň také naše úvaha vysvětluje i důvod 'sražení' dvou maxim po posunutí o inkriminované $x$. Jediná vada na kráse spočívá bohužel právě v přítomnosti úzkého, přesto však velice významného peaku, kolem středu Wignerovy kvazidistribuce, jehož chování, případně možnost zanedbání, se nám bohužel nepodařilo vysvětlit.

## 3.5 Alternativní výpočet

V předcházejícím textu jsme diskutovali výpočet, jehož hlavní krok spočíval v částečném přechodu od souřadnicové báze k impulsové bázi. To nás dovedlo k výrazu, ze kterého bylo možné vyčíst některé charakteristické rysy vyvážené homodynní detekce, konkrétně to, že skutečně ze všech možných hodnot $\psi(x)$ vybírá s mnohem větší vahou ty, které se blíží hodnotě, jež byla určena v článku [3].

Existuje ovšem i alternativní přístup k řešení, jehož úplné dořešení je sice také velice komplikované, ovšem umožňuje nám další vhled do celé problematiky. Ideální je začít u rovnice (3.11) a použít vztah pro funkce harmonického oscilátoru (2.22). Pak můžeme psát

$$\left\langle n \middle| \frac{x-y}{\sqrt{2}} \right\rangle = u_n\left(\frac{x-y}{\sqrt{2}}\right) = \left(\frac{1}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{n!2^n}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4}} H_n\left(\frac{x-y}{\sqrt{2}}\right), \tag{3.73}$$

$$\left\langle m \middle| \frac{x+y}{\sqrt{2}} \right\rangle = u_m\left(\frac{x+y}{\sqrt{2}}\right) = \left(\frac{1}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{m!2^m}} e^{-\frac{(x+y)^2}{4}} H_m\left(\frac{x+y}{\sqrt{2}}\right). \tag{3.74}$$

Po několika jednoduchých algebraických úpravách můžeme amplitudu pravděpodobnosti vyjádřit ve tvaru

$$M_m^n = \pi^{-\frac{3}{4}} \frac{e^{-\frac{A^2}{2}}}{\sqrt{2^{m+n}m!n!}} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) e^{-\frac{x^2}{2}} e^{-\left(y+\frac{\sqrt{2}}{2}A\right)^2} H_m\left(\frac{x+y}{\sqrt{2}}\right) H_n\left(\frac{x-y}{\sqrt{2}}\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \tag{3.75}$$

Nyní použijeme substituci $y + \frac{\sqrt{2}}{2}A = z$ a dostáváme

$$\begin{aligned} M_m^n &= \pi^{-\frac{3}{4}} \frac{e^{-\frac{A^2}{2}}}{\sqrt{2^{m+n}m!n!}} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) e^{-\frac{x^2}{2}} e^{-z^2} H_m\left(\frac{\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}A\right)+z}{\sqrt{2}}\right) \times \\ &\times H_n\left(\frac{\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}A\right)-z}{\sqrt{2}}\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}z. \end{aligned} \tag{3.76}$$

S použitím vztahu

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} H_k(x) H_{n-k}(y) = 2^{\frac{n}{2}} H_n\left(\frac{x+y}{\sqrt{2}}\right) \tag{3.77}$$

uvedeného v [15] můžeme dále psát

$$H_n\left(\frac{\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}A\right)-z}{\sqrt{2}}\right) = 2^{-\frac{n}{2}} \sum_{l=0}^{n} (-1)^l \binom{n}{l} H_{n-l}\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}A\right) H_l(z), \tag{3.78}$$

kde $(-1)^l$ se ve výrazu objevilo díky vztahu (3.30). Podobně pro druhý člen:

$$H_m\left(\frac{\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}A\right)+z}{\sqrt{2}}\right) = 2^{-\frac{m}{2}} \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} H_{m-k}\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}A\right) H_k(z). \tag{3.79}$$

Po vyjádření Hermiteových polynomů obsahujích dvě proměnné pomocí sumy součinů Hermiteových polynomů dostáváme

$$\begin{aligned} M_m^n &= \pi^{-\frac{3}{4}} \frac{e^{-\frac{A^2}{2}}}{2^{m+n}\sqrt{m!n!}} \sum_{l=0}^{n}\sum_{k=0}^{m} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x)(-1)^l \begin{pmatrix} n \\ l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ k \end{pmatrix} e^{-\frac{x^2}{2}} e^{-z^2} \times \\ &\times H_{n-l}\left(x + \frac{\sqrt{2}}{2}A\right) H_l(z) H_{m-k}\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}A\right) H_k(z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z. \end{aligned} \tag{3.80}$$

Nyní můžeme využít podmínku ortogonality pro Hermiteovy polynomy a provést integraci přes $z$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} H_l(z) H_k(z)\,\mathrm{d}z = l!2^l \pi^{\frac{1}{2}} \delta_l^k, \tag{3.81}$$

což vede k následujícímu vztahu

$$\begin{aligned} M_m^n &= \pi^{-\frac{1}{4}} \frac{e^{-\frac{A^2}{2}}}{2^{m+n}\sqrt{m!n!}} \sum_{l=0}^{n}\sum_{k=0}^{m} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x)(-1)^l \begin{pmatrix} n \\ l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ k \end{pmatrix} e^{-\frac{x^2}{2}} \times \\ &\times H_{n-l}\left(x + \frac{\sqrt{2}}{2}A\right) H_{m-k}\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}A\right) l!2^l \delta_l^k\,\mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{3.82}$$

Dále bychom mohli postupovat zcela obecně, ovšem pro zjednodušení zápisu zvolíme pevně $n \geq m$, což nám umožní provést sumaci přes Kroneckerovo delta a obdržíme

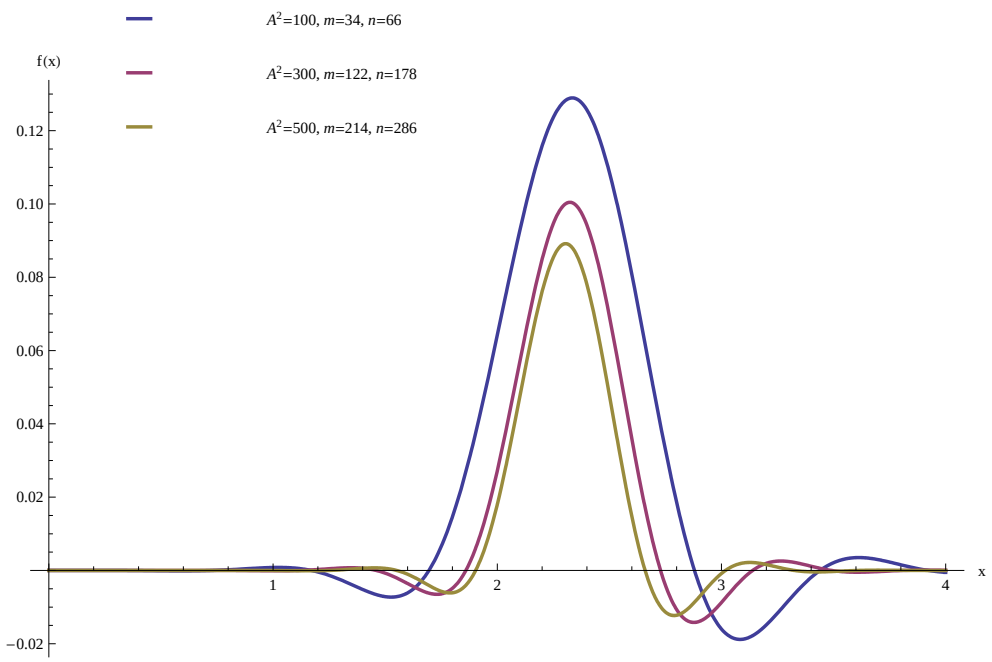
$$\begin{aligned} M_m^n &= \pi^{-\frac{1}{4}} \frac{e^{-\frac{A^2}{2}}}{2^{m+n}\sqrt{m!n!}} \sum_{k=0}^{m} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x)(-1)^k k!2^k \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ k \end{pmatrix} e^{-\frac{x^2}{2}} \times \\ &\times H_{n-k}\left(x + \frac{\sqrt{2}}{2}A\right) H_{m-k}\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}A\right)\,\mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{3.83}$$

Tento výraz je již přístupný numerické analýze. Očekáváme, že $\psi(x)$ by měla být násobená funkcí, která má velice úzký peak, který se dále zužuje, když zvětšujeme amplitudu LO. Podívejme se proto, jaký průběh má funkce daná výrazem

$$\pi^{-\frac{1}{4}} \frac{e^{-\frac{A^2}{2}}}{2^{m+n}\sqrt{m!n!}} e^{-\frac{x^2}{2}} \sum_{k=0}^{m} (-1)^k k!2^k \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ k \end{pmatrix} H_{n-k}\left(x + \frac{\sqrt{2}}{2}A\right) H_{m-k}\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}A\right), \tag{3.84}$$

což je až na znaménka a konstanty opět funkce $I_m^n(x)$, pouze v odlišném matematickém vyjádření.

V analýze můžeme opět použít aproximaci $A \approx \sqrt{m+n}$. Vykreslíme grafy (3.84) pro několik hodnot amplitudy LO, přičemž $m$, $n$ budeme volit přibližně takovým způsobem, abychom vyhověli vztahu $A \approx \sqrt{m+n}$ a zároveň vztahu $x = (n-m)/\sqrt{2(n+m)}$, což je $x$, pro které by měla být váha $\psi(x)$ velká [3]. Jinými slovy pro zvětšující se $A$ požadujeme,




Obrázek 3.12: Šířka peaku funkce (3.84) se pro rostoucí $A$ evidentně zužuje, což je zde zobrazeno pro zafixované $x$ a vhodně se měnící $m$ a $n$.

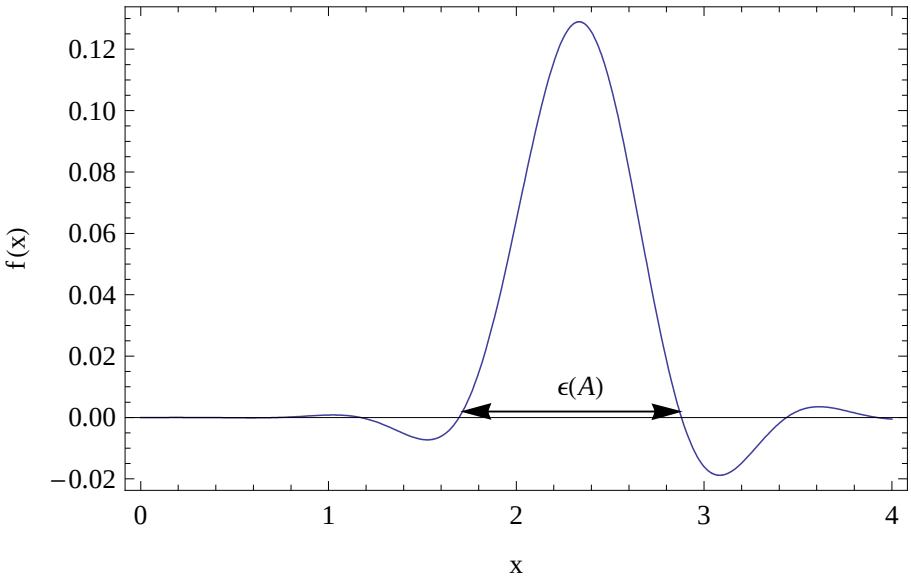
aby peak tvořený funkcí (3.84) byl centrovaný stále na inkriminovaném $x$, protože jedině poté můžeme snadno provést porovnání šířky peaku pro různé velikosti amplitudy LO.

Z obr. 3.12 je jasně vidět, že šířka peaku funkce (3.84) se skutečně snižuje s rostoucí velikostí $A$, což potvrzuje naše předchozí úvahy. Obr. 3.12 byl vytvořen pouze pro tyto tři hodnoty, jelikož celý proces je výpočetně velice náročný. Přesto můžeme vysledovat velice zajímavé chování kolem centrálního peaku. Především je na obou stranách peaku jakási 'propadlina', která není zcela symetrická. Celý peak poté opět vykazuje jakýsi nástin škálování, které je bohužel nešikovně ukryto v parametrech $m$, $n$ a $A$ a tudíž je velice těžké najít podstatu škálování analyticky.

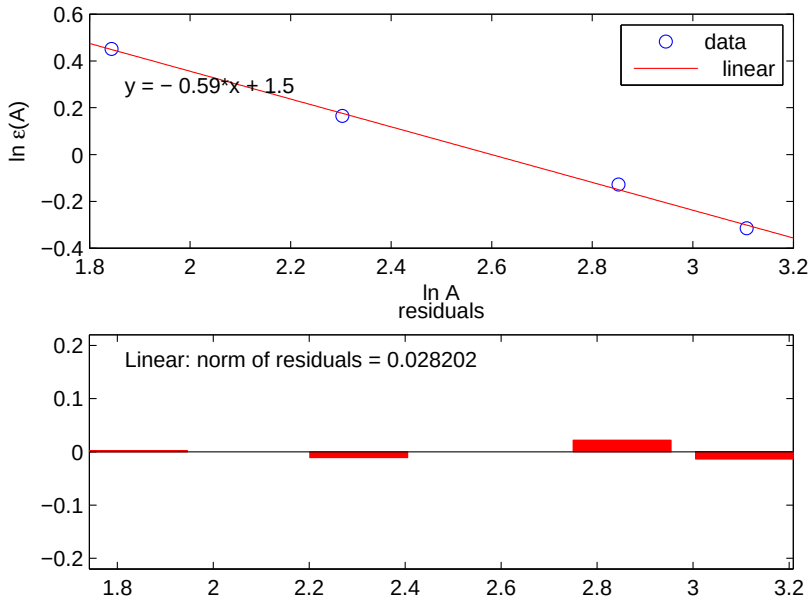
## 3.6 Rozlišení homodynní detekce

V předchozí sekci jsme viděli, že funkce $I_m^n(x)$ má konečnou šířku, označme si ji $\epsilon$, která nějakým způsobem závisí na $A$, tudíž můžeme psát $\epsilon(A)$.

Pokusme se nyní nástínit, jakým způsobem se mění šířka peaku v závisloti na $A$. Šířku funkce (3.84) budeme chápat tak, jak je znázorněno na obr. 3.13. Provedli jsme měření šířky funkce (3.84) pro několik hodnot $m+n$, konkrétně 40, 100, 300 a 500 fotonů. Výsledky můžete vidět na obr. 3.14. Zdá se, že hledaná závislost by mohla mít tvar $\epsilon(A) \approx A^{-0.6}$. Pokusme se nyní tyto výsledky podepřít fyzikální argumentací.




Obrázek 3.13: Definice šířky $\epsilon(A)$ funkce (3.84).




Obrázek 3.14: Šířka $\epsilon(A)$ funkce (3.84) byla získána pro případy $m + n = 40; 100; 300; 500$ fotonů a zafixované $x$. Zdá se, že by mohla platit závislost $\epsilon(A) \approx A^{-0.6}$.

Skutečnost, že má funkce (3.84) šířku $\epsilon(A)$, se projeví tím, že při dané šířce nebudeme schopni rozlišit detaily ve vlnové funkci $\psi(x)$ menší než řádově $\epsilon(A)$. Tyto detaily se širokým peakem jednoduše vyhladí. Z toho plyne, že při určité amplitudě LO má BHD konečné rozlišení. Signální stavy, které mají ve vlnové funkci $\psi(x)$ detaily menší než řádově $\epsilon(A)$, nebudeme schopni při dané amplitudě $A$ dobře změřit. Naopak signální stavy, které takové detaily ve vlnové funkci $\psi(x)$ nemají, budeme schopni změřit dobře. To ale znamená, že musíme poupravit naše chápání ohledně toho, kdy BHD měří dobře signální stav. Podmínka $A \to \infty$ je sice pravdivá, ale do značné míry velice hrubá. Zdá se, že postačující podmínkou pro dobré změření stavu je pouze to, aby šířka peaku $\epsilon(A)$ byla mnohem menší než detaily na vlnové funkci $\psi(x)$. Jedině poté budeme schopni signální stav dobře změřit. V článku [3] byla přitom také odvozena přesnější podmínka toho, kdy BHD měří efektivně kvadraturu signálního stavu. Postačující podmínka je

$$A \gg \langle \hat{n} \rangle, \tag{3.85}$$

kde $\langle \hat{n} \rangle$ je střední počet fotonů v signálním stavu. Nabízí se otázka, jestli naše podmínka říkající, že šířka $\epsilon(A)$ musí být při dobrém měření mnohem menší než detaily ve vlnové funkci signálního stavu, není náhodou pouze jinak formulovaná podmínka (3.85). Kdyby tomu tak skutečně bylo, dávalo by to hlubší smysl vztahu (3.85). Také by to napomohlo jeho názornějšímu chápání. Proto uvažujme následující jednoduchou úvahu.

Jestliže má vlnová funkce detaily řádu $\epsilon(A)$, pak má nenulovou pravděpodobnost mít hybnost řádu $1/\epsilon(A)$. Platnost tohoto tvrzení plyne z následujícího. V případě, kdy máme detaily $\epsilon(A)$ v nějaké funkci, pak ve fourierově obraze této funkce musí být nějaký příspěvek kolem $1/\epsilon(A)$, protože právě tento příspěvek má vlnovou délku odpovídající detailům řádu $\epsilon(A)$ v původní funkci. To ale znamená, že máme nenulovou pravděpodobnost mít energii $1/2\epsilon^2(A)$, což plyne ze vztahu (3.70). Navíc ze vztahu (3.70) plyne, že máme nenulovou pravděpodobnost mít ve stavu $1/2\epsilon^2(A)$ fotonů. Tento stav nebudeme schopni příliš dobře změřit pokud

$$A \approx \langle \hat{n} \rangle. \tag{3.86}$$

Jestliže nyní dosadíme za $\langle \hat{n} \rangle = 1/2\epsilon^2(A)$, vidíme, že přibližně platí

$$\epsilon(A) \approx \frac{1}{\sqrt{2A}}, \tag{3.87}$$

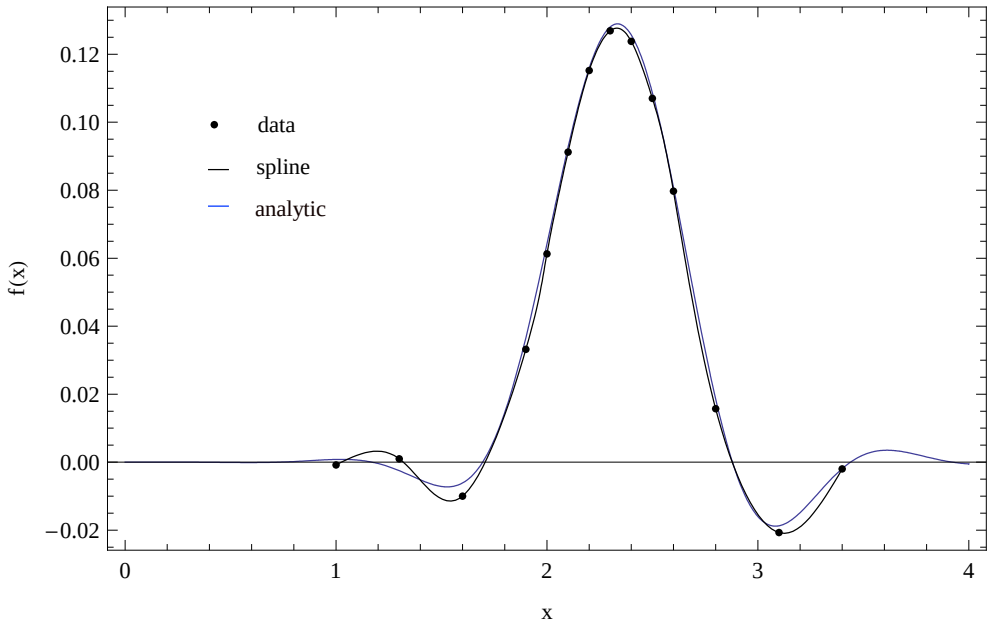
což téměř přesně souhlasí s tím, co jsme již zjistili, tj. $\epsilon(A) \approx A^{-0.6}$.

Na tomto místě je nutné podotknout, že výše uvedený odhad má jeden nedostatek. Předně, podmínka (3.85), je formulována pro střední počet fotonů v signálním stavu, zatímco náš výpočet zahrnoval pouze ty fotony, které přispívají k určitým detailům. Fotony zodpovědné za hrubší detaily jsme do našeho výpočtu nezahrnuli. To ale nic nemění na skutečnosti, že $A$ musí být mnohem větší než $1/2\epsilon^2(A)$, abychom detaily řádu $\epsilon(A)$ odhalili. Fotonů ve stavu popsaném vlnovou funkcí $\psi(x)$, která má detaily řádu $\epsilon(A)$, totiž určitě nebude méně než $1/2\epsilon^2(A)$. Zdá se tedy, že naše podmínka a podmínka (3.85) jsou skutečně velmi těsně provázány.

## 3.7 Srovnání obou přístupů

Proveďme nyní stručnou rekapitulaci a srovnání obou přístupů.

První přístup nám poskytl několik vhledů a částečných odpovědí na otázku pro jaká $x$ budeme muset $\psi(x)$ brát s velkou vahou. Na několika místech se ukázalo, že to bude právě $x = (n-m)/\sqrt{2(n+m)}$, což naprosto souhlasí s dřívějšími poznatky o vyvážené homodynní detekci. Dokonce se nám podařilo, i když ne zcela rigorózním způsobem, dokázat, že pro rostoucí $A$ se bude peak (3.58) zužovat.




Obrázek 3.15: Data byla získána z výrazu (3.58) pro několik $x$ a poté proložena splinem. Pro srovnání je uveden odpovídající graf z obr. 3.12. Můžeme jasně vidět stejný průběh obou výrazů.

Druhý přístup nás pak dovedl poměrně brzy k výrazu, jehož numerické zpracování jednoznačně ukázalo vliv rostoucího $A$ na šířku peaku, který je zodpovědný za výběr $\psi((n-m)/\sqrt{2(n+m)})$ a dokonce jsme byli schopni určit, jakým způsobem závisí šířka funkce (3.84) na amplitudě LO.

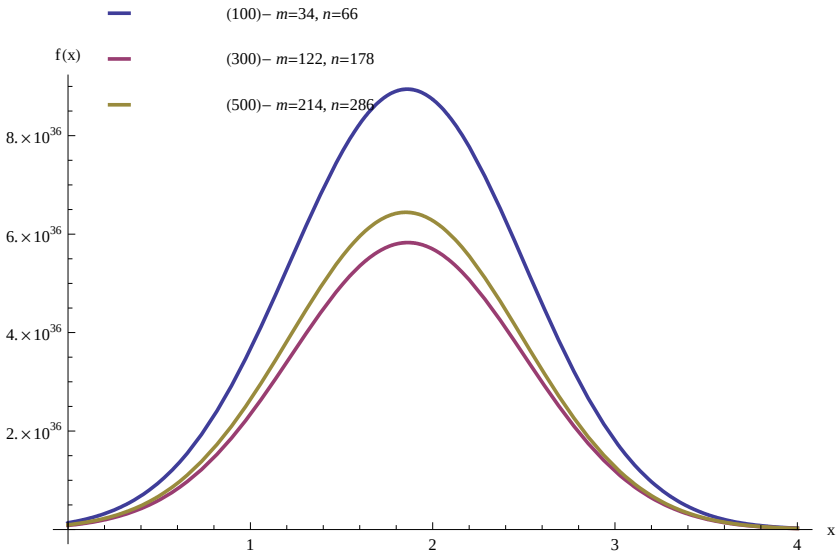
Také jsme díky dvěma různým přístupům k problému dospěli k zajímavému matematickému vztahu (až na znaménka), který se nám nepodařilo nikde nalézt. Výraz (3.58) se musí rovnat výrazu (3.84). Že tomu tak skutečně je, se můžete přesvědčit na obr. 3.15.

Ovšem aproximaci těchto výrazů pro $A \to \infty$ se nám nepodařilo ani v jednom případě realizovat. O problémech s tímto spojených bude pojednávat následující sekce.

## 3.8 Aproximace = komplikace

Na tomto místě bych rád zodpověděl otázku, která možná vyvstala na mysli pozornému čtenáři. Především jsme hned zpočátku konstatovali, že výpočty nás na prvním místě zajímají pro velkou amplitudu LO, tedy pro případ $A \to \infty$. Jak je tedy možné, že jsme téměř nikde nepoužili žádnou aproximaci? Odpověď je jednoduchá. Nepodařilo se nám přijít na žádnou aproximaci, která by nám poskytla zjednodušení výpočtů a zároveň zachovala informaci o měření kvadratury. Jakkoli byla aproximace jemná a na první pohled pevně podepřená matematickou argumentací, vždy se nakonec ukázalo, že její provedení vede ke ztrátě hledané informace.

Situace ohledně aproximací je obtížná hned z několika důvodů. Především se zdá být celý integrál charakterizující amplitudu pravděpodobnosti $M_m^n$ neuvěřitelným způsobem přesně 'naladěn' a jakýkoli zásah do jeho matematické struktury ve všech případech nevyhnutelně vedl k jeho 'rozladění' a ztrátě informace. Za druhé jsou samotné výrazy velice komplikované struktury s rychle oscilujícím průběhem a nakonec je třeba brát v úvahu také fakt, že při nějakém limitním případu pro velké $A$ musí být velké také $m$ a $n$, což způsobuje nemalé problémy.




Obrázek 3.16: Po aproximaci $H_n(x) \approx 2^n x^n$ ztrácí funkce (3.84) své charakteristické chování - tj. peak se nezužuje při rostoucím $A$, střed peaku je posunutý na jiné místo atd.

Příkladem může být vzorec (3.84). Na první pohled by se mohlo zdát, že Hermiteovy polynomy posunuté do nekonečna, ve spojení s přítomoností členu $e^{-\frac{x^2}{2}}$ budou dávat zajímavý příspěvek pouze v okolí počátku, kde je ale možné Hermiteovy polynomy posunuté o vzdálenost $A \approx \pm\infty$ velmi dobře aproximovat pouze členem nejvyššího stupně, tj.

$H_n(x) \approx 2^n x^n$. To by ovšem byl příliš ukvapený krok. Tato aproximace je platná pro posunuté Hermiteovy polynomy nízkého řádu, avšak pro Hermiteovy polynomy řádu $n$ nebo $m$ a za předpokladu, že opět přibližně platí $A \approx \sqrt{m+n}$, se oscilace Hermiteových polynomů dostanou až k počátku, což implikuje přítomost dalších, nižších členů v polynomiálním rozvoji. Při použití takovéto aproximace na funkci (3.84) bychom již nedostali pro větší $A$ užší peak. Navíc je střed peaku v jiném bodě než $x = (n-m)/\sqrt{2(n+m)}$. Numerickou simulaci provedenou pro různé hodnoty $m$ a $n$ pro takovýto případ můžete vidět na obr. 3.16.

# Kapitola 4

# Závěr

Byl proveden výpočet amplitudy pravděpodobnosti $M_m^n$ naměření $m$ a $n$ fotonů na výstupních fotodetektorech při vyvážené homodynní detekci v souřadnicové reprezentaci a to dvěma odlišnými způsoby. Oba výpočty byly v souřadnicové reprezentaci provedeny vůbec poprvé. Původním cílem práce bylo tímto výpočtem dokázat, že při $A \to \infty$ platí $M_m^n \propto \psi(n - m/\sqrt{2(m+n)})$. Ukázalo se ovšem, že souřadnicová reprezentace není pro tento úkol právě nejšťastnější volbou, jelikož výrazy, ke kterým jsme po zdlouhavých a komplikovaných výpočtech dospěli, nebyly vhodné pro další analytické úpravy a veškeré aproximace, které jsme aplikovali se nakonec ukázaly jako příliš hrubé. Konečné výrazy, ke kterým jsme došli, jsou tak bez jakýchkoli aproximací.

Závěry obou výpočtů byly podrobně diskutovány pro různá $A$ a na mnoha numerických simulacích bylo nastíněno chování obou výsledků. Z analýz například vyplynulo, že pro velká $A$ skutečně dochází efektivně k měření kvadratury $x = (n - m/\sqrt{2(m+n)})$. Také jsme několika způsoby nahlédli do mechanismu matematického procesu, díky kterému dochází k výběru právě této hodnoty $x$ a odkryli jsme nové skutečnosti týkající se tvaru a dalších charakteristik funkce, která výběr $x$ provádí. Odvodili jsme například, jakým způsobem závisí šířka této výběrové funkce na amplitudě LO a zároveň jsme nastínili důsledky konečné šířky této funkce pro rozlišení homodynní detekce. Také jsme bližším způsobem specifikovali podmínku toho, kdy dojde k dobrému měření signálního stavu vyváženou homodynní detekcí. Ukazálo se, že podmínka $A \to \infty$ je příliš obecná a hrubá a tudíž je možné formulovat podmínku dobrého měření jemněji a přesněji. Provedli jsme srovnání a detailní diskuzi naší podmínky s podmínkou uvedenou v článku [3].

Výpočty v souřadnicové reprezentaci potvrdily skutečnosti, které byly o vyvážené homodynní detekci známy, ale navíc nám poskytly i nové výsledky. Hlavní přínos výpočtů v souřadnicové reprezentaci spočívá především v objasnění problematiky rozlišení homodynní detekce, a to narozdíl od jiných reprezentací, přirozeným a přímým způsobem.

# Odvození Campbell-Baker-Hausdorff formule

Mějme dva operátory $\hat{A}$ a $\hat{B}$, které splňují podmínku

$$\left[\hat{A}, \left[\hat{A}, \hat{B}\right]\right] = \left[\hat{B}, \left[\hat{A}, \hat{B}\right]\right] = 0, \tag{1}$$

tedy $\hat{A}$, $\hat{B}$ komutují s komutátorem $\left[\hat{A}, \hat{B}\right]$, pak platí

$$\begin{aligned} \exp\left(x(\hat{A}+\hat{B})\right) &= \exp\left(x\hat{A}\right)\exp\left(x\hat{B}\right)\exp\left(-x^2\left[\hat{A}, \hat{B}\right]/2\right) \\ &= \exp\left(x\hat{B}\right)\exp\left(x\hat{A}\right)\exp\left(x^2\left[\hat{A}, \hat{B}\right]/2\right). \end{aligned} \tag{2}$$

Předpokládejme nejdříve výsledek výrazu $\exp\left(x\hat{A}\right)\exp\left(x\hat{B}\right)$ ve tvaru nějaké obecné funkce

$$\exp\left(x\hat{A}\right)\exp\left(x\hat{B}\right) = \hat{C}(x) \tag{3}$$

a zderivujme tento výraz podle $x$:

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{C}(x)}{dx} &= \hat{A}\exp\left(x\hat{A}\right)\exp\left(x\hat{B}\right) + \exp\left(x\hat{A}\right)\hat{B}\exp\left(x\hat{B}\right) \\ &= \left(\hat{A} + \exp\left(x\hat{A}\right)\hat{B}\exp\left(-x\hat{A}\right)\right)\hat{C}(x). \end{aligned} \tag{4}$$

Nyní použijeme rovnici (2.54) a dostáváme

$$\frac{d\hat{C}(x)}{dx} = \left(\hat{A} + \hat{B} + \left[\hat{A}, \hat{B}\right]x\right)\hat{C}(x). \tag{5}$$

Samozřejmě také platí

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{C}(x)}{dx} &= \exp\left(x\hat{A}\right)\hat{A}\exp\left(x\hat{B}\right) + \exp\left(x\hat{A}\right)\exp\left(x\hat{B}\right)\hat{B} \\ &= \hat{C}(x)\left(\hat{A} + \exp\left(x\hat{A}\right)\hat{B}\exp\left(-x\hat{A}\right)\right) \\ &= \hat{C}(x)\left(\hat{A} + \hat{B} + \left[\hat{A}, \hat{B}\right]x\right). \end{aligned} \tag{6}$$

Čili $\hat{C}(x)$ komutuje s výrazem v závorkách (a navíc $\hat{A}$ i $\hat{B}$ komutují s $\left[\hat{A},\hat{B}\right]$) a tudíž můžeme diferenciální rovnici zintegrovat a po několika drobných úpravách a s uvážením počáteční podmínky $\hat{C}(0)=1$ dostáváme

$$\hat{C}(x)=\exp\left((\hat{A}+\hat{B})x+\left[\hat{A},\hat{B}\right]/2x^2\right)=\exp\left((\hat{A}+\hat{B})x\right)\exp\left(x^2\left[\hat{A},\hat{B}\right]/2\right). \tag{7}$$

Skutečně tedy platí

$$\exp\left(x(\hat{A}+\hat{B})\right) \;=\; \exp\left(x\hat{A}\right)\exp\left(x\hat{B}\right)\exp\left(-x^2\left[\hat{A},\hat{B}\right]/2\right). \tag{8}$$

V případě $\exp\left(x\hat{B}\right)\exp\left(x\hat{A}\right)=\hat{C}(x)$ pak máme

$$\begin{aligned}\frac{d\hat{C}(x)}{dx} &= \hat{B}\exp\left(x\hat{B}\right)\exp\left(x\hat{A}\right)+\exp\left(x\hat{B}\right)\hat{A}\exp\left(x\hat{A}\right) \\ &= \left(\hat{B}+\exp\left(x\hat{B}\right)\hat{A}\exp\left(-x\hat{B}\right)\right)\hat{C}(x) \\ &= \left(\hat{A}+\hat{B}+\left[\hat{B},\hat{A}\right]x\right)\hat{C}(x) \\ &= \left(\hat{A}+\hat{B}-\left[\hat{A},\hat{B}\right]x\right)\hat{C}(x).\end{aligned} \tag{9}$$

Zintegrováním dospíváme ke vztahu

$$\hat{C}(x)=\exp\left((\hat{A}+\hat{B})x-\left[\hat{A},\hat{B}\right]/2x^2\right)=\exp\left((\hat{A}+\hat{B})x\right)\exp\left(-x^2\left[\hat{A},\hat{B}\right]/2\right). \tag{10}$$

A proto konečně

$$\exp\left(x(\hat{A}+\hat{B})\right)=\exp\left(x\hat{B}\right)\exp\left(x\hat{A}\right)\exp\left(x^2\left[\hat{A},\hat{B}\right]/2\right). \tag{11}$$

# Literatura


[1] D. Bohm: *Quantum Theory*, Dover Publications, Inc., New York, 1989, ISBN 0-486-65969-0

[2] J. von Neumann: *Mathematical Foundations Of Quantum Mechanics*, Princeton University Press, 1955, ISBN 0-691-02893-1

[3] T. Tyc, B. C. Sanders (2004), *J. Phys. A: Math. Gen.* **37**, 7341-7357.

[4] S. L. Braunstein (1990), *Phys. Rev. A* **42, 1**, 474.

[5] H.P. Yuen, J.H. Shapiro (1979), *IEEE Trans. Inf. Therory* **IT-25**, 179.

[6] H.P. Yuen, J.H. Shapiro (1980), *IEEE Trans. Inf. Therory* **IT-26**, 78.

[7] T. Tyc: *Tři problémy z kvantové optiky (Habilitační práce)*

[8] E. P. Wigner (1932), *Phys. Rev* **40**, 749-759

[9] U. Leonhardt: *Measuring the quantum state of light*, Cambridge University Press, 2005, ISBN-10:0521023521

[10] S. Howard, S. K. Roy: *Coherent states of a harmonic oscillator*, Am. J. Phys **55** (12) 1109 , 1987

[11] J. Bertrand, P. Bertrand (1987), *Found. Phys.* **17**, 397.

[12] L. Mandel, E. Wolf: *Optical coherence and quantum optics*, Cambridge University Press, 1995, ISBN 0 521 41711 2

[13] J. Formánek *Úvod do kvantové teorie*, Academia, Praha 2004, ISBN 80-200-1176-5

[14] V.I. Man'ko, A. Wünsche: *Properties of Squeezed-State Excitations*, *arXiv:quant-ph/9612008v1*

[15] *http://mathworld.wolfram.com/HermitePolynomial.html*, vzorec (54)

[16] D.T. Smithey, M. Beck, M.G. Raymer, A. Faridani (1993), *Phys. Rev. Lett.* **70**, 1244.

[17] K. Vogel, H. Risken (1989), *Phys. Rev. A* **40, 5**, 2847.

[18] N. G. Walker (1987), *Journal of Modern Optics* **34**, 15-60.

[19] H.P. Yuen, V. W. S. Chan (1983), *Optics Letters* **8, 3**, 177.

[20] P. L. Kelley, W. H. Kleiner (1964), *Physical Review*, **136, 2A**, 316.

[21] B. Yurke (1985), *Phys. Rev. A* **32, 1**, 312.

[22] S. L. Braunstein, C. M. Caves, G. J. Milburn (1991), *Phys. Rev. A* **43, 3**, 1153.

[23] W. K. Lai, V. Bužek, P. L. Knight (1991), *Phys. Rev. A* **43, 11**, 6323.

[24] U. Leonhardt (1993), *Phys. Rev. A* **48, 4** 3265.

[25] G. M. D'Ariano, C. Macchiavello, M. G. A. Paris (1994), *Phys. Rev. A* **50, 5**, 4298.

[26] V. Bužek, C. H. Keitel, C. L. Knight, *Phys. Rev. A*, **51, 3**, 2575.

[27] G. M. D'Ariano, U. Leonhardt, H. Paul (1995), *Phys. Rev. A* **52, 3**, 1801.

[28] K. Jacobs, P. L. Knight (1996), *Phys. Rev. A* **54, 5**, 3738.

[29] K. Banaszek, K. Wodkiewicz (1997), *Phys. Rev. A* **55, 4**, 3117