

MASARYKOVA UNIVERZITA
Přírodovědecká fakulta

DIPLOMOVÁ PRÁCE
Studium koherenční zrnitosti



Vedoucí diplomové práce:
doc. Mgr. Tomáš Tyc, Ph.D.
Rok odevzdání: 2009

Vypracoval:
Martin Šarbort

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem vytvořil tuto diplomovou práci samostatně pod vedením doc. Mgr. Tomáše Tyce, Ph.D., a že jsem v seznamu použité literatury uvedl všechny zdroje, ze kterých jsem čerpal.

V Brně dne 15. května 2009

Poděkování

Na tomto místě bych rád poděkoval vedoucímu diplomové práce doc. Mgr. Tomáši Tycovi, Ph.D., a konzultantu Mgr. Ondřeji Přibylovi za čas věnovaný konzultacím a za podnětné připomínky a nápady během vzniku této práce.

Abstrakt

Koherenční zrnitost vzniká při rozptylu koherentního světelného svazku na stínítku s drsným povrchem. V prostoru před stínítkem se projevuje v podobě složité struktury jasných a tmavých skvrn. S tímto jevem velmi úzce souvisí tzv. fázové singularity, které obecně vznikají v místech, kde dochází k destruktivní interferenci vln. Tato diplomová práce se věnuje především teoretické analýze vlastností jevu koherenční zrnitosti a s ním souvisejících fázových singularit. Některé teoreticky získané výsledky týkající se jevu koherenční zrnitosti jsou srovnány se závěry provedených experimentů.

Abstract

The speckle pattern is created when a coherent optical beam is scattered off a rough surface. In front of the rough surface a very complicated structure of bright and dark specks can be observed. This effect is closely related to the existence of phase singularities which generally occur at points of destructive interference of waves. This Diploma thesis deals with theoretical analysis of properties of the speckle effect and related phase singularities. Some theoretically achieved results that apply to the speckle effect are compared with conclusions of realized experiments.

Obsah

1	Úvod	1
2	Koherenční zrnitost	3
2.1	Vznik pole koherenční zrnitosti	3
2.2	Základní statistické vlastnosti	4
2.3	Střední velikost zrn v příčném směru	6
2.3.1	Objektivní speckles	6
2.3.2	Subjektivní speckles	11
2.3.3	Experiment	11
2.4	Střední velikost zrn v podélném směru	15
2.4.1	Objektivní speckles	15
2.4.2	Experiment	18
2.5	Testy vlastností lidského oka pomocí koherenční zrnitosti	20
3	Fázové singularity	23
3.1	Vznik fázových singularit	23
3.2	Definice a matematický popis fázových singularit	24
3.3	Tvar plochy konstantní fáze v okolí singulární čáry	26
3.3.1	Hranová singularita	28
3.3.2	Šroubová singularita	30
3.4	Interference rovinných vln	32
3.4.1	Talbotův jev	32
3.4.2	Tři rovinné vlny	34
3.4.3	Čtyři rovinné vlny	35
3.4.4	Pět a více rovinných vln	38
3.5	Křížení singulárních křivek	41
3.5.1	Analytický přístup	42
3.5.2	Jiný přístup – úvahy o symetrii	46
3.6	Chování funkce ψ v okolí singulární čáry	48
4	Laserové svazky obsahující fázovou singularitu	56
4.1	Paraxiální vlnová rovnice	56
4.2	Základní mód laserového svazku	57
4.3	Vyšší módy laserového svazku	59

4.4	První analogie s kvantovou mechanikou	61
4.5	Druhá analogie s kvantovou mechanikou	68
5	Závěr	70

Kapitola 1

Úvod

Koherenční zrnitost je zajímavý fyzikální jev, ke kterému dochází při rozptylu koherentního světelného svazku na stínítku s drsným povrchem. Body stínítka osvětlené dopadající vlnou se podle Huygensova-Fresnelova principu stávají zdroji sekundárních kulových vln, které se šíří do okolního prostoru. Jestliže jsou změny ve výšce povrchu stínítka větší než vlnová délka dopadajícího světla, budou mít jednotlivé sekundární vlny náhodný fázový posun a před osvětleným stínítkem díky interferenci vznikne tzv. pole koherenční zrnitosti. Umístíme-li poblíž osvětleného stínítka ještě druhé, budeme na něm pozorovat rovinový řez pole koherenční zrnitosti v podobě složité struktury jasných a tmavých skvrn.

Jev koherenční zrnitosti byl původně při optickém zobrazování považován za parazitní, v poslední době však nachází stále větší uplatnění ve vědě i průmyslu. Existuje například souvislost mezi tenzorem malé deformace osvětleného povrchu a změnou pole koherenční zrnitosti, čehož se využívá při bezkontaktním měření deformace těles. Metodou korelace polí koherenční zrnitosti je možné měřit další mechanické charakteristiky stavu těles, například rotaci, posunutí či vibrace ve směru normály k povrchu. Své využití nalezl jev koherenční zrnitosti také v lékařství. Pomocí něj je možné odhalit některé vady lidského oka, jako jsou např. krátkozrakost, dalekozrakost či astigmatismus.

S jevem koherenční zrnitosti velmi úzce souvisí tzv. *fázové singularity*, které mohou vznikat při interferenci vln, tedy i v poli koherenční zrnitosti. V místech, kde dochází k destruktivní interferenci, je amplituda výsledné vlny nulová. Fázi v takových bodech nelze definovat, proto se hovoří o fázových singularitách. Tento velmi zajímavý jev rovněž našel své uplatnění, a to především v experimentální laserové optice.

Cílem této práce je prostudovat známé vlastnosti jevu koherenční zrnitosti a v určitých směrech se pokusit o podrobnější popis, než jaký je běžně podáván v literatuře. Platnost některých teoreticky získaných výsledků bychom také chtěli ověřit experimentálně. Další hlavní oblastí našeho zájmu budou zmíněné fázové singularities. V této části práce bychom rovněž kromě studia známých vlastností rádi dosáhli nových poznatků, které dosud v literatuře diskutovány nebyly.

Text práce je rozdělen do pěti kapitol. Po tomto krátkém úvodu se v druhé kapitole budeme zabývat samotným jevem koherenční zrnitosti. Nejdříve podrobněji popíšeme podmínky, za jakých pole koherenční zrnitosti vzniká. Následně uvedeme základní poznatky týkající se statistických vlastností veličin, které budeme při jeho popisu používat.

Dále se budeme věnovat výpočtům a odhadům střední velikosti zrn, která pole koherenční zrnitosti tvoří, a to jak v příčném, tak podélném směru. Přitom využijeme některých postupů podrobně zpracovaných v [1]. Výsledky plynoucí z teoretického popisu také srovnáme s vlastními provedenými experimenty. V poslední části této kapitoly se budeme věnovat principu odhalování vad lidského oka pomocí jevu koherenční zrnitosti.

Ve třetí kapitole se budeme zabývat fázovými singularitami. V první části popíšeme jejich základní vlastnosti, přitom budeme většinou vycházet z [8]. Následovat bude část týkající se interference malého počtu rovinných vln, kdy body s fázovou singularitou leží na tzv. singulárních křivkách, jejichž tvar lze alespoň kvalitativně odvodit z parametrů interferujících vln. Podobných výsledků, jaké jsou uvedeny v původní práci [22], dosáhneme pomocí vlastního počítačového programu, který pro zadáný soubor rovinných vln najde numerickou cestou body se singularitou fáze. Tohoto programu využijeme i při vlastní podrobné analýze problému křížení singulárních křivek v případě interference čtyř rovinných vln se stejnou amplitudou. V poslední části třetí kapitoly se budeme zabývat chováním skalární komplexní funkce, která popisuje výslednou vlnu, v blízkosti fázové singularity. Základní vlastnosti jsou odvozeny v [16], pro podrobnější vlastní diskusi konkrétních příkladů nám opět poslouží zmiňovaný výpočetní program.

Čtvrtá kapitola se bude týkat svazků laserového světla, které obsahují fázovou singularity. Konkrétně nám půjde o tzv. Laguerrovy-Gaussovy módy, které jsou řešením paraxiální vlnové rovnice. Po jejich odvození pomocí [32] a [33] se budeme především věnovat analogii mezi paraxiální vlnovou rovnicí a kvantovou Schrödingerovou rovnicí pro volnou částici ve dvou dimenzích. Na konci této kapitoly poukážeme ještě na úzkou souvislost mezi funkcemi popisujícími Laguerrovy-Gaussovy módy a funkcemi, které představují řešení Schrödingerovy rovnice pro dvourozměrný harmonický oscilátor.

V poslední závěrečné kapitole shrneme dosažené výsledky a zhodnotíme, nakolik se podařilo naplnit stanovené cíle.

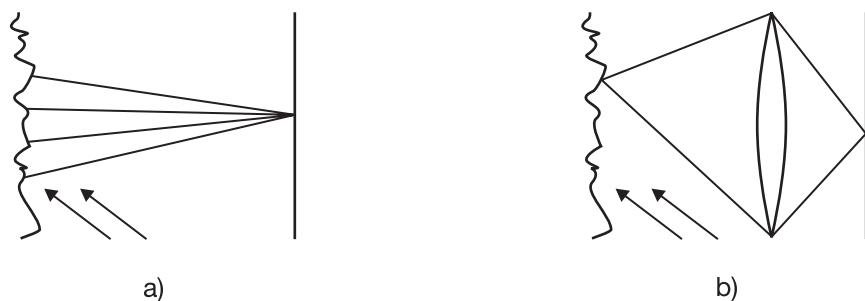
Kapitola 2

Koherenční zrnitost

2.1 Vznik pole koherenční zrnitosti

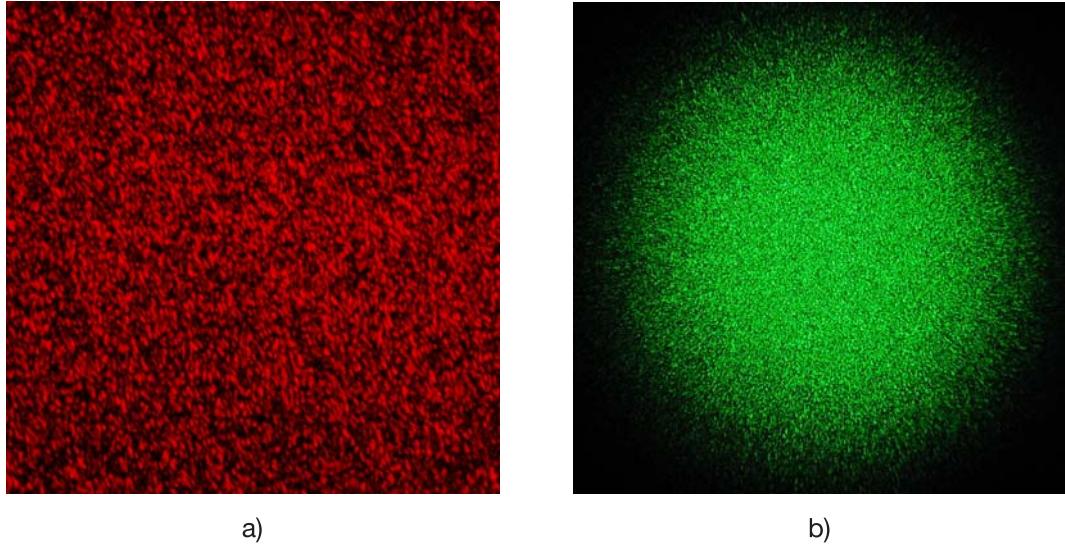
Uvažujme koherentní, tj. lineárně polarizovanou a monochromatickou, světelnou vlnu dopadající na stínítka s drsným povrchem. Body stínítka osvětlené primární vlnou se podle Huygensova-Fresnelova principu stávají zdroji sekundárních kulových vln, které se šíří do okolního prostoru. Jestliže jsou změny ve výšce povrchu náhodné a zároveň větší než vlnová délka dopadajícího světla, získají jednotlivé sekundární vlny při odrazu od stínítka náhodný fázový posuv s rovnoměrným pravděpodobnostním rozdělením na intervalu $(-\pi, \pi)$. Budeme také předpokládat, že sekundární vlny zůstávají koherentní. V prostoru před prvním stínítkem dochází k interferenci sekundárních vln, vzniká tzv. *pole koherenční zrnitosti* (anglicky *speckles*). Rovinný řez pole koherenční zrnitosti můžeme pozorovat na druhém stínítku, umístěném rovnoběžně s prvním, v podobě složité struktury světlých a tmavých skvrn.

Jestliže se světlo mezi prvním a druhým stínítkem šíří volně, což je případ popsaný výše, hovoříme o tzv. *objektivních speckles*. Jejich struktura je ovlivněna pouze parametry dopadajícího svazku záření, vlastnostmi drsného povrchu prvního stínítka a vzájemným geometrickým uspořádáním stínítka a zdroje záření. Pokud se mezi stínítky nachází optický systém, např. spojná čočka, hovoříme o *subjektivních speckles*. Jejich struktura závisí na druhém stínítku závisí navíc na vlastnostech optického systému. Schématicky je vznik obou typů speckles zakreslen na obrázku 2.1.



Obrázek 2.1: Vznik a) objektivních speckles, b) subjektivních speckles.

Jako zdroj záření pro experimentální vytvoření speckles lze nejlépe použít laser, neboť laserové světlo dobře splňuje podmínu koherence. Zároveň lze při experimentování využít faktu, že pole koherenční zrnitosti vznikne také po průchodu koherentní světelné vlny prostředím s rychle se měnícím indexem lomu či propustností. Příkladem takového prostředí je tenká igelitová fólie. Fotografický záznam experimentálně vytvořených objektivních a subjektivních speckles je na obrázku 2.2.



Obrázek 2.2: Fotografický záznam a) objektivních speckles zachycených na druhém stínítku, b) subjektivních speckles vzniklých při zobrazení osvětlené oblasti prvního stínítka na detektor fotoaparátu pomocí jeho optické soustavy.

2.2 Základní statistické vlastnosti

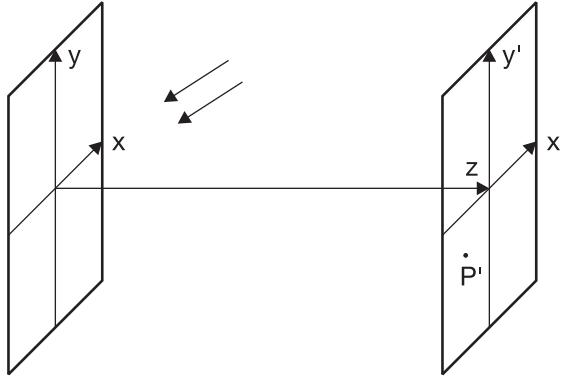
Postupem podrobněji popsaným v [1] lze odvodit základní statistické charakteristiky pole koherenční zrnitosti. Zde ve stručnosti uvedeme pouze nejdůležitější výsledky týkající se pravděpodobnostního rozložení intenzity a fáze v bodech druhého stínítka.

Na prvním a druhém stínítku nejdříve zavedeme dle obrázku 2.3 kartézské soustavy souřadnic (x, y) a (x', y') . Osa z je kolmá na obě stínítka, přičemž první stínítko leží v rovině $z = 0$, druhé v obecné rovině $z > 0$.

Protože jsme předpokládali, že světelná vlna je před i po dopadu na první stínítko koherentní, přejdeme k popisu vlny pomocí skalární teorie světla (polarizaci vlny se v této práci nebudeme zabývat). K matematickému popisu vlny tedy budeme používat skalární komplexní funkci $\psi(\mathbf{r}, t)$, závislou na polohovém vektoru \mathbf{r} a čase t , která musí být řešením skalární vlnové rovnice

$$\nabla^2 \psi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2}, \quad (2.1)$$

kde c je rychlosť šíření vlny. Dále se omezíme pouze na prostorovou část $\psi(\mathbf{r})$ funkce



Obrázek 2.3: Zavedení soustav souřadnic na prvním a druhém stínítku.

$\psi(\mathbf{r}, t)$ předpokladem

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \psi(\mathbf{r})e^{-i\omega t}, \quad (2.2)$$

kde ω je úhlová frekvence. Výslednou vlnu v bodě P' druhého stínítka označíme $\psi' = \psi(x', y')$. Můžeme ji rozepsat pomocí reálné části ξ' a imaginární části η' nebo pomocí amplitudy ϱ' a fáze χ' vztahy

$$\psi' = \xi' + i\eta' = \varrho'e^{i\chi'} . \quad (2.3)$$

Pomocí statistických výpočtů uvedených v [1] lze ukázat, že funkce ξ' a η' jsou spojité náhodné veličiny s normálním (Gaussovým) pravděpodobnostním rozdělením se střední hodnotou nula. Toto tvrzení lze zdůvodnit pomocí fázorového diagramu. Fázor výsledné vlny v bodě P' druhého stínítka je dán součtem velkého počtu fázorů, které odpovídají vlnám pocházejícím z různých bodů osvětlené oblasti prvního stínítka. Tyto fázory mají téměř stejnou velikost a jejich orientace ve fázovém diagramu je dána rovnoměrným pravděpodobnostním rozložením na intervalu $(-\pi, \pi)$. Funkce ξ' , resp. η' jsou tedy dány součtem velkého počtu nezávislých náhodných proměnných, kterými jsou reálné, resp. imaginární části fázorů odpovídajících jednotlivým vlnám. Tzv. centrální limitní věta pak říká, že pokud je sčítaných náhodných veličin dostatečný počet a je-li vliv každé z nich na součet přibližně stejný, má takový součet rozdělení blížící se asymptoticky k normálnímu rozdělení. Tedy funkce ξ' a η' jsou veličiny s normálním rozdělením.

Hodnota fáze χ' odpovídá natočení fázoru výsledné vlny ve fázovém diagramu. Protože hodnoty fáze jednotlivých vln přicházejících z osvětleného stínítka jsou určeny rovnoměrným pravděpodobnostním rozdělením na intervalu $(-\pi, \pi)$, bude toto rozdělení splňovat i výsledná fáze χ' . Pro intenzitu $I' = \psi'\psi'^*$ potom dostaneme exponenciální pravděpodobnostní rozdělení, tj. hustotu pravděpodobnosti

$$p(I') = \frac{1}{\langle I' \rangle} e^{-\frac{I'}{\langle I' \rangle}}, \quad (2.4)$$

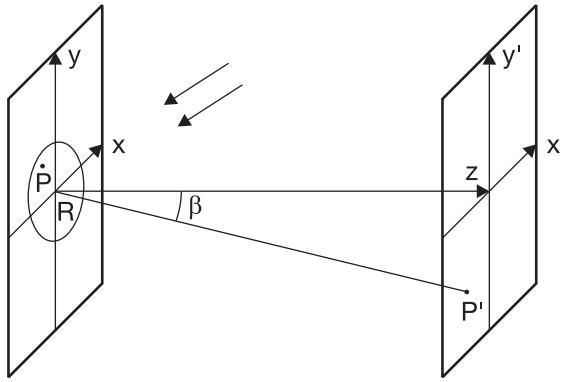
kde $\langle I' \rangle$ je střední hodnota intenzity v rovině druhého stínítka.

Uvedené základní statistické vlastnosti veličin popisujících pole koherenční zrnitosti nyní využijeme při stanovení střední příčné velikosti skvrn (zrn), které můžeme pozorovat na druhém stínítku.

2.3 Střední velikost zrn v příčném směru

2.3.1 Objektivní speckles

Rovinný řez pole koherenční zrnitosti je tvořen strukturou světlých a tmavých skvrn, jejichž tvar, velikost a uspořádání je na první pohled zcela náhodné. V této části odvodíme pro objektivní speckles podobným postupem, jaký je uveden v [1], střední velikost jednoho zrna v příčném směru, tj. v rovině druhého stínítka.



Obrázek 2.4: Na prvním stínítku je osvětlena kruhová oblast o poloměru R .

Uvažujme tedy dvě rovnoběžná stínítka v uspořádání popsaném v předchozí části. Kromě kartézských souřadnic (x, y) zavedeme v rovině prvního stínítka také polární souřadnice (ρ, φ) vztahy

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi. \quad (2.5)$$

Na prvním stínítku je dopadající vlnou osvětlena kruhová plocha o poloměru R (viz obrázek 2.4). Při odrazu od stínítka získá vlna v každém bodě $P[x, y]$ osvětlené oblasti náhodnou fázi $\phi(x, y)$. Vlnu v bodě P zapíšeme ve tvaru

$$\psi(x, y) = A \exp[i\phi(x, y)], \quad (2.6)$$

kde A je konstantní amplituda, nezávislá na souřadnicích bodu P . Ze znalosti funkce $\psi(x, y)$ můžeme vypočítat střední hodnotu intenzity na osvětlené ploše prvního stínítka

$$\langle I(x, y) \rangle = \langle \psi(x, y) \psi^*(x, y) \rangle = \frac{\iint \psi(x, y) \psi^*(x, y) dx dy}{\iint dx dy} = \frac{\iint_0^{2\pi} A^2 \rho d\rho d\varphi}{\iint_0^{2\pi} \rho d\rho d\varphi} = A^2. \quad (2.7)$$

Jak již bylo uvedeno dříve, body ležící v osvětlené oblasti prvního stínítka se stávají zdroji sekundárních kulových vln, které se šíří do okolního prostoru. Ze znalosti vlny $\psi(x, y)$ v těchto bodech můžeme vypočítat výslednou vlnu v bodě $P'[x', y']$ druhého stínítka. Z teorie difrakce dostáváme

$$\psi(x', y') = \frac{1}{i\lambda z} \iint \psi(x, y) \exp[ikr] dx dy, \quad (2.8)$$

kde λ je vlnová délka, $k = 2\pi/\lambda$ velikost vlnového vektoru a r vzdálenost bodů P a P'. Z geometrického uspořádání dostaváme pro vzdálenost r výraz

$$r = \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + z^2} \approx z + \frac{(x' - x)^2 + (y' - y)^2}{2z}, \quad (2.9)$$

přičemž přibližný vztah platí, pokud vzdálenost stínitek z je o hodně větší než jejich příčné rozměry. Následující výpočet tedy bude platit pro blízké okolí osy z . Situaci, kdy se od osy z vzdálíme natolik, že již nebude možné použít přibližné vyjádření vzdálenosti r z rovnice (2.9), budeme diskutovat na konci této části. Dosazením z rovnice (2.9) do (2.8) dostaneme pro vlnu na druhém stínítku výraz

$$\psi(x', y') = \frac{1}{i\lambda z} \iint A \exp[i\phi(x, y)] \exp[i kz] \exp\left[ik \frac{(x' - x)^2 + (y' - y)^2}{2z}\right] dx dy. \quad (2.10)$$

Ze znalosti funkce $\psi(x', y')$ můžeme určit střední hodnotu intenzity na druhém stínítku, obecně ji zapíšeme

$$\langle I(x', y') \rangle = \langle \psi(x', y') \psi^*(x', y') \rangle. \quad (2.11)$$

V části 2.2 bylo uvedeno, že funkce $\psi(x', y')$ je náhodná komplexní veličina, tj. její reálná a imaginární část jsou náhodné veličiny, konkrétně s normálním rozložením a střední hodnotou nula. Proto lze rovnici (2.11) přepsat

$$\begin{aligned} \langle I(x', y') \rangle &= \frac{1}{(\lambda z)^2} \iiint \langle A \exp[i\phi(x_1, y_1)] A \exp[-i\phi(x_2, y_2)] \rangle \times \\ &\times \exp\left[ik \frac{(x' - x_1)^2 + (y' - y_1)^2}{2z}\right] \exp\left[-ik \frac{(x' - x_2)^2 + (y' - y_2)^2}{2z}\right] dx_1 dy_1 dx_2 dy_2. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Nyní je třeba v integrandu upravit výraz se střední hodnotou. Budeme předpokládat, že hodnoty fáze v sousedních bodech osvětlené oblasti prvního stínítka spolu nekorelují, jsou tedy zcela nezávislé. Protože fáze $\phi(x, y)$ je náhodná veličina s rovnoměrným rozdělením na intervalu $(-\pi, \pi)$, bude platit

$$\langle A \exp[i\phi(x_1, y_1)] A \exp[-i\phi(x_2, y_2)] \rangle = A^2 \delta(x_1 - x_2, y_1 - y_2), \quad (2.13)$$

kde δ je dvourozměrná Diracova δ -funkce. Tuto úpravu můžeme podrobněji vysvětlit následovně. Střední hodnotu výrazu $A^2 \exp[i(\phi(x_1, y_1) - \phi(x_2, y_2))]$ počítáme v principu tak, že pro všechny možné dvojice bodů osvětlené oblasti určíme jeho hodnotu, všechny tyto hodnoty sečteme a poté vydělíme jejich počtem. Pro každou takovou dvojici bodů, pro kterou platí $x_1 = x_2$ a $y_1 = y_2$, je diskutovaný výraz roven A^2 . Tedy pro soubor všech takových dvojic bodů je střední hodnota daného výrazu rovna A^2 . Pro zbývající soubor dvojic bodů, z nichž jsou oba body různé, můžeme tento výraz rozepsat na reálnou a imaginární část. Ty však podle sekce 2.2 mají normální pravděpodobnostní rozložení se střední hodnotou nula. Tedy střední hodnota diskutovaného výrazu je pro tento soubor dvojic bodů rovna nule. Po dosazení vztahu (2.13) do rovnice (2.12) dostaneme

$$\langle I(x', y') \rangle = \frac{1}{(\lambda z)^2} \iiint A^2 \delta(x_1 - x_2, y_1 - y_2) \exp\left[ik \frac{x_1^2 - x_2^2 + y_1^2 - y_2^2}{2z}\right] \times$$

$$\begin{aligned} & \times \exp \left[-ik \frac{x'(x_1 - x_2) + y'(y_1 - y_2)}{z} \right] dx_1 dy_1 dx_2 dy_2 = \frac{1}{(\lambda z)^2} \iint A^2 dx dy = \\ & = \frac{A^2}{(\lambda z)^2} \int_0^R \int_0^{2\pi} \rho d\rho d\varphi = \frac{\pi R^2 A^2}{\lambda^2 z^2}, \end{aligned} \quad (2.14)$$

Abychom mohli určit střední velikost jednoho zrna v rovině druhého stínítka, je třeba vypočítat tzv. autokorelační funkci rozdělení intenzity na druhém stínítku. Tato funkce je definována vztahem

$$\Gamma_t(x', x' + a, y', y' + b) = \langle I(x', y') I(x' + a, y' + b) \rangle \quad (2.15)$$

a popisuje vzájemný vztah (korelaci) intenzity v bodech druhého stínítka, jejichž vzdálenost ve směru x' je a , ve směru y' je b . Střední velikost zrna v příčném směru pak ztotožníme se vzdáleností, na níž autokorelační funkce nabývá svého prvního minima. Dosazením z rovnice (2.10) dostaneme pro autokorelační funkci výraz

$$\begin{aligned} \Gamma_t(x', x' + a, y', y' + b) &= \frac{1}{(\lambda z)^4} \int_8 \langle \psi(x_1, y_1) \psi^*(x_2, y_2) \psi(x_3, y_3) \psi^*(x_4, y_4) \rangle \times \\ &\times \exp \left[-ik \frac{x'(x_1 - x_2) + y'(y_1 - y_2) + (x' + a)(x_3 - x_4) + (y' + b)(y_3 - y_4)}{z} \right] \times \\ &\times \exp \left[ik \frac{x_1^2 - x_2^2 + y_1^2 - y_2^2 + x_3^2 - x_4^2 + y_3^2 - y_4^2}{2z} \right] dx_1 dy_1 dx_2 dy_2 dx_3 dy_3 dx_4 dy_4. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Úprava výrazu se střední hodnotou i její zdůvodnění bude analogická úpravě zapsané v rovnici (2.13). Střední hodnota diskutovaného výrazu bude rovna A^4 , jestliže bude platit jedna ze dvojic rovnic $x_1 = x_2, x_3 = x_4$ nebo $x_1 = x_4, x_3 = x_2$. Výraz pro střední hodnotu z rovnice (2.16) tedy můžeme přepsat

$$\begin{aligned} & \langle \psi(x_1, y_1) \psi^*(x_2, y_2) \psi(x_3, y_3) \psi^*(x_4, y_4) \rangle = \\ & = \langle \psi(x_1, y_1) \psi^*(x_2, y_2) \rangle \langle \psi(x_3, y_3) \psi^*(x_4, y_4) \rangle + \langle \psi(x_1, y_1) \psi^*(x_4, y_4) \rangle \langle \psi(x_3, y_3) \psi^*(x_2, y_2) \rangle = \\ & = A^4 [\delta(x_1 - x_2, y_1 - y_2) \delta(x_3 - x_4, y_3 - y_4) + \delta(x_1 - x_4, y_1 - y_4) \delta(x_3 - x_2, y_3 - y_2)]. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Po dosazení tohoto vyjádření do rovnice (2.16) získáme pro autokorelační funkci vztah

$$\begin{aligned} \Gamma_t(x', x' + a, y', y' + b) &= \frac{A^4}{(\lambda z)^4} \iiint \left\{ 1 + \exp \left[-ik \frac{a(x_2 - x_1) + b(y_2 - y_1)}{z} \right] \right\} \times \\ &\times dx_1 dy_1 dx_2 dy_2 = \frac{A^4 \pi^2 R^4}{(\lambda z)^4} \left\{ 1 + \left| \frac{\iint \exp \left[\frac{ik}{z} (xa + yb) \right] dx dy}{\pi R^2} \right|^2 \right\}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Nyní v tomto vztahu zbývá dopočítat poslední integrál. Při jeho řešení budeme postupovat stejně, jako se postupuje při výpočtu difrakčního integrálu při difrakci na kruhovém otvoru. Zavedeme-li nové proměnné ρ', φ' vztahy

$$a = \rho' \cos \varphi', \quad b = \rho' \sin \varphi', \quad (2.19)$$

můžeme tento integrál dopočítat pomocí Besselových funkcí prvního typu $J_n(\alpha)$, tedy

$$\begin{aligned} \iint \exp \left[\frac{ik}{z} (xa + yb) \right] dx dy &= \int_0^R \int_0^{2\pi} \exp \left[\frac{ik}{z} (\rho\rho' \cos \varphi \cos \varphi' + \rho\rho' \sin \varphi \sin \varphi') \right] \rho d\rho d\varphi = \\ &= \int_0^R \int_0^{2\pi} \exp \left[\frac{ik}{z} \rho\rho' \cos(\varphi - \varphi') \right] \rho d\rho d\varphi = 2\pi \int_0^R J_0 \left(\frac{k\rho\rho'}{z} \right) \rho d\rho = \frac{2\pi z R}{k\rho'} J_1 \left(\frac{k\rho' R}{z} \right). \end{aligned} \quad (2.20)$$

Výsledný výraz pro autokorelační funkci potom je

$$\Gamma_t(a, b) = \frac{A^4 \pi^2 R^4}{(\lambda z)^4} \left\{ 1 + \left[\frac{2J_1(k\rho' R/z)}{k\rho' R/z} \right]^2 \right\}. \quad (2.21)$$

Přitom jsme použili zkrácené označení $\Gamma_t(a, b)$, neboť výsledná funkce závisí prostřednic-tvím parametru ρ' pouze na vzdálenostech a, b a nikoli na souřadnicích x', y' konkrétních bodů druhého stínítka.

Z výrazu (2.21) je vidět, že autokorelační funkce definovaná rovnicí (2.15) není obecně normovaná. Proto je výhodné zavést tzv. koeficient korelace $\gamma_t(x', x' + a, y', y' + b)$, který normovaný je. Jeho obecnou definici můžeme pro veličinu s exponenciálním rozdělením, kterou je v našem případě intenzita, přepsat do tvaru

$$\gamma_t(x', x' + a, y', y' + b) = \frac{\langle I(x', y')I(x' + a, y' + b) \rangle - \langle I(x', y') \rangle \langle I(x' + a, y' + b) \rangle}{\langle I(x', y') \rangle \langle I(x' + a, y' + b) \rangle}. \quad (2.22)$$

Přitom střední hodnota $\langle I(x', y')I(x' + a, y' + b) \rangle$ je shodná s definičním vztahem (2.15) pro autokorelační funkci. Dále střední hodnoty $\langle I(x', y') \rangle$ a $\langle I(x' + a, y' + b) \rangle$ jsou si rovny, jejich vyčíslení je provedeno v rovnici (2.14). Z výsledku (2.21) pro autokorelační funkci tedy můžeme rovnou napsat vztah pro koeficient korelace

$$\gamma_t(a, b) = \left[\frac{2J_1(k\rho' R/z)}{k\rho' R/z} \right]^2. \quad (2.23)$$

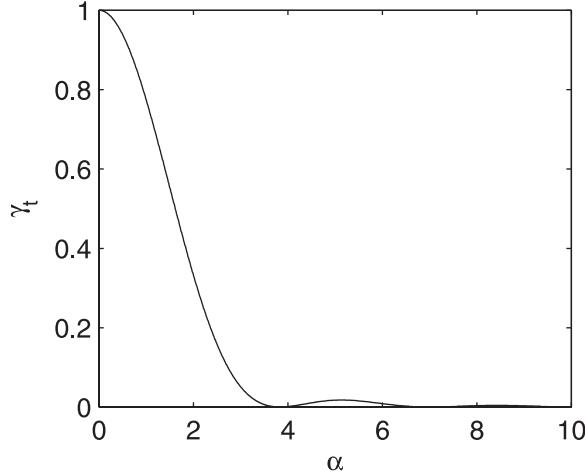
Průběh obecné funkce $\gamma_t = [2J_1(\alpha)/\alpha]^2$ je vykreslen na obrázku 2.5, její hodnoty se nachází na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$. Tvar křivky pro korelační koeficient a autokorelační funkci jsou shodné, rozdílné je pouze jejich škálování a posunutí v grafu. Koeficient korelace s výhodou využijeme až později při výpočtu střední velikosti zrn v podélném směru.

Autokorelační funkce (2.21) nabývá minima, pokud

$$\left[\frac{2J_1(k\rho' R/z)}{k\rho' R/z} \right]^2 = 0. \quad (2.24)$$

Její hodnota v minimu je rovna kvadrátu střední hodnoty intenzity na druhém stínítku, viz rovnice (2.14). Prvnímu minimu odpovídá hodnota argumentu Besselovy funkce $k\rho' R/z = 1,22\pi$. Označíme-li průměr osvětlené plochy na prvním stínítku $D = 2R$, po úpravě dostáváme střední hodnotu velikosti zrna v příčném směru

$$\rho' = 1,22\lambda \frac{z}{D}. \quad (2.25)$$



Obrázek 2.5: Průběh funkce $\gamma_t = [2J_1(\alpha)/\alpha]^2$ v závislosti na parametru α .

Podotkněme, že zcela stejný vztah platí pro poloměr Airyho disku, který vzniká při difrakci světla na kruhovém otvoru. Poloměr Airyho disku zároveň určuje mezní rozlišovací schopnost čočky, čehož o něco později využijeme při zdůvodnění střední velikosti zrn v příčném směru pro subjektivní speckles.

K řádově stejnému výsledku, jaký je uveden v rovnici (2.25), se můžeme dostat na základě jednoduchého odhadu. Z osvětlené plochy o průměru D vyberme dva body, jejichž vzdálenost je ρ , a uvažujme interferenci pouze dvou sekundárních kulových vln, které se šíří z těchto bodů. V takovém případě bychom na druhém stínítku pozorovali soustavu rovnoběžných interferenčních proužků, neboť situace vlastně odpovídá Youngovu dvojštěrbinovému experimentu. Vzdálenost dvou sousedních minim intenzity ve směru kolmém na směr proužků je $\lambda z/\rho$. Pro pevně zvolenou vlnovou délku λ a vzdálenost stínítek z bude prostorová perioda proužků nejmenší pro maximální možnou vzdálenost ρ , ta je $\rho = D$. Střední velikost zrna v příčném směru ρ'_{odhad} tedy odhadneme jako nejmenší možnou prostorovou periodu interferenčních proužků

$$\rho'_{\text{odhad}} = \lambda \frac{z}{D}. \quad (2.26)$$

Tuto metodu odhadu střední příčné velikosti speckles můžeme použít i pro zrna začycená na druhém stínítku daleko od počátku souřadné soustavy (x', y') , pro něž neplatí přibližný vztah (2.9). Zvolme tedy na ose x' bod P' , jehož vzdálenost od počátku soustavy souřadnic (x', y') není zanedbatelná vůči vzdálenosti stínítek z . Střed osvětleného kruhu na prvním stínítku označíme jako bod S , počátek soustavy souřadnic (x', y') jako bod S' .

Uvažujme nejdříve situaci, kdy je druhé stínítko v bodě P' natočeno tak, že je kolmé na přímku určenou body P' a S . Přitom jsou spolu s druhým stínítkem natočeny i souřadné osy x', y' . Po této rotaci zůstávají osy y, y' rovnoběžné, osy x, x' se natočí o úhel β , který rovněž svírá osa z s přímkou danou body P' a S . Průmět osvětlené oblasti prvního stínítka do roviny natočeného druhého stínítka má tvar elipsy, jejíž hlavní osa je rovnoběžná s osou y' a má délku D , vedlejší osa je rovnoběžná s osou x' a má délku $D \cos \beta$. Nejmenší prostorová perioda interferenčních proužků ve směru y' tedy bude shodná s výrazem

(2.26). Pro směr x' však musíme v tomto výrazu nahradit parametr D součinem $D \cos \beta$, čemuž odpovídá zvětšení střední příčné velikosti zrn neprímo úměrně faktoru $\cos \beta$.

Nyní otočme druhé stínítko tak, aby bylo znova rovnoběžné s prvním. Ve směru osy y' zůstane nejmenší prostorová perioda interferenčních proužků nezměněná a rovna výrazu (2.26). Ve směru osy x' však dojde k jejímu opětovnému protažení neprímo úměrně faktoru $\cos \beta$. Ve výsledku tedy bude pro střední velikost speckles ve směru osy x' platit

$$\rho'_{\text{odhad}} = \lambda \frac{z}{D \cos^2 \beta}. \quad (2.27)$$

Výše uvedený postup lze zobecnit pro libovolný bod P' druhého stínítka. Jednoduše lze říct, že se vztahující vzdáleností bodů P' a S' se bude střední velikost zrn v radiálním směru zvětšovat dle vztahu (2.27), přičemž úhel β je určen přímkami $P'S'$ a SS' . Tohoto efektu si lze při experimentálním zkoumání speckles všimnout i pouhým okem.

2.3.2 Subjektivní speckles

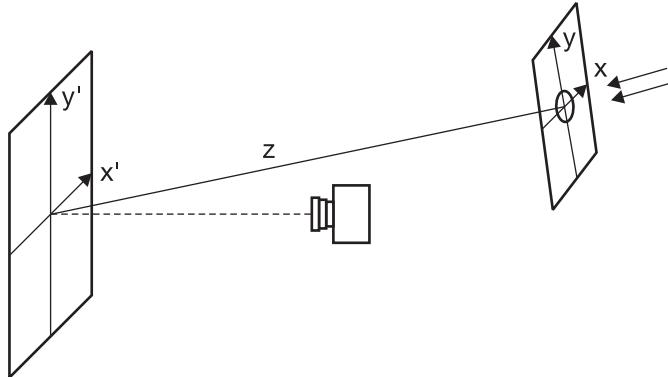
Jestliže mezi první a druhé stínítko vložíme spojnou čočku, interferenční obrazec pozorovaný na druhém stínítku bude záviset na parametrech čočky. Vztah pro střední velikost jednoho zrna v příčném směru bude shodný s rovnicí (2.25), avšak veličiny D a z budou mít jiný význam než v předchozí části – D bude průměr čočky a z vzdálenost hlavní roviny čočky od druhého stínítka. Toto tvrzení lze zdůvodnit následujícím způsobem.

Využijeme faktu, že každá čočka má určitou mezní rozlišovací schopnost způsobenou difrakcí světla na jejím okraji. Při zobrazení osvětlené oblasti prvního stínítka pomocí čočky na druhé stínítko budou mít nejmenší rozlišené detaily zobrazené na druhém stínítku velikost ρ' určenou vztahem (2.25). Ta je zároveň rovna poloměru Airyho disku, který vzniká při difrakci světla na kruhovém otvoru. Na škále menší než je velikost rozlišených detailů ρ' je intenzita dobře korelovaná, na škále rovné této vzdálenosti již korelovaná není. Velikost subjektivních speckles zachycených na druhém stínítku je tedy dána rozdílem nejmenších rozlišených detailů.

2.3.3 Experiment

K ověření vztahu (2.25) popisujícího střední velikost zrn v příčném směru ρ' jsem pro objektivní speckles realizoval následující experiment. Pro konstantní vlnovou délku λ a vzdálenost z jsem měřil závislost velikosti ρ' na průměru D osvětlené oblasti prvního stínítka. Uspořádání experimentu je schématicky zachyceno na obrázku 2.6.

Svazek laserového světla dopadá na první stínítko, v němž je kruhový otvor průměru D . Přes otvor je natažena tenká igelitová fólie, díky níž světelna vlna získá v různých bodech náhodný fázový posuv. Interferenční obrazec pozorujeme na druhém stínítku ve střední vzdálenosti z od otvoru. Hlavní rovina čočky fotoaparátu použitého k záznamu interferenčního obrazce je umístěna rovnoběžně s druhým stínítkem. Kvůli dosažení co největší velikosti zrn na druhém stínítku byla vzdálenost z několikrát větší než vzdálenost fotoaparátu od druhého stínítka. Aby na fotografii nebyl stín fotoaparátu, musely být první a druhé stínítko vůči sobě mírně skloněny (rovnoběžné zůstávají osy x, x'). Vzájemným



Obrázek 2.6: Uspořádání experimentu.

nakloněním stínítek samozřejmě zapříčiníme jistou chybu měření, avšak ta nebude příliš velká. Její diskusi se budeme podrobněji věnovat níže.

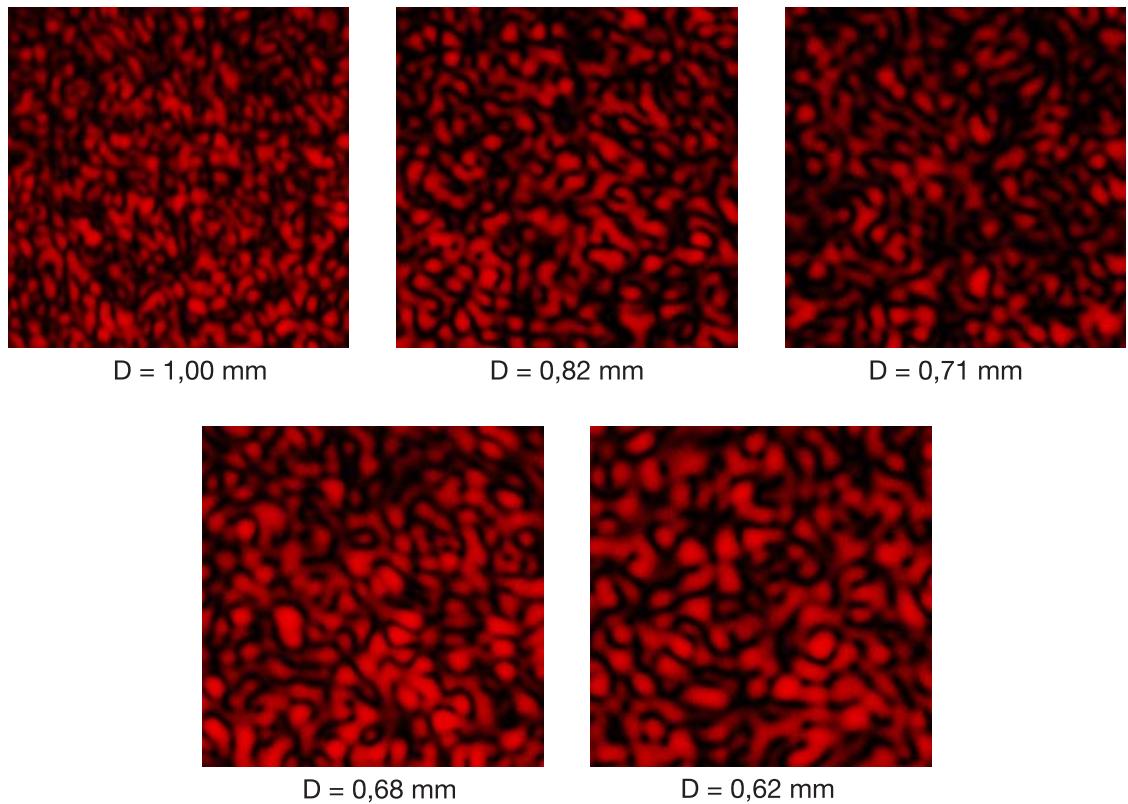
Objektivní speckles jsem vytvořil a zaznamenal fotoaparátem (digitální zrcadlovka Nikon D50) pro pět různých kruhových otvorů, výřezy použité k dalšímu zpracování jsou na obrázku 2.7. Jejich rozměry jsou 500×500 pixelů, což na stínítku odpovídalo čtverci o straně 68,2 mm. Zároveň jsem pořídil fotografie difrakčního obrazce vzniklého při difrakci světla na samotném otvoru, tj. bez igelitové fólie. Ty posloužily k určení průměru každého z otvorů. Přitom byl využit vztah pro poloměr Airyho disku pozorovaného při difrakci světla na kruhovém otvoru, který je shodný se vztahem (2.25) pro střední velikost zrn v příčném směru.

D [mm]	$1/D$ [1/mm]	ρ'_{dif} [mm]	ρ'_{exp} [mm]
$1,00 \pm 0,03$	$1,00 \pm 0,03$	$2,39 \pm 0,07$	2,52
$0,82 \pm 0,02$	$1,22 \pm 0,03$	$2,90 \pm 0,07$	2,98
$0,71 \pm 0,01$	$1,40 \pm 0,03$	$3,34 \pm 0,07$	3,50
$0,68 \pm 0,01$	$1,46 \pm 0,03$	$3,48 \pm 0,07$	3,55
$0,62 \pm 0,01$	$1,62 \pm 0,03$	$3,85 \pm 0,07$	3,89

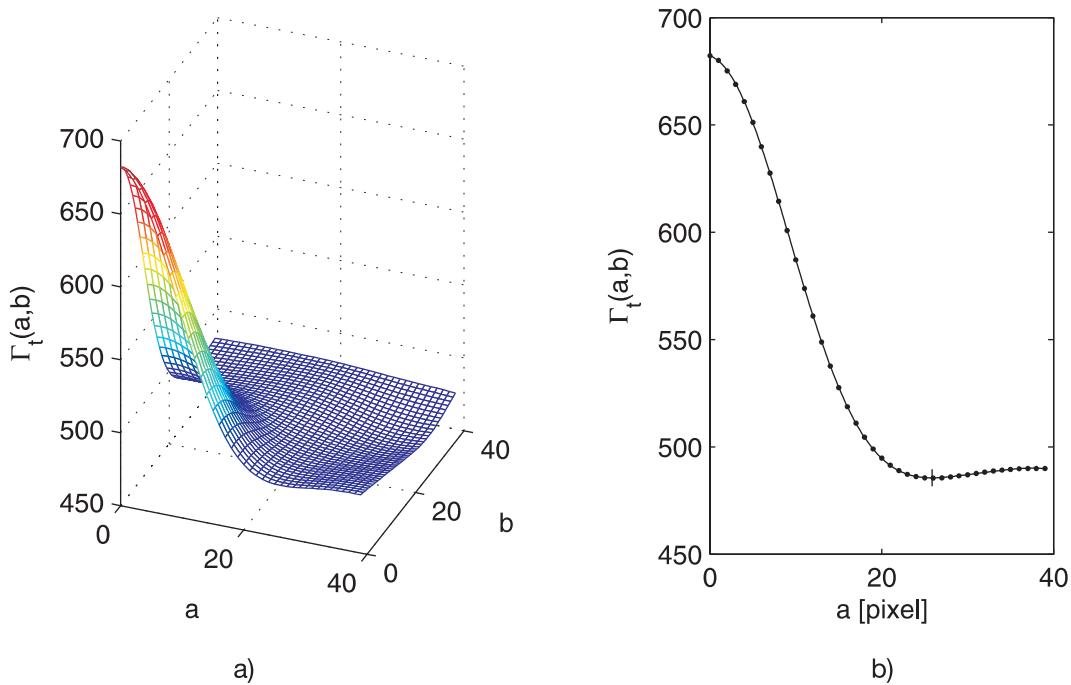
Tabulka 2.1: Výsledky měření.

Poloměry Airyho disků ρ'_{dif} byly určeny pomocí grafického editoru, výsledky jsou včetně chyb shrnutы v tabulce 2.1. Skutečné průměry otvorů D a příslušné chyby pak byly dopočteny pro hodnoty použité vlnové délky $\lambda = (652,17 \pm 0,01)$ nm a vzdálenosti $z = (299,0 \pm 0,5)$ cm.

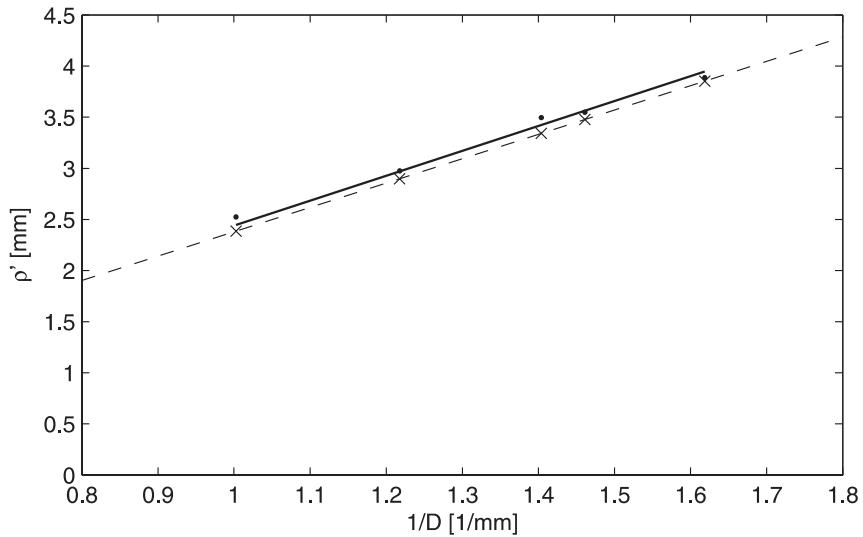
Střední velikosti zrn byly určeny z fotografií uvedených na obrázku 2.7 pomocí definičního vztahu (2.15) pro autokorelační funkci. Protože byl použit kruhový otvor, měla by autokorelační funkce být rotačně symetrická. Její průběh v závislosti na parametrech a, b je pro fotografií příslušnou průměru otvoru $D = 0,71$ mm vykreslen na obrázku 2.8a. Jednotkou parametrů a, b je jeden pixel. Pro $a = b = 0$ nabývá autokorelační funkce maxima, pro zvyšující se vzdálenost $\sqrt{a^2 + b^2}$ klesá do minima a následně opět roste. Z obrázku 2.8a je však vidět, že ne v každém radiálním směru je minimum jednoznačně rozpoznatelné.



Obrázek 2.7: Fotografie speckles vytvořených pro různé průměry otvoru v prvním stínítku. Se zmenšujícím se průměrem otvoru se střední velikost zrn zvětšuje.



Obrázek 2.8: Průběh autokorelační funkce a) v závislosti na parametrech a, b , b) pro $b = 0$.



Obrázek 2.9: Průběh závislosti střední velikosti zrn v příčném směru ρ' na převrácené hodnotě průměru otvoru $1/D$.

Protože ve směru osy x' druhého stínítka zůstala příčná velikost zrn stále stejná bez ohledu na natočení stínítka, byly použity pouze takové body autokorelační funkce, pro něž $b = 0$. Řez autokorelační funkci rovinou $b = 0$ je znázorněn na obrázku 2.8b. K nalezení bodu, v němž autokorelační funkce nabývá minima, je třeba body vykreslenými na obrázku 2.8b proložit vhodnou funkci. Zvolen byl polynom sedmého stupně. Průběh křivky dobře odpovídá průběhu vyplývajícímu z rovnice (2.21), jenž je vykreslen na obrázku 2.5. Po nalezení polohy lokálního minima byla dopočtena skutečná střední velikost zrn ρ'_{exp} na druhém stínítku, výsledky jsou shrnuty v tabulce 2.1. Chybou určení těchto hodnot nejsou v tabulce uvedeny, neboť jejich výpočet by byl poměrně obtížný, navíc je k následujícímu vyhodnocení experimentu příliš nepotřebujeme.

Výsledky měření v podobě grafu závislosti veličiny ρ'_{exp} na poměru $1/D$ jsou vynezeny na obrázku 2.9. Experimentálně získanými body je proložena přímka procházející počátkem, hodnota směrnice je $(2,45 \pm 0,02) \text{ mm}^2$. Dále je tenkou přerušovanou čarou vykreslena přímka určená rovnicí (2.25). Její směrnice je tedy dána výrazem $1,22\lambda z = (2,380 \pm 0,004) \text{ mm}^2$. Na této přímce jsou pomocí křížků označeny body odpovídající hodnotám poměru $1/D$ uvedeným v tabulce 2.1. Z grafu je vidět, že naměřené body leží poměrně blízko teoreticky získané závislosti. Velmi dobře si odpovídají také číselné hodnoty směrnice přímky proložené experimentálně získanými body a směrnice přímky určené teoreticky.

Jeden zdroj případných chyb jsme již zmínili – vzájemné naklonění prvního a druhého stínítka. Kvůli němu vznikl pro body ležící na zpracovávaných fotografiích nahoře a dole rozdíl vzdálenosti od otvoru v prvním stínítku. Ten však dosahoval pouze hodnoty 1,5 cm, což by ve velikosti zrn způsobilo nanejvýš půlprocentní rozdíly. Dalším parametrem, který může ovlivnit tvar zrn, je struktura igelitové fólie. Největším zdrojem chyb však pravděpodobně byl tvar samotných otvorů vytvořených v prvním stínítku. Neostré okraje či tvar odlišný od dokonalého kruhu mohly výrazně ovlivnit tvar a velikost zrn.

2.4 Střední velikost zrn v podélném směru

2.4.1 Objektivní speckles

Pokusme se nyní vlastním postupem, přesto však s využitím některých kroků z části 2.3.1, určit pro objektivní speckles střední velikost zrn v podélném směru, tj. ve směru osy z . Přitom budeme počítat autokorelační funkci rozdělení intenzity přímo na ose z , čemuž odpovídá hodnota souřadnic $x' = 0, y' = 0$. Tato volba výrazně zjednoduší výpočty a zároveň pro střední velikost jednoho zrna v podélném směru dostaneme výsledek, který bude možné považovat za platný i pro blízké okolí osy z .

Výslednou vlnu v bodě $P'[0, 0]$ druhého stínítka umístěného ve vzdálenosti z od prvního stínítka označíme $\psi(z)$. Dosazením $x' = 0, y' = 0$ do rovnice (2.10) pro ni dostaneme výraz

$$\psi(z) = \frac{1}{i\lambda z} \iint A \exp[i\phi(x, y)] \exp[ikz] \exp\left[ik\frac{x^2 + y^2}{2z}\right] dx dy. \quad (2.28)$$

Posuneme-li druhé stínítko do vzdálenosti $z + h$, bude mít výsledná vlna $\psi(z + h)$ v bodě $P'[0, 0]$ tvar

$$\psi(z + h) = \frac{1}{i\lambda(z + h)} \iint A \exp[i\phi(x, y)] \exp[ik(z + h)] \exp\left[ik\frac{x^2 + y^2}{2(z + h)}\right] dx dy. \quad (2.29)$$

Nejdříve se budeme zabývat případem, kdy vzdálenost $z \gg h$. Potom ve jmenovateli zlomku před integrálem (2.29) stačí nahradit $z + h \approx z$. Ve fázových členech však musíme použít přesnější approximaci. Pro zlomek $1/(z + h)$ lze napsat přibližný vztah

$$\frac{1}{z + h} \approx \frac{1}{z} - \frac{h}{z^2}. \quad (2.30)$$

Pro vlnu $\psi(z + h)$ potom dostaneme

$$\psi(z + h) = \frac{1}{i\lambda z} \iint A \exp[i\phi(x, y)] \exp[ik(z + h)] \exp\left[ik\frac{x^2 + y^2}{2z}\right] \exp\left[-ikh\frac{x^2 + y^2}{2z^2}\right] dx dy. \quad (2.31)$$

Autokorelační funkci rozdělení intenzity na ose z zapíšeme analogickým vztahem jako v části 2.3.1, tedy

$$\Gamma_1(z, z + h) = \langle I(z)I(z + h) \rangle = \langle \psi(z)\psi^*(z)\psi(z + h)\psi^*(z + h) \rangle. \quad (2.32)$$

Po dosazení z rovnic (2.28) a (2.31) dostaneme pro autokorelační funkci výraz

$$\begin{aligned} \Gamma_1(z, z + h) &= \frac{A^4}{(\lambda z)^4} \int_{8\times} \langle \exp[i\phi(x_1, y_1)] \exp[-i\phi(x_2, y_2)] \exp[i\phi(x_3, y_3)] \exp[-i\phi(x_4, y_4)] \rangle \times \\ &\times \exp\left[ik\frac{x_1^2 - x_2^2 + y_1^2 - y_2^2 + x_3^2 - x_4^2 + y_3^2 - y_4^2}{2z}\right] \exp\left[-ikh\frac{x_3^2 - x_4^2 + y_3^2 - y_4^2}{2z^2}\right] \times \\ &\times dx_1 dy_1 dx_2 dy_2 dx_3 dy_3 dx_4 dy_4. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Opět použijeme vyjádření výrazu se střední hodnotou uvedené v rovnici (2.17), potom

$$\begin{aligned}\Gamma_1(z, z+h) &= \frac{A^4}{(\lambda z)^4} \iiint \left\{ 1 + \exp \left[ikh \frac{x_1^2 - x_2^2 + y_1^2 - y_2^2}{2z^2} \right] \right\} dx_1 dy_1 dx_2 dy_2 = \\ &= \frac{A^4 \pi^2 R^4}{(\lambda z)^4} \left\{ 1 + \left| \frac{\iint \exp \left[\frac{ikh}{2z^2} (x^2 + y^2) \right] dx dy}{\pi R^2} \right|^2 \right\}. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Výpočet posledního zbývajícího integrálu provedeme převodem do polárních souřadnic definovaných rovnicí (2.5). Tedy

$$\begin{aligned}\iint \exp \left[\frac{ikh}{2z^2} (x^2 + y^2) \right] dx dy &= \int_0^{2\pi} \int_0^R \exp \left[\frac{ikh}{2z^2} \rho^2 \right] \rho d\rho d\varphi = \\ &= \frac{2\pi z^2}{ikhR^2} \left[\exp \left(\frac{ikhR^2}{2z^2} \right) - 1 \right] = \frac{4\pi z^2}{kh} \exp \left(\frac{ikhR^2}{4z^2} \right) \sin \left(\frac{khR^2}{4z^2} \right). \end{aligned} \quad (2.35)$$

Výsledný výraz pro autokorelační funkci je

$$\Gamma_1(z, z+h) = \frac{A^4 \pi^2 R^4}{(\lambda z)^4} \left\{ 1 + \left[\frac{\sin(khR^2/4z^2)}{khR^2/4z^2} \right]^2 \right\}. \quad (2.36)$$

Podobně jako při výpočtu střední velikosti zrn v příčném směru můžeme definovat koeficient korelace vztahem

$$\gamma_1(z, z+h) = \frac{\langle I(z)I(z+h) \rangle - \langle I(z) \rangle \langle I(z+h) \rangle}{\langle I(z) \rangle \langle I(z+h) \rangle}. \quad (2.37)$$

Po úpravě dostaneme

$$\gamma_1(z, z+h) = \left[\frac{\sin(khR^2/4z^2)}{khR^2/4z^2} \right]^2. \quad (2.38)$$

Minimum autokorelační funkce nastává, pokud

$$\left[\frac{\sin(khR^2/4z^2)}{khR^2/4z^2} \right]^2 = 0. \quad (2.39)$$

Prvnímu minimu odpovídá hodnota argumentu $khR^2/4z^2 = \pi$, střední velikost zrna v podélém směru tedy je

$$h = 8\lambda \frac{z^2}{D^2}. \quad (2.40)$$

Řádově stejný výsledek byl dosažen poněkud jiným postupem v [3]. Připomeňme, že vztah (2.40) jsme odvodili za předpokladu $z \gg h$. Aby byl tento předpoklad splněn, musí být

$$z \gg 8\lambda \frac{z^2}{D^2} \quad \Rightarrow \quad z \ll \frac{D^2}{8\lambda}. \quad (2.41)$$

Např. pro vlnovou délku $\lambda = 652$ nm a průměr osvětlené oblasti $D = 1$ mm by muselo být $z \ll 0,19$ m. Vztah (2.40) pro střední velikost zrna v podélném směru tedy bude platit jen velmi blízko prvního stínítka. Pak už bychom se však dostali do rozporu s předpokladem, že vzdálenost z mezi prvním a druhým stínítkem je o hodně větší než rozměry stínítek.

Pokusme se tedy autokorelační funkci pro osu z spočítat i bez požadavku $z \gg h$. K tomu opět využijeme vztahy (2.28) a (2.29). Po dosazení do definiční rovnice (2.32) dostaneme

$$\begin{aligned} \Gamma_1(z, z+h) &= \frac{A^4}{\lambda^4 z^2 (z+h)^2} \int_8 \langle \exp [i\phi(x_1, y_1)] \exp [-i\phi(x_2, y_2)] \exp [i\phi(x_3, y_3)] \times \\ &\quad \times \exp [-i\phi(x_4, y_4)] \rangle \exp \left[ik \frac{x_1^2 - x_2^2 + y_1^2 - y_2^2}{2z} \right] \exp \left[ik \frac{x_3^2 - x_4^2 + y_3^2 - y_4^2}{2z} \right] \times \\ &\quad \times dx_1 dy_1 dx_2 dy_2 dx_3 dy_3 dx_4 dy_4. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Označme $h = qz$, kde q je kladný bezrozměrný parametr. Nyní stačí postupovat analogicky jako v předchozí části, kdy jsme požadovali $z \gg h$. S využitím rovnice (2.17) dojdeme po úpravách k výrazu pro autokorelační funkci

$$\Gamma_1(z, z+h) = \frac{A^4 \pi^2 R^4}{\lambda^4 z^4 (1+q)^2} \left\{ 1 + \left| \frac{\iint \exp \left[\frac{ikq}{2z(1+q)} (x^2 + y^2) \right] dx dy}{\pi R^2} \right|^2 \right\}. \quad (2.43)$$

Po výpočtu posledního integrálu dojdeme k výsledku

$$\Gamma_1(z, z+h) = \frac{A^4 \pi^2 R^4}{\lambda^4 z^2 (z+h)^2} \left\{ 1 + \left[\frac{\sin [khR^2/4z(z+h)]}{khR^2/4z(z+h)} \right]^2 \right\}. \quad (2.44)$$

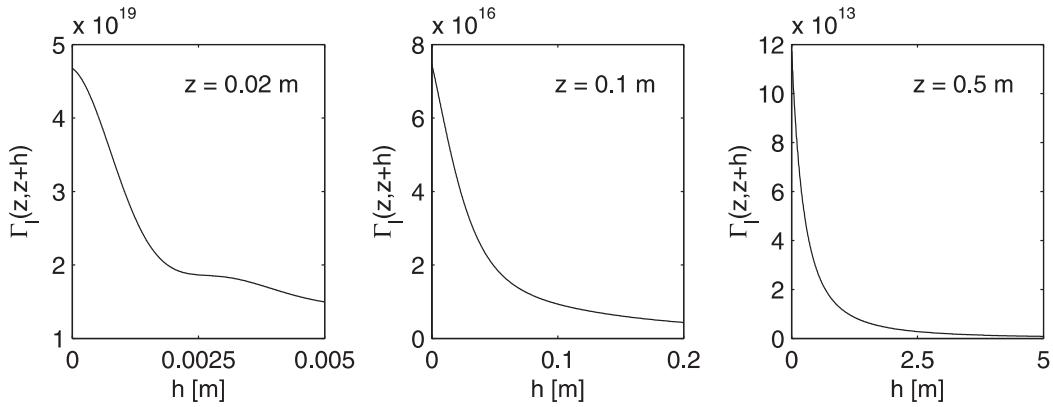
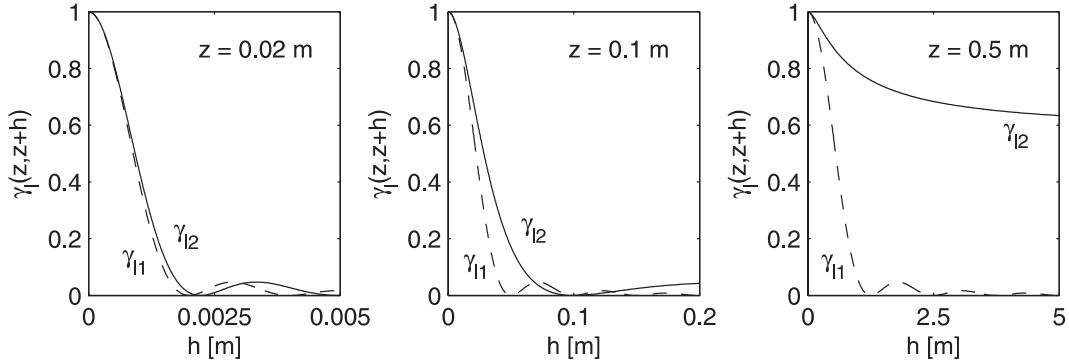
Koefficient korelace pak bude

$$\gamma_{l_2}(z, z+h) = \left[\frac{\sin (khR^2/4z(z+h))}{khR^2/4z(z+h)} \right]^2. \quad (2.45)$$

Pokud bychom nyní požadovali platnost předpokladu $z \gg h$, právě dosažené výsledky by přešly v dříve vypočtené vztahy (2.36) a (2.45).

Průběh autokorelační funkce (2.44) v závislosti na parametru h je pro různá z a konkrétní hodnoty $\lambda = 652$ nm, $D = 1$ mm vykreslen na obrázku 2.10. I pro poměrně malá z křivka s narůstajícím h stále klesá, aniž by nabývala minima. To způsobuje faktor $1/(z+h)^2$, který odpovídá poklesu amplitudy kulové vlny s narůstající vzdáleností h .

Nás však spíše zajímá změna intenzity způsobená interferencí vln, proto místo autokorelační funkce (2.44) využijeme koefficient korelace (2.45), který je normovaný. Průběh funkce γ_{l_2} je pro různé hodnoty vzdálenosti z vykreslen plnou čarou na obrázku 2.11. Průběh koefficientu korelace γ_{l_1} z rovnice (2.36) je vykreslen přerušovanou čarou. Pro malé z jsou obě křivky téměř shodné a nabývají prvního minima pro přibližně stejnou hodnotu h . Pro velké z však funkce γ_{l_2} nabývá prvního minima pro $h \rightarrow \infty$.

Obrázek 2.10: Průběh autokorelační funkce $\Gamma_1(z, z+h)$ v závislosti na vzdálenosti h .Obrázek 2.11: Průběh koeficientů korelace γ_{11} a γ_{12} v závislosti na vzdálenosti h .

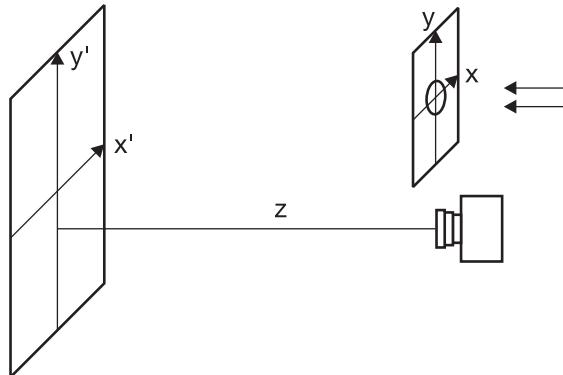
Rychle se zvětšující hodnota h , pro niž funkce γ_{12} nabývá minima, můžeme vysvětlit následovně. Při pohybu podél osy z ve směru od prvního stínítka se pro malé vzdálenosti z fáze vln pocházejících z různých bodů osvětlené oblasti mění různě rychle. Je tomu tak proto, že průměr osvětlené oblasti D není zanedbatelný oproti vzdálenosti z . Výsledná intenzita se tedy bude měnit poměrně rychle a funkce γ_{12} bude nabývat minima pro relativně malou vzdálenost h . Pro velké vzdálenosti z se fáze všech vln mění téměř stejně rychle, protože průměr osvětlené oblasti D je oproti vzdálenosti z zanedbatelný. Výsledná intenzita proto zůstává téměř konstantní a funkce γ_{12} nabývá prvního minima pro $h \rightarrow \infty$.

Stejnou argumentaci, jakou jsme použili pro osu z , lze aplikovat i na libovolnou přímku procházející středem osvětlené oblasti. Proto při experimentálním vytvoření objektivních speckles budeme na druhém stínítku pro všechny vzdálenosti $z \gg D$ pozorovat prakticky stejný interferenční obrazec, pouze zvětšený úměrně vzdálenosti z .

2.4.2 Experiment

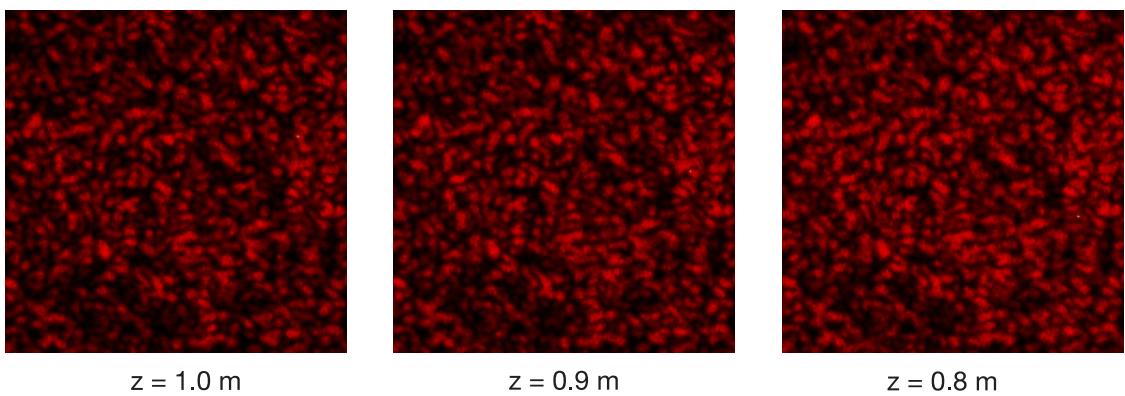
K ověření posledního tvrzení o neměnnosti struktury speckles při $z \gg D$ jsem realizoval experiment, jehož uspořádání je znázorněno na obrázku 2.12. První stínítko a hlavní rovina čočky fotoaparátu jsou tentokrát rovnoběžné s druhým stínítkem, zároveň se od něj

nachází ve stejné vzdálenosti z . Otvor v prvním stínítku je opět překryt tenkou igelitovou fólií, abychom po osvětlení otvoru laserovým ukazovátkem mohli na druhém stínítku pozorovat objektivní speckles. Vzájemná poloha fotoaparátu, laserového ukazovátka a prvního stínítka je pevně mechanicky zajištěna, aby nemohlo dojít k jejich vzájemnému posunutí.



Obrázek 2.12: Uspořádání experimentu.

Při tomto uspořádání jsem pořídil fotografie pro různé hodnoty z , jejich výřezy jsou na obrázku 2.13. Protože jsou čočka fotoaparátu i otvor v prvním stínítku ve stejné vzdálenosti od druhého stínítka, bude poměr střední velikosti zrn v příčném směru vůči rozměrům fotografie stále stejný. Předpokládanou stálost vzájemného uspořádání a tvaru zrn by tedy mělo být jednoduché ověřit. Při pohledu na fotografie na obrázku 2.13 je vidět, že struktura interferenčního obrazce se prakticky nemění. Přitom je samozřejmě třeba brát ohled na změnu střední intenzity světla se změnou vzdálenosti z , neboť tři uvedené fotografie byly pořízeny při stejném expozičním čase.



Obrázek 2.13: Fotografie objektivních speckles pořízené pro stejný otvor avšak různé vzdálenosti prvního a druhého stínítka.

2.5 Testy vlastností lidského oka pomocí koherenční zrnitosti

Některé vady lidského oka, např. krátkozrakost a dalekozrakost, lze odhalit a testovat pomocí jevu koherenční zrnitosti. Pozorujeme-li prostým okem stínítko s drsným povrchem osvětlené laserovým světlem, vzniknou na naší sítnici subjektivní speckles. Při pohybu hlavy v rovině rovnoběžné se stínítkem v jednom směru tam a zpět se některým pozorovatelům zdá, že se speckles posunují vůči stínítku proti směru pohybu hlavy. Jiní pozorovatelé zaznamenají pohyb speckles vůči stínítku ve stejném směru, jakým hýbou hlavou. Konečně některí pozorovatelé žádný pohyb speckles vůči stínítku nezaznamenají. Rozdíly v pozorovaném relativním pohybu speckles vůči stínítku jsou dány vlastnostmi očí pozorovatelů. V této části se pokusíme tento jev vysvětlit o něco podrobněji, než je tomu např. v [3].

Uvažujme nejdříve zdravé lidské oko, jehož schopnost zaostřovat je zcela v pořádku. Situace je schématicky zakreslena na obrázku 2.14a. Body stínítka jsou pomocí čočky oka zobrazeny na sítnici. Ohnisková vzdálenost čočky je f . Vzdálenost hlavní roviny čočky od předmětové roviny, tj. roviny prvního stínítka, označíme z_o . Vzdálenost hlavní roviny čočky od obrazové roviny je z_i . V případě zdravého oka je vzdálenost z_i rovna vzdálenosti roviny sítnice od hlavní roviny čočky, tu označíme z_r . Jinak řečeno, ostrý obraz stínítka se vytvoří právě na sítnici. Jednotlivé vzdálenosti jsou vázány čočkovou rovnicí

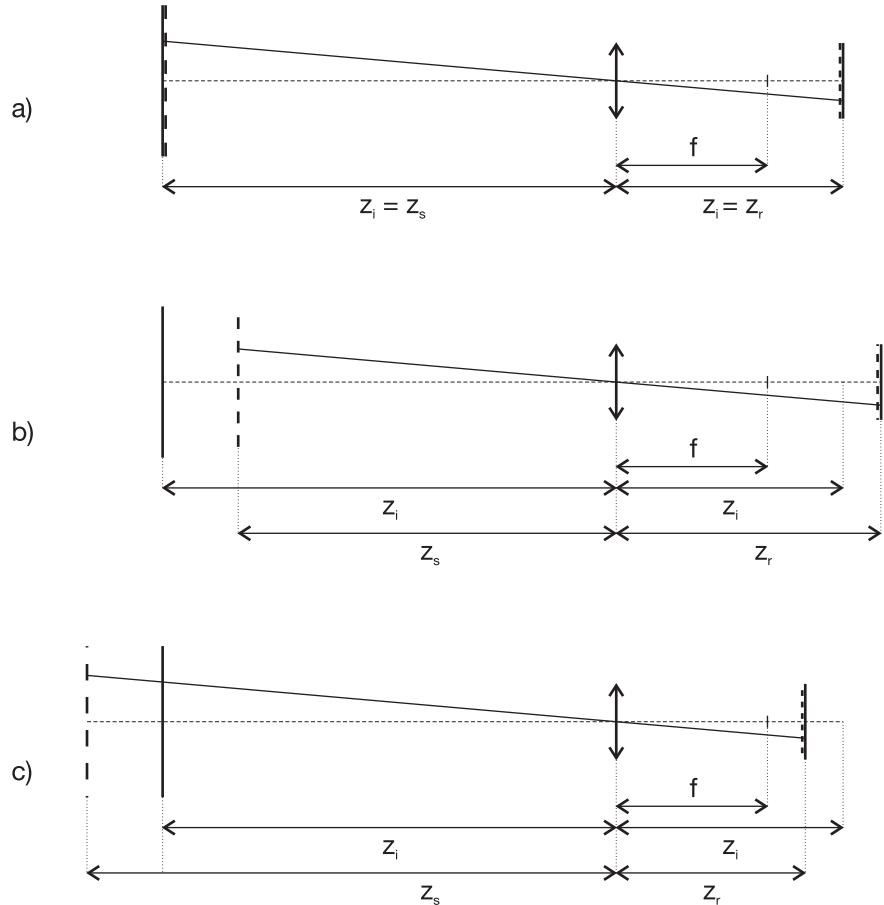
$$\frac{1}{z_o} + \frac{1}{z_i} = \frac{1}{f}. \quad (2.46)$$

Osvětlíme-li stínítko s drsným povrchem laserovým světlem, díky interferenci koherenčních vln vzniknou na sítnici oka subjektivní speckles. Důležité je, že speckles vytvořené na sítnici se vždy jeví ostře, bez ohledu na zaostření oka. Jestliže tedy v rovině sítnice, jež je shodná s obrazovou rovinou, vznikne ostrý obraz speckles, bude se pozorovateli zdát, že jejich vzor se nachází v rovině stínítka, neboť ta je shodná s předmětovou rovinou. Na osvětlené oblasti stínítka potom bude pozorovat strukturu světlých a tmavých skvrn odpovídající speckles vytvořeným na sítnici. Vzdálenost vzoru speckles od hlavní roviny čočky označíme z_s , pro zdravé oko je zřejmě $z_s = z_o$.

Při posouvání oka ve směru rovnoběžném se stínítkem se oko přirozeně otáčí tak, aby optická osa čočky protínala stínítko stále ve stejném bodě. Protože stínítko i vzor speckles leží ve stejné rovině, při pohybu oka se jejich vzájemná poloha nemění. Pozorovatelé se zdravýma očima tedy žádný vzájemný pohyb stínítka a vzoru speckles nezaznamenají.

Přejděme nyní ke krátkozrakému oku, situace je zakreslena na obrázku 2.14b. Ohnisková vzdálenost f a vzdálenosti z_o, z_i předmětové a obrazové roviny od hlavní roviny čočky jsou stejné jako u zdravého oka. Podstatný rozdíl však je ten, že rovina sítnice leží od hlavní roviny čočky dále než obrazová rovina, tedy $z_r > z_i$. Proto je obraz stínítka zachycený na sítnici rozmazaný. Subjektivní speckles vytvořené na sítnici však jsou ostré. Polohu jejich vzoru z_s můžeme dopočítat z čočkové rovnice

$$\frac{1}{z_s} + \frac{1}{z_r} = \frac{1}{f}. \quad (2.47)$$

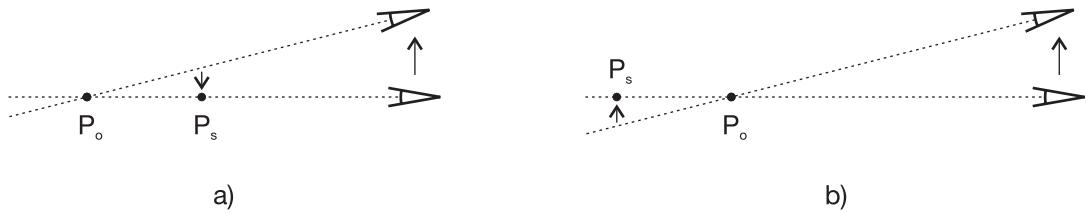


Obrázek 2.14: Uspořádání a) zdravého, b) krátkozrakého, c) dalekozrakého oka.

Srovnáním s rovnicí (2.46) a využitím nerovnosti $z_r > z_i$ dojdeme k další nerovnosti $z_o > z_s$. Vzor speckles se tedy bude nacházet v rovině ležící blíže hlavní rovině čočky než je rovina stínítka. Jednoduše řečeno, pozorovateli se budou speckles jevit blíže než samotné stínítko.

Jak jsme již zmínili, při posunutí oka ve směru rovnoběžném s rovinou stínítka se oko otáčí tak, že optická osa čočky protíná stínítko stále ve stejném bodě. Protože se speckles jeví blíže oku než stínítko, pozorovatel s krátkozrakým okem zaznamená relativní pohyb speckles vůči stínítku v opačném směru, než se posunuje jeho oko. Podstata situace je znázorněna na obrázku 2.15a. Na optické ose čočky zvolíme dva body P_s a P_o , přičemž bod P_o se od oka nachází ve větší vzdálenosti než bod P_s . Tyto dva body jsou v prostoru pevně umístěny. Budeme-li oko posouvat nahoru a zároveň jím otáčet tak, aby bod P_o stále ležel na optické ose, bod P_s se bude vůči bodu P_o pohybovat směrem dolů.

Analogicky můžeme diskutovat dalekozraké oko, situace tomu odpovídající je zakreslena na obrázku 2.14c. Vzdálenosti f, z_o a z_i jsou stále stejné, avšak rovina sítnice leží k hlavní rovině čočky blíže než obrazová rovina, tedy $z_r < z_i$. Subjektivní speckles zahycené na sítnici se opět jeví ostře. Pomocí čočkové rovnice (2.47) můžeme dopočítat vzdálenost vzoru speckles. Srovnáním rovnic (2.46) a (2.47) a využitím nerovnosti $z_r < z_i$



Obrázek 2.15: Relativní pohyb speckles vůči stínítku a) proti směru posunutí krátkozrakého oka, b) ve směru posunutí dalekozrakého oka.

dojdeme k nerovnosti $z_o < z_s$. Vzor speckles se tedy pozorovateli bude jevit dále než stínítko.

Při posouvání a otáčení oka pak pozorovatel s dalekozrakým okem zaznamená relativní pohyb speckles vůči stínítku ve stejném směru, jakým se oko posunuje. Podstata situace je pomocí bodů P_s a P_o ležících na optické ose znázorněna na obrázku 2.15b. Tentokrát se bod P_o nachází od oka v menší vzdálenosti než bod P_s . Při posunu oka nahoru a jeho současném otáčení tak, aby bod P_o stál ležel na optické ose, se bude bod P_s vůči bodu P_o pohybovat také nahoru.

Při pohybu oka však kromě možného relativního pohybu speckles vůči stínítku dochází také ke změně jejich struktury. To je nutným důsledkem faktu, že výsledný interferenční obrazec zachycený na sítnici závisí na vzájemné poloze stínítka a oka. Pokud by však k významné změně struktury speckles docházelo velmi rychle při sebemenším posunutí oka, nebyli bychom schopni relativní pohyb speckles vůči stínítku vůbec zaznamenat. To, že jsme schopni jej pozorovat, lze vysvětlit následující úvahou. Posuneme-li oko jen o vzdálenost malou ve srovnání s průměrem čočky, rozložení výsledné amplitudy a fáze na sítnici, které je dané interferencí dopadajících vln, se téměř nezmění, pouze se jako celek vzhledem k sítnici posune. Při pohybu oka se tedy vždy po určitou malou vzdálenost obrazec speckles chová jako objekt s téměř neproměnnou strukturou a proto pozorovatel zaznamená jeho relativní pohyb vůči stínítku.

Rozdílu ve schopnosti zaznamenat relativní pohyb speckles vůči stínítku si lze všimnout při pozorování osvětlené oblasti stínítka nejdříve samotným okem a poté přes otvor, který je výrazně menší než zornička oka. Posuneme-li oko v obou případech o stejnou vzdálenost, budou se speckles měnit mnohem rychleji při pozorování přes malý otvor. V tomto případě proto bude obtížnější zaznamenat jejich relativní pohyb vůči stínítku.

Kapitola 3

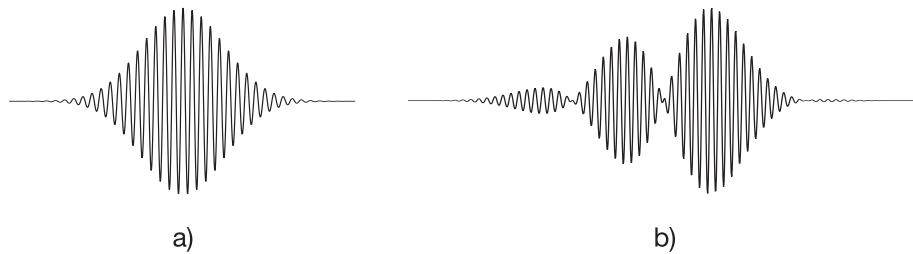
Fázové singularity

V další části práce se budeme zabývat tzv. *fázovými singularitami*, které vznikají při interferenci vln. Vlnění, např. zvukové či elektromagnetické, obecně popisujeme pomocí amplitudy a fáze. V místě, kde dochází k destruktivní interferenci vln, je amplituda výsledné vlny nulová. Fázi v tomto místě však nelze definovat, proto se hovoří o fázové singularitě.

Souvislost fázových singularit s jevem koherenční zrnitosti je velmi úzká. Protože pole koherenční zrnitosti vzniká interferencí vln šířících se z bodů osvětlené oblasti prvního stínítka, může v některých jeho bodech dojít k destruktivní interferenci vln. Výsledná amplituda je v takových bodech nulová, čemuž odpovídá singularita fáze.

3.1 Vznik fázových singularit

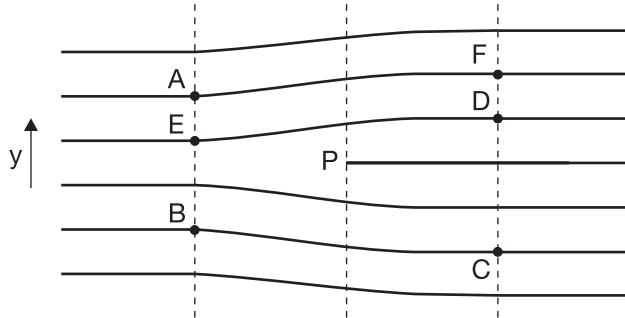
Abychom si dokázali představit, jak fázové singularity vznikají, uvažujme následující pokus, podrobněji popsaný v [8]. Malý zdroj ultrazvukových vln vysílá do okolního volného prostoru krátké pulsy, jejichž průběh v čase pro konkrétní místo lze pomocí mikrofonu zobrazit na osciloskopu (upřesněme, že na osciloskopu zaznamenáme jen reálnou nebo imaginární část komplexní funkce, kterou vlnění obecně popisujeme). Průběh signálu v čase je na obrázku 3.1a – amplituda sinusových vln určité frekvence je modulována gaussovskou obálkou. Do prostoru následně umístíme stínítko s drsným povrchem, od kterého se vysílané pulsy mohou odražet. Na osciloskopu zobrazíme průběh signálu v čase po odrazu od stínítka, viz obrázek 3.1b. Počet sinusových vln (délka signálu) se zvětšil a tvar obálky se výrazně změnil.



Obrázek 3.1: Průběh signálu na osciloskopu a) pro původní vlnu b) pro odraženou vlnu.

Zobrazíme-li polohu maxim odraženého signálu pro pevně zvolený čas v konkrétní rovině prostoru, dostaneme strukturu spojitéch čar znázorněnou na obrázku 3.2. Všimněme si především, že v bodě P jedna z čar končí. Zvolme body A až F na jednotlivých čarách a souřadnicovou osu y dle obrázku.

Při přechodu z bodu A do B po úsečce spojující tyto dva body, tj. proti směru osy y , přeskočíme mezi dvěma sousedními maximy signálu celkem třikrát. Přejdeme-li mezi body B a C po plné čáre, jež odpovídá stejnému maximu, není třeba žádného přeskoku. Nyní uskutečníme opět tři přeskoky mezi sousedními maximy, tj. mezi body C a D ve směru osy y . Nakonec se přesuneme po plné čáre z bodu D do E, přičemž není třeba žádného přeskoku. Očekávali bychom, že při stejném počtu přeskoků mezi maximy uskutečněných v záporném a kladném směru osy y (tj. mezi body A, B a C, D), se dostaneme zpět do výchozího bodu. Avšak to se nestalo. Abychom se vrátili zpět do bodu A, bylo by třeba uskutečnit čtyři přeskoky mezi body C do F a teprve pak se přesunout do A. Při oběhu kolem bodu P po uzavřené křivce je tedy potřeba o jeden přeskok více v jednom směru osy x než ve druhém. Absolutní hodnota rozdílu fáze mezi dvěma sousedními maximy signálu je 2π , proto se při oběhu kolem bodu P po uzavřené křivce ABCFA fáze změní o 2π .



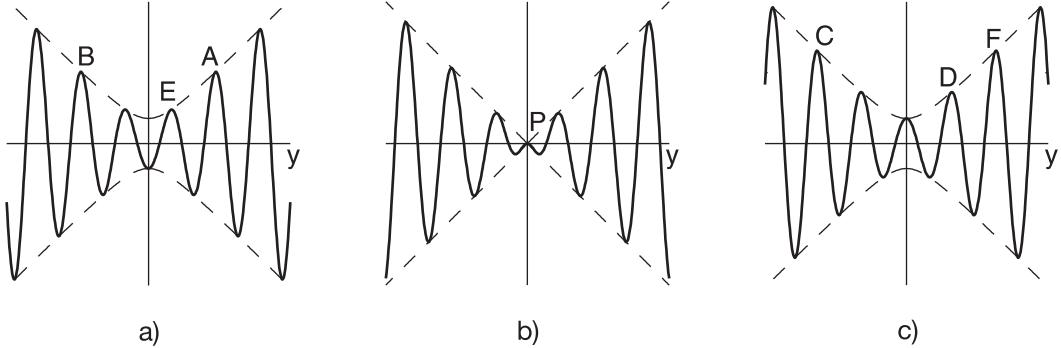
Obrázek 3.2: Poloha maxim signálu ve zvolené rovině v prostoru.

Na obrázku 3.3 je vykreslen průběh signálu v pevně zvoleném čase na přímkách rovnoběžných s osou y a procházejících body A, P a F. Kromě samotného signálu je přerušovanou čarou vykreslena i obálka modulující amplitudu sinusových vln. Nejdůležitější je pro nás přímka procházející bodem P. V tomto bodě funkce popisující tvar obálky klesá na nulu, tedy i signál zde musí být nulový. Jestliže je amplituda vlny v bodě P nulová, nelze v něm definovat hodnotu fáze – nachází se zde fázová singularita. Její definici nyní zpřesníme.

3.2 Definice a matematický popis fázových singularit

K matematickému popisu výsledné vlny (tj. vlny odražené od stínítka) použijeme skalární komplexní funkci $\psi(\mathbf{r}, t)$, která musí být řešením skalární vlnové rovnice

$$\nabla^2 \psi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2}, \quad (3.1)$$



Obrázek 3.3: Průběh signálu na různých přímkách rovnoběžných s osou y v pevně zvoleném čase.

kde c je rychlosť šíření vlny. Funkcia $\psi(\mathbf{r}, t)$ obecně závisí na polohovém vektoru \mathbf{r} a čase t . Budeme-li předpokládat řešení (3.1) ve tvaru

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \psi(\mathbf{r}) e^{-i\omega t}, \quad (3.2)$$

kde ω je úhlová frekvence, po dosazení do (3.1) a úpravě můžeme přejít k tzv. Helmholtzově rovnici pro prostorovou část $\psi(\mathbf{r})$

$$\nabla^2 \psi(\mathbf{r}) + k^2 \psi(\mathbf{r}) = 0. \quad (3.3)$$

Přitom jsme zavedli vlnové číslo $k = \omega/c$.

Funkci $\psi(\mathbf{r}, t)$ můžeme zapsat pomocí reálné části $\xi(\mathbf{r}, t)$ a imaginární části $\eta(\mathbf{r}, t)$, přičemž přímý fyzikální význam má jen jedna z nich. Ekvivalentně můžeme zápis provést pomocí amplitudy $\varrho(\mathbf{r}, t)$ a fáze $\chi(\mathbf{r}, t)$, tedy

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \xi(\mathbf{r}, t) + i\eta(\mathbf{r}, t) = \varrho(\mathbf{r}, t) e^{i\chi(\mathbf{r}, t)}. \quad (3.4)$$

V dalším textu budeme často místo $\psi(\mathbf{r}, t)$ či $\psi(\mathbf{r})$ používat zkrácený zápis ψ , analogicky u ostatních veličin. Samotné funkce ξ , η , ϱ a χ jsou reálné, pro amplitudu dále platí $\varrho \geq 0$, fázi budeme nejčastěji udávat na intervalu $(-\pi, \pi)$.

Singularity fáze se nachází v bodech prostoru, kde

$$\psi(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (3.5)$$

což je ekvivalentní podmínkám pro reálnou a imaginární část

$$\xi(\mathbf{r}, t) = 0, \quad \eta(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (3.6)$$

jež musí platit zároveň, nebo podmínce pro amplitudu

$$\varrho(\mathbf{r}, t) = 0. \quad (3.7)$$

V trojrozměrném prostoru je množinou řešení každé z rovnic uvedených v (3.6) soustava ploch, jejichž tvar může být obecně velmi složitý. Průnik dvou ploch, z nichž každá je

řešením jiné rovnice v (3.6), definuje spojitou křivku, resp. soustavu křivek, jež je řešením (3.5). Takovou křivku budeme nazývat *singulární čárou* či *singulární křivkou*. Ve dvojrozměrném prostoru, tedy např. v konkrétní rovině zvolené ve trojrozměrném prostoru, jsou obvykle řešením (3.5) izolované body, které jsou ve skutečnosti průnikem singulárních křivek se zvolenou rovinou.

Omezme se nyní pro jednoduchost na dvojrozměrný prostor, v němž se nachází bod se singularitou fáze. Sestrojme uzavřenou, sebe samu neprotínající křivku C , která obepíná singulární bod. Přitom tímto bodem nesmí procházet, aby byl ve všech bodech křivky definován gradient fáze $\nabla\chi$. *Sílu singularity s* definujeme pomocí křivkového integrálu

$$s = \frac{1}{2\pi} \oint_C d\chi = \frac{1}{2\pi} \oint_C \nabla\chi \cdot dr. \quad (3.8)$$

Její význam je následující. Zvolme na křivce C libovolný počáteční bod, v němž je fáze rovna $\chi \in \langle -\pi, \pi \rangle$. Po oběhu podél celé křivky proti směru hodinových ručiček se navrátíme do počátečního bodu, přičemž fáze bude mít hodnotu $\chi + 2\pi s$ (znaménko plus zde volíme jako definici). Vzhledem k fyzikálnímu významu fáze musíme požadovat, aby

$$(\chi + 2\pi s) \bmod 2\pi = \chi, \quad (3.9)$$

čehož lze docílit jedině tak, že s bude celé číslo. Při oběhu kolem křivky ve zvoleném směru se tedy fáze změní o $+2\pi s$. Pokud je číslo s kladné, fáze naroste o $2\pi s$, v opačném případě fáze o tuto hodnotu klesne. Pokud bychom obíhali po směru hodinových ručiček, tj. v opačném směru, fáze by se změnila o $-2\pi s$. Síla singularity přitom nezávisí na konkrétním tvaru zvolené křivky. Obecně se vyskytují především singularities síly $|s| = 1$, experimentálně však lze realizovat i singularity s vyšší silou (viz kapitola 4).

Ještě bychom měli o něco přesněji určit, co se myslí oběhem po a proti směru hodinových ručiček. V rovině s fázovou singularitou můžeme definovat kartézskou soustavu souřadnic (x, y) tak, že fázová singularity leží v jejím počátku. Bázové vektory této soustavy označíme $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y$. Pomocí pravidla pravé ruky určíme směr vektoru \mathbf{e}_z daného kartézským součinem $\mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_y$. Natočíme-li nyní pravou ruku tak, že vztyčený palec ukazuje ve směru vektoru \mathbf{e}_z , pak zahnuté prsty určují matematicky kladný směr oběhu, čemuž odpovídá oběh proti směru chodu hodinových ručiček.

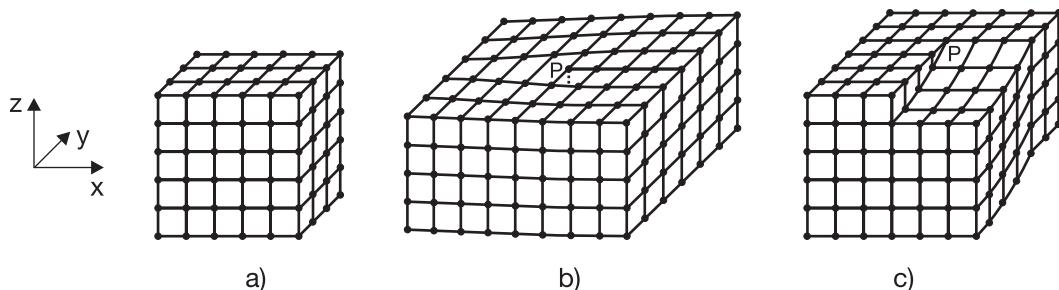
3.3 Tvar plochy konstantní fáze v okolí singulární čáry

Řešení vlnové rovnice (3.1), která obsahují fázové singularities, se mohou zásadně odlišovat ve tvaru plochy konstantní fáze v okolí singulární čáry (viz [8]). Existují dva základní typy tvaru vlnoploch. Abychom mohli zavést jejich standardně používané pojmenování, je třeba udělat malou odbočku do teorie popisující poruchy krystalové struktury pevných látek.

Zvolme atomy uspořádané v prosté kubické mřížce, která je schématicky zakreslená na obrázku 3.4a. Poruch (dislokací) krystalové struktury existuje celá řada, nás však budou zajímat dvě konkrétní – tzv. hranová a šroubová dislokace.

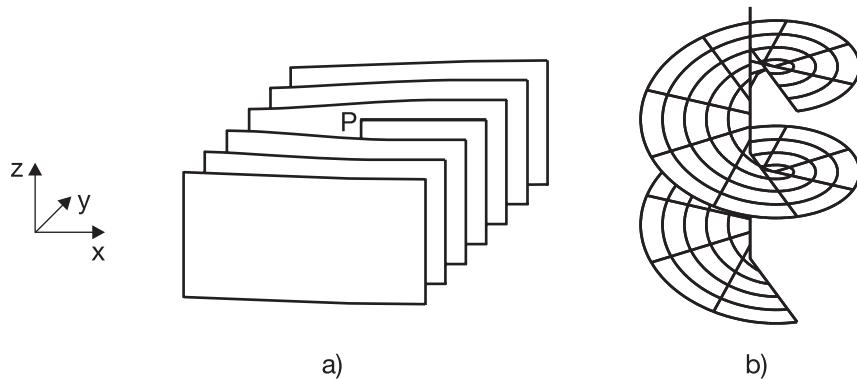
Na obrázku 3.4b je znázorněna hranová dislokace. Mezi dvě sousední atomové roviny původně rovnoběžné s rovinou xz , které jakoby pokračují do nekonečna, je vsunuta další, která však nekonečná není. Její okraj (hranu) představuje přímka rovnoběžná s osou z a procházející bodem P. Aby krystal zůstal jako celek stabilní, musí se poblíž hranové dislokace původní dokonalá pravidelnost uspořádání atomů porušit.

Šroubová dislokace je znázorněna na obrázku 3.4c. Krystal jakoby rozřízneme polorovinou kolmou na osu x , jejíž okrajová přímka je rovnoběžná s osou z a prochází bodem P. Atomy napravo od dělící poloroviny posuneme svisle dolů tak, že velikost posunutí je nulová pro atomy ležící na okrajové přímce procházející bodem P a rychle roste až po hodnotu mřížkové konstanty pro atomy více vzdálené ve směru y od okrajové přímky. Původní atomová rovina rovnoběžná s rovinou xy je tedy šroubovitě zdeformována, osou šroubovické je svislá přímka procházející bodem P.



Obrázek 3.4: Kryslalová mřížka a) neporušená, b) s hranovou dislokací, c) se šroubovou dislokací.

Výše zmínované dva základní typy tvaru vlnoploch v okolí singulárních křivek jsou schématicky znázorněny na obrázku 3.5. V případě a) tvoří body s fázovou singularitou přímku, která je rovnoběžná s osou z . Singulární přímka je zároveň okrajovou přímou jedné z ploch konstantní fáze, zatímco ostatní plochy jsou jakoby nekonečné. Tvar vlnoploch v okolí singulární křivky je velmi podobný tvaru atomových rovin u hranové dislokace v krystalu, proto se pro tento jev používá označení *hranová dislokace* či *hranová singularita*.



Obrázek 3.5: Tvar vlnoploch v okolí singulární křivky a) hranová singularita, b) šroubová singularita.

singularita. Při oběhu kolem singulární přímky po uzavřené křivce v libovolné rovině $z = \text{konst}$ se fáze změní o 2π . S podobným tvarem ploch konstantní fáze jsme se setkali již na obrázku 3.2.

V případě obrázku 3.5b se body se singularitou fáze také nachází na přímce rovnoběžné s osou z . Plocha konstantní fáze tvoří levotočivou šroubovici, jejíž osou je právě singulární přímka. Tvar vlnoplochy je velmi podobný tvaru atomových rovin u šroubové dislokace, proto se pro tento jev používá označení *šroubová dislokace* či *šroubová singularita*. Při oběhu kolem singulární přímky po uzavřené křivce v libovolné rovině $z = \text{konst}$ se fáze změní o 2π . V následujících dvou podsekčích podrobněji prozkoumáme vlastnosti hranové a šroubové dislokace.

3.3.1 Hranová singularita

Postupem podrobněji popsaným v [8] lze ukázat, že funkce

$$\psi = (x + iy) \exp [iky], \quad (3.10)$$

kde k je velikost vlnového vektoru, je přibližným řešením Helmholtzovy rovnice (3.3) a zároveň vlna popsaná touto funkcí obsahuje hranovou dislokaci. Uspořádání vlnoploch vzhledem k souřadným osám odpovídá obrázku 3.5a. Singulární přímka je určena průnikem rovin $x = 0, y = 0$. Pro amplitudu ϱ a fázi χ , definované rovnicí (3.4), dostáváme po úpravách vztahy

$$\varrho^2 = x^2 + y^2, \quad \chi = \arctan \frac{y}{x} + ky. \quad (3.11)$$

Z nich je vidět, že v bodě $P[0, 0, z]$ je amplituda opravdu nulová. Graf závislosti fáze na souřadnicích x, y v libovolné rovině $z = \text{konst}$ je na obrázku 3.6, přitom jsme zvolili $k = 1$ (tato volba platí i pro ostatní obrázky v této části). Při oběhu kolem bodu P proti směru hodinových ručiček podél uzavřené křivky ležící v rovině xy se fáze zvětší o 2π , tzn. síla singularity je $s = 1$.

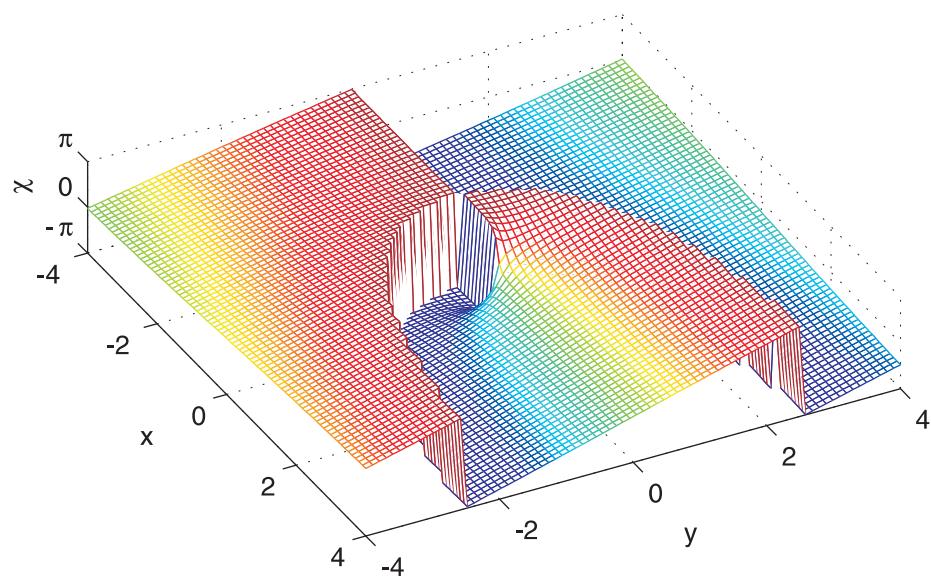
Na obrázku 3.7 jsou pak vykresleny křivky konstantní fáze (systém křivek jdoucích především ve směru osy x), převedené na interval $(-\pi, \pi)$. Všechny křivky se stýkají právě v bodě P, v němž fáze není definována.

Vratme se ještě k obrázku 3.2, na němž jsou vykresleny polohy maxim signálu naměřeného na osciloskopu ve zvolené rovině v prostoru. Polohy maxim vytváří spojité křivky, které jsou ve skutečnosti křivkami odpovídajícími určité konstantní hodnotě fáze. Obrázek 3.7 tedy můžeme považovat za zvětšeninu obrázku 3.2 v okolí bodu P, přičemž body ležící v místech maxima signálu odpovídají hodnotě fáze $\chi = 0$.

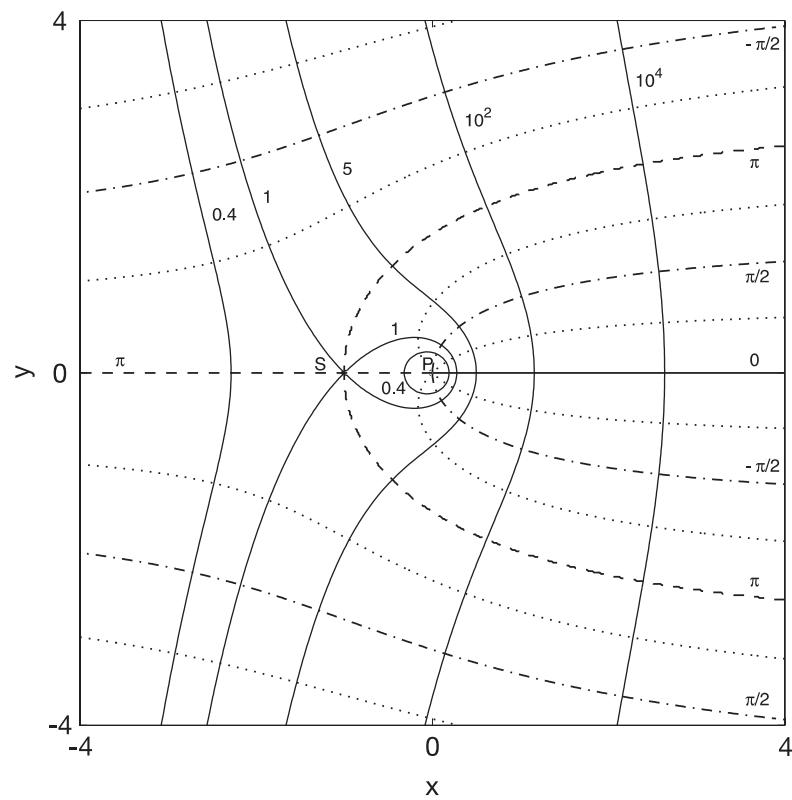
Kromě křivek konstantní fáze jsou na obrázku 3.7 vykresleny i křivky konstantní velikosti gradientu fáze $|\nabla \chi|$ (systém křivek jdoucích převážně ve směru osy y). Lze ukázat (viz [8]), že křivky jsou popsány rovnicí

$$(kx)^2 + (ky)^2 = Q^2 \exp [-2(1 + kx)], \quad (3.12)$$

kde konstanta Q určuje hodnotu velikosti gradientu fáze. V bodě S je gradient fáze nulový, nachází se zde sedlový bod fáze. Vypočteme-li rotaci vektorového pole gradientu fáze,



Obrázek 3.6: Průběh fáze v okolí hranové singularity.



Obrázek 3.7: Křivky konstantní fáze a konstantní velikosti gradientu fáze v okolí hranové singularity.

dostaneme v každém bodě nulový vektor, neboť obecně je rotace gradientu skalární funkce nulová. Vektorové pole gradientu fáze je tedy nevírové.

Hranové singularity se vyskytují při difrakci monochromatické rovinné vlny na hraně nepropustné poloroviny, průběh křivek konstantní fáze lze nalézt např. v [4]. Na hranové singularity narazíme také při popisu přílivu a odlivu moří. Periodické zvedání a snižování hladiny pozorované u pobřeží lze popsat pomocí skalární komplexní funkce, která obsahuje hranovou singularitu – někde v centrální části moře se nachází bod, kde se příliv ani odliv vůbec neprojeví. Tvar křivek konstantní fáze lze nalézt např. v [6] nebo [14].

3.3.2 Šroubová singularita

Jedno z nejjednodušších přesných řešení Helmholtzovy rovnice, které obsahuje šroubovou singularitu, má tvar

$$\psi = (x + iy) \exp [ikz], \quad (3.13)$$

kde k je vlnové číslo. Pro amplitudu a fázi dostaváme rovnice

$$\rho^2 = x^2 + y^2, \quad \chi = \arctan \frac{y}{x} + kz. \quad (3.14)$$

Singulární přímka je určena průnikem rovin $x = 0, y = 0$, tedy amplituda je nulová v bodě $P[0, 0, z]$. Graf závislosti fáze na souřadnicích x, y v rovině $z = 0$ je na obrázku 3.8a. Při oběhu kolem bodu P proti směru hodinových ručiček po uzavřené křivce ležící v rovině xy se fáze zvětší o 2π , proto je síla singularity $s = 1$. Křivky konstantní fáze jsou vykresleny na obrázku 3.9a, je vidět, že se všechny paprskovitě sbíhají v bodě P .

Zavedeme-li v rovině xy polární souřadnice (r, φ) standardními vztahy

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi. \quad (3.15)$$

dostaneme pro fázi χ jednoduchý výraz

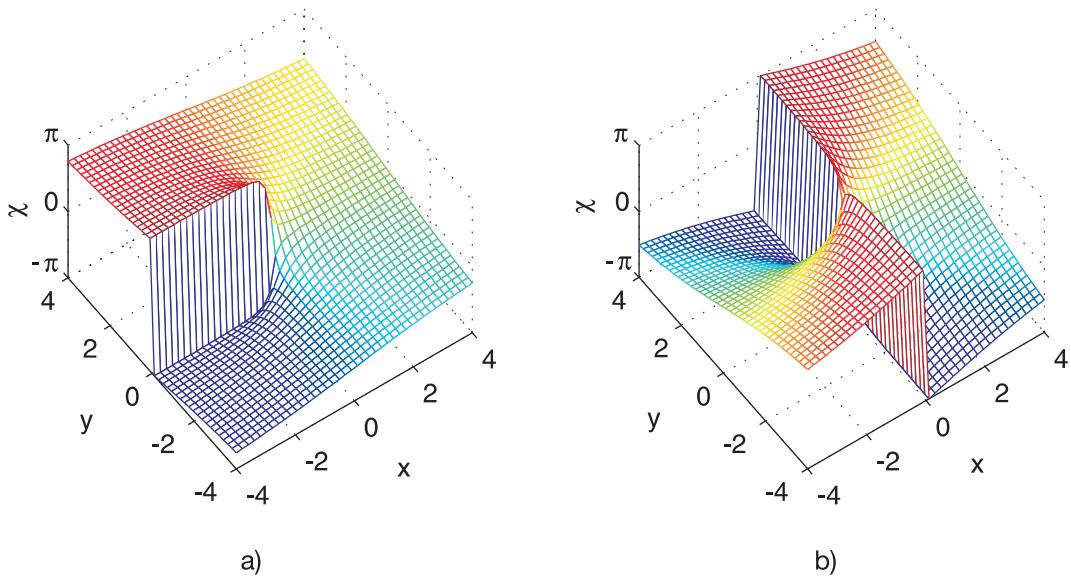
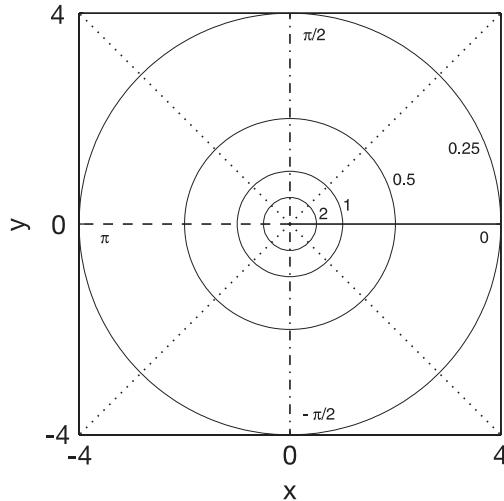
$$\chi = \varphi + kz. \quad (3.16)$$

Vyjádřením operátoru nabla ve válcových souřadnicích (r, φ, z) dostaneme pro gradient fáze vztah

$$\nabla \chi = \frac{\partial \chi}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi + \frac{\partial \chi}{\partial z} \mathbf{e}_z = \frac{1}{r} \mathbf{e}_\varphi + k \mathbf{e}_z. \quad (3.17)$$

Pokud bychom se omezili pouze na průměr gradientu fáze do roviny $z = \text{konst}$, pak křivky konstantní velikosti gradientu fáze v této rovině jsou soustředné kružnice se středem v bodě P , neboť velikost gradientu fáze je nepřímo úměrná vzdálenosti od tohoto bodu. Na obrázku 3.9 je několik těchto kružnic vykresleno, u každé je uvedena hodnota $1/r$. Rotace vektorového pole gradientu fáze ve zvolené rovině je ze stejných důvodů jako u hranové singularity nulové vektorové pole. Tedy pole gradientu fáze v této rovině je nevírové.

Formálně stejné vlastnosti jako gradient fáze u šroubové singularity má vektorové pole rychlosti popisující proudění kapaliny v okolí víru, který vzniká např. při rotaci pevného válce ve viskózní kapalině. Vektorové pole rychlosti je také nevírové, velikost rychlosti

Obrázek 3.8: Průběh fáze v okolí šroubové singularity a) síly $s = 1$, b) síly $s = 2$.Obrázek 3.9: Křivky konstantní fáze a konstantní velikosti gradientu fáze v rovině $z = 0$ v okolí šroubové singularity síly $s = 1$.

rovněž klesá nepřímo úměrně vzdálenosti od osy víru a směr rychlosti v daném bodě je dán směrem tečny ke kružnici, která tímto bodem prochází a má střed na ose víru.

Tvar plochy konstantní fáze v trojrozměrném prostoru v blízkosti singulární křivky si můžeme lépe představit pomocí vztahu (3.16). Při nárůstu velikosti úhlu φ musí klesat hodnota součinu kz , proto je plochou konstantní fáze šroubovice podobná té, která je na obrázku 3.5a. Ve velké vzdálenosti od singulární přímky jsou pak plochy konstantní fáze roviny kolmé k jejímu směru.

Řešení Helmholtzovy rovnice obsahující šroubovou singularitu síly $s = \pm l$, kde l je

přirozené číslo, můžeme obecně zapsat ve tvaru

$$\psi = (x \pm iy)^l \exp(ikz) = r^l \exp[i(kz \pm l\varphi)], \quad (3.18)$$

kde k je vlnové číslo. Závislost fáze na souřadnicích x, y je pro $s = 2$ vykreslena na obrázku 3.8b. Plochou konstantní fáze v trojrozměrném prostoru v okolí singulární křivky je l -násobná pravotočivá či levotočivá šroubovice.

Šroubové singularity síly $|s| = 1$ mohou vznikat při interferenci monochromatických rovinných vln, tímto jevem se budeme zabývat v části 3.4. Šroubové singularity obsahují také svazky laserového světla, jejichž komplexní amplituda je v rovině kolmé na osu svazku popsána pomocí součinu přidružených Laguerrových polynomů a Gaussovy funkce. Podrobněji se těmito svazky budeme zabývat v kapitole 4.

3.4 Interference rovinných vln

Při interferenci více jak dvou monochromatických rovinných vln s obecně zvolenými amplitudami a vzájemným fázovým posuvem mohou vznikat šroubové singularity. Pokud jsou vlny tři nebo čtyři, ze znalosti jejich amplitud lze vyvodit prostorovou strukturu singulárních čar (viz [22]). Pro větší počet vln je tvar singulárních čar příliš složitý a lze jej popsat především díky numerickým postupům. Vlnové vektory rovinných vln přitom budeme vybírat z určité podmnožiny povolených vlnových vektorů, čímž díky tzv. Talbotovu jevu dosáhneme jisté periodičnosti struktury singulárních čar v prostoru.

3.4.1 Talbotův jev

Při difrakci rovinné vlny na difrakční mřížce dochází v malé vzdálenosti od mřížky, kde jsou splňeny podmínky tzv. Fresnelovy difrakce, k Talbotovu jevu [26]. Jeho podstatou je rekonstrukce obrazu difrakčních štěrbin v rovinách rovnoběžných s mřížkou a periodicky od mřížky vzdálených. Velikost této prostorové periody se označuje jako Talbotova délka. V rovině vzdálené od mřížky polovinu Talbotovy délky se také vytvoří obraz štěrbin, avšak fázově posunutý o půl periody. Ve vzdálenosti jedné čtvrtiny Talbotovy délky se objeví obraz s dvojnásobnou prostorovou frekvencí. Lze ukázat, že tzv. sub-obrazy s větší prostorovou frekvencí případně fázovým posuvem vznikají ve všech vzdálenostech, jejichž poměr vůči Talbotově délce lze vyjádřit poměrem dvou celých čísel. Odvození velikosti Talbotovy délky provedeme poněkud odlišně od běžného postupu, uvedeného např. v [26], aby bylo více jasné, čeho použijeme při výběru povolených vlnových vektorů.

V prostoru zvolme kartézskou soustavu souřadnic (x, y, z) , polohový vektor označíme \mathbf{r} . Uvažujme rovinnou vlnu

$$\psi(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}, \quad (3.19)$$

jejíž vlnový vektor $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$ má velikost $|\mathbf{k}| = k = \frac{2\pi}{\lambda}$, kde λ je vlnová délka. Počáteční fázi jsme pro jednoduchost zvolili nulovou. Předpokládejme, že složka k_z vlnového vektoru je o hodně větší než složky k_x a k_y . To znamená, že hlavní směr šíření

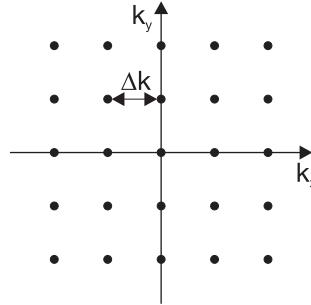
vlny je podél osy z , resp. rovina konstantní fáze je téměř rovnoběžná s rovinou $z = \text{konst}$. Pro vyjádření složky k_z potom můžeme použít přibližný vztah

$$k_z = \sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2} \approx k - \frac{k_x^2 + k_y^2}{2k}. \quad (3.20)$$

Dalším předpokladem je, že složky k_x a k_y lze zapsat jako

$$k_x = m\Delta k, \quad k_y = n\Delta k, \quad m, n \in Z, \quad (3.21)$$

kde Δk je perioda pravidelné pravoúhlé mřížky v k -prostoru v rovině $k_x k_y$, viz obrázek 3.10. Vzhledem k předpokládanému poměru velikostí složek vlnového vektoru musí platit $\Delta k \ll k$. Periodě Δk odpovídá v reálném prostoru vzdálenost $L_{xy} = \frac{2\pi}{\Delta k}$. Tato vzdálenost je prostorovou periodou funkce ψ ve směrech x a y . Není to perioda nejmenší, avšak je nejmenší společná pro vlny s různými a nesoudělnými m , resp. n .



Obrázek 3.10: Pravidelná pravoúhlá mřížka s periodou Δk v k -prostoru v rovině $k_x k_y$.

V rovině $z = 0$ má funkce ψ , popisující vlnu v prostoru, tvar

$$\psi_0 = \psi(x, y, z = 0) = \exp [i(k_x x + k_y y)], \quad (3.22)$$

V libovolné rovině z pak

$$\psi_z = \psi(x, y, z) = \psi_0 \exp [ik_z z] \approx \psi_0 \exp [ikz] \exp \left[-\frac{i(k_x^2 + k_y^2)z}{2k} \right], \quad (3.23)$$

přičemž pro napsání přibližného vztahu jsme využili rovnice (3.20). Dosazením z rovnice (3.21) dále dostaneme

$$\psi_z \approx \psi_0 \exp [ikz] \exp \left[-\frac{i(m^2 + n^2)\Delta k^2 z}{2k} \right] = \psi_0 \exp [ikz] \exp \left[-\frac{2\pi i(m^2 + n^2)z}{L_z} \right], \quad (3.24)$$

kde jsme během poslední úpravy označili $L_z = \frac{4\pi k}{\Delta k^2}$. Z posledního vztahu je vidět, že když za z dosadíme celočíselný násobek L_z , bude funkce ψ_z až na fázový faktor e^{ikz} stejná jako ψ_0 . Čísla m, n jsou totiž celá, proto se fáze v posledním členu změní o celočíselný násobek 2π . Pro jednu rovinnou vlnu samozřejmě není L_z nejmenší vzdálenost, pro niž

platí $\psi_z = \psi_0$, avšak je to nejmenší společná vzdálenost pro vlny s různými a nesoudělnými m , resp. n .

Při superpozici více rovinných vln, jejichž vlnové vektory mají stejnou velikost, tedy stačí zvolit složky vlnových vektorů dle předpokladů uvedených výše a předpisu (3.21), čímž dosáhneme prostorové periodičnosti výsledné funkce ψ . Prostorová perioda ve směrech x a y , resp. z je

$$L_{xy} = \frac{2\pi}{\Delta k}, \quad \text{resp.} \quad L_z = \frac{4\pi k}{\Delta k^2}. \quad (3.25)$$

Kvádr s těmito rozměry v příslušných směrech se označuje jako Talbotova buňka. Numerické výpočty, pomocí nichž budeme hledat body ležící na singulárních čarách vzniklých při interferenci rovinných vln, tedy stačí provést pouze v rámci jedné Talbotovy buňky. Tvar singulárních křivek ve větší části prostoru pak získáme poskládáním více Talbotových buněk správnými stěnami k sobě.

3.4.2 Tři rovinné vlny

Standardní tvar funkce $\psi_j(\mathbf{r})$ popisující jednu rovinnou vlnu je

$$\psi_j(\mathbf{r}) = A_j e^{i(\mathbf{k}_j \cdot \mathbf{r} + \phi_j)}, \quad (3.26)$$

kde \mathbf{k}_j je vlnový vektor a ϕ_j počáteční fáze v bodě $\mathbf{r} = \mathbf{0}$. Složením tří rovinných vln dostaneme výslednou vlnu

$$\psi(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^3 \psi_j(\mathbf{r}) = \varrho(\mathbf{r}) e^{i\chi(\mathbf{r})}. \quad (3.27)$$

Pro jednoznačnost popisu v této a následujících podsekčích zvolme vztah mezi amplitudami vln $A_j \geq A_{j+1}$. Aby vůbec mohlo dojít k destruktivní interferenci, musí platit $A_1 \leq A_2 + A_3$. Pokud je tato podmínka splněna, lze poměrně jednoduše nalézt tvar singulárních čar.

Vztah amplitud a vzájemného fázového posuvu vln lze nejlépe popsat pomocí fázového diagramu. Pro bod ležící na singulární křivce musí být vzájemné natočení fázorů takové, že výsledkem jejich vektorového součtu je nulový vektor. Tomu pro pevně zvolené amplitudy a počáteční fáze vln odpovídají pouze dvě možnosti vzájemného natočení fázorů, přičemž tato dvě uspořádání jsou zrcadlově souměrná. Při posunu podél singulární křivky se jednotlivé fázory otáčejí kolem počátku grafu, jejich vzájemná poloha však musí zůstávat stejná. Jinak řečeno, změna fáze každé z vln musí být stejná.

Analyticky můžeme tvar singulárních křivek odvodit následujícím postupem. V prostoru zavedeme kartézskou soustavu souřadnic (x, y, z) . Na singulární křivce zvolíme bod $P[x, y, z]$, ve kterém musí platit

$$\psi_1(x, y, z) + \psi_2(x, y, z) + \psi_3(x, y, z) = 0. \quad (3.28)$$

Kousek vedle bodu P zvolíme na stejně singulární křivce bod $P'[x', y', z']$, pro nějž platí

$$\psi_1(x', y', z') + \psi_2(x', y', z') + \psi_3(x', y', z') = 0, \quad (3.29)$$

kde $x' = x + dx$, $y' = y + dy$, $z' = z + dz$. Změnu fáze mezi body P a P' , která je pro všechny vlny stejná, označíme $d\phi$. Rozepíšeme-li vlnový vektor \mathbf{k}_j ve složkách, tj. $\mathbf{k}_j = (k_{j1}, k_{j2}, k_{j3})$, můžeme fázovou změnu postupně vyjádřit pro všechny vlny ve tvaru

$$\begin{aligned} k_{11}dx + k_{12}dy + k_{13}dz &= d\phi, \\ k_{21}dx + k_{22}dy + k_{23}dz &= d\phi, \\ k_{31}dx + k_{32}dy + k_{33}dz &= d\phi. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Známe-li vlnové vektory rovinných vln, lze z této soustavy diferenciálních rovnic určit rovnici singulární křivky v parametrickém tvaru. Přímým řešením soustavy (3.30) lze obecně ukázat, že singulární čáry jsou přímky, jejichž směr je dán vektorem $\mathbf{k}_1 \times \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_2 \times \mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_3 \times \mathbf{k}_1$.

Na obrázku 3.11 jsou pomocí numerického výpočtu vykresleny body ležící na singulárních čarách vzniklých při interferenci tří rovinných vln. Je vidět, že singulární křivky tvoří soustava rovnoběžných přímek. Velikost vlnových vektorů, jež musí být v případě monochromatických vln stejná, byla zvolena $|\mathbf{k}_j| = 1$. Dále byly pro všechny vlny shodně zvoleny amplitudy $A_j = 1$ a počáteční fáze $\phi_j = 0$. Jiná volba fáze by neovlivnila tvar singulárních čar, pouze by způsobila jejich posunutí v prostoru. Perioda mřížky v k -prostoru byla zvolena $\Delta k = 0,01$. Složky vlnových vektorů k_{jx}, k_{jy} jsou

$$\mathbf{k}_1 = (\Delta k, 0), \quad \mathbf{k}_2 = (-\Delta k, 0), \quad \mathbf{k}_3 = (\Delta k, -\Delta k). \quad (3.31)$$

Kvůli přehlednosti neuvedené složky k_{jz} bychom vypočetli pomocí vztahu (3.20). Barevné a tvarové rozlišení bodů singulárních čar vypovídá o změně fáze při oběhu kolem singulárního bodu po uzavřené křivce v matematicky kladném smyslu v rovině $z = z_0$, kde konstanta z_0 je z -ová souřadnice zvoleného bodu. Červená barva znamená nárůst fáze o 2π , modrá pokles o 2π .

Pro tento i všechny následující obdobné grafy budeme používat místo souřadnic x, y, z bezrozměrné souřadnice

$$X = \frac{x}{L_{xy}}, \quad Y = \frac{y}{L_{xy}}, \quad Z = \frac{z}{L_z}, \quad (3.32)$$

jejichž hodnota se v rámci jedné Talbotovy buňky nachází v intervalu $\langle 0, 1 \rangle$.

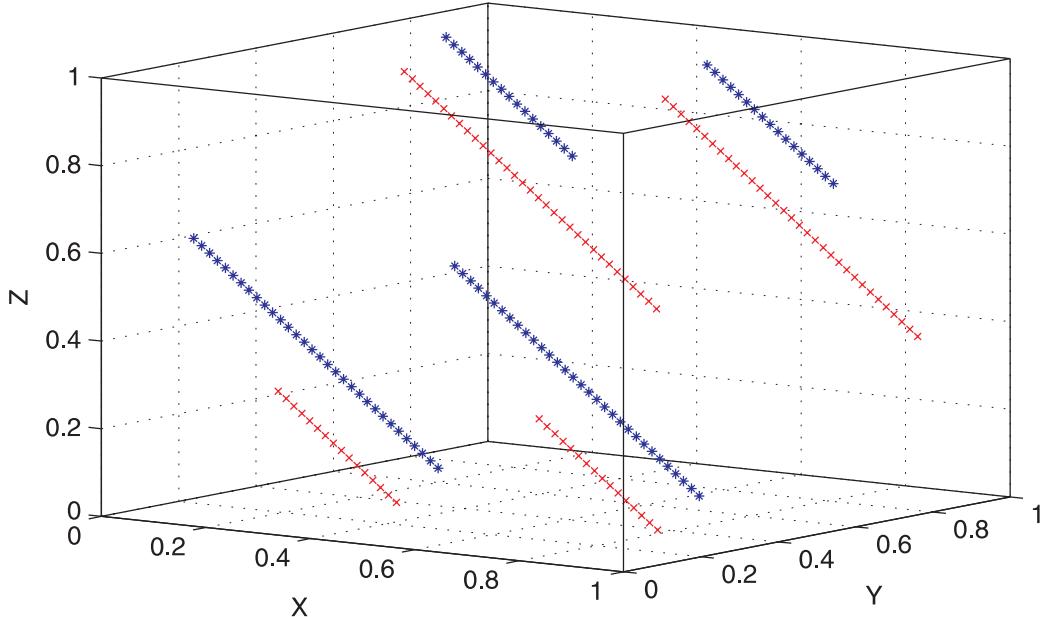
3.4.3 Čtyři rovinné vlny

Výsledná vlna je popsána funkcí

$$\psi(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^4 \psi_j(\mathbf{r}) = \varrho(\mathbf{r}) e^{i\chi(\mathbf{r})}. \quad (3.33)$$

K diskusi tvaru singulárních křivek opět využijeme fázorových diagramů.

Zvolme nejdříve speciální případ, kdy jsou amplitudy všech vln shodné. K destruktivní interferenci dojde jedině v bodech, kde vždy dva a dva fázory jsou opačnými vektory, tj. kde platí jedna ze tří dvojic rovnic



Obrázek 3.11: Singulární křivky při interferenci tří rovinných vln.

$$\psi_1 = -\psi_2, \quad \psi_3 = -\psi_4, \quad (3.34)$$

$$\psi_1 = -\psi_3, \quad \psi_2 = -\psi_4, \quad (3.35)$$

$$\psi_1 = -\psi_4, \quad \psi_2 = -\psi_3. \quad (3.36)$$

Řešením např. rovnice $\psi_1 = -\psi_2$ je soustava rovnoběžných rovin v prostoru (po přidání stínítka bychom pozorovali interferenční proužky podobně jako v Youngově dvouštěrbinném experimentu). Řešením $\psi_3 = -\psi_4$ je podobná soustava rovin. Průnikem rovin odpovídajících první a druhé rovnici v (3.34) dostaneme v prostoru soustavu rovnoběžných přímek, které jsou hledanými singulárními křivkami. Řešením dvojic rovnic (3.35) a (3.36) jsou také soustavy rovnoběžných přímek, pouze jinak orientované.

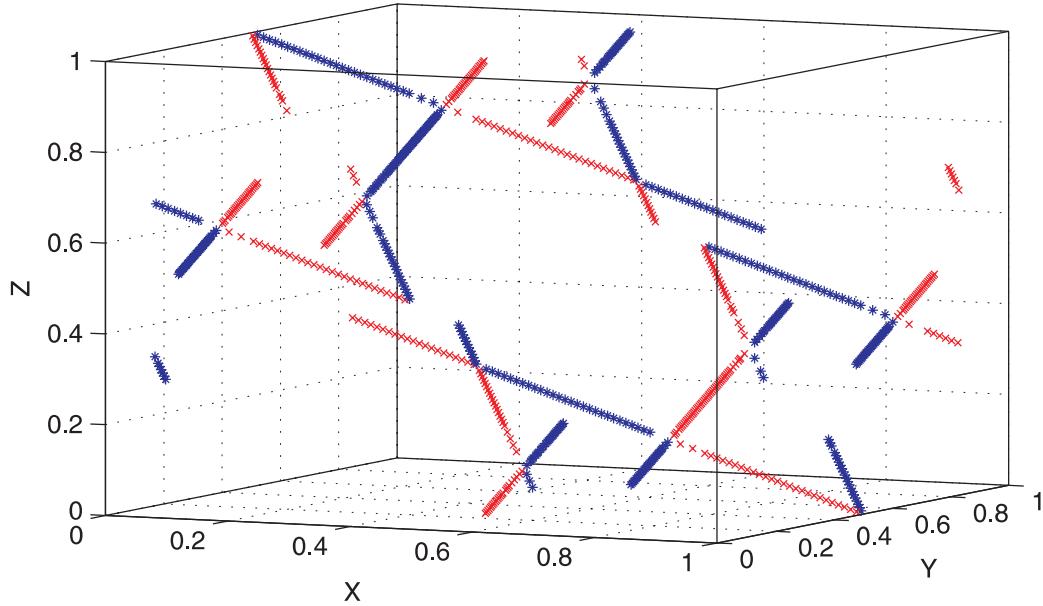
Na obrázku 3.12 jsou pomocí numerického výpočtu vykresleny body ležící na singulárních čarách pro konkrétní volbu vlnových vektorů

$$\mathbf{k}_1 = (0, 0), \quad \mathbf{k}_2 = (\Delta k, 0), \quad \mathbf{k}_3 = (\Delta k, \Delta k), \quad \mathbf{k}_4 = (-\Delta k, -\Delta k). \quad (3.37)$$

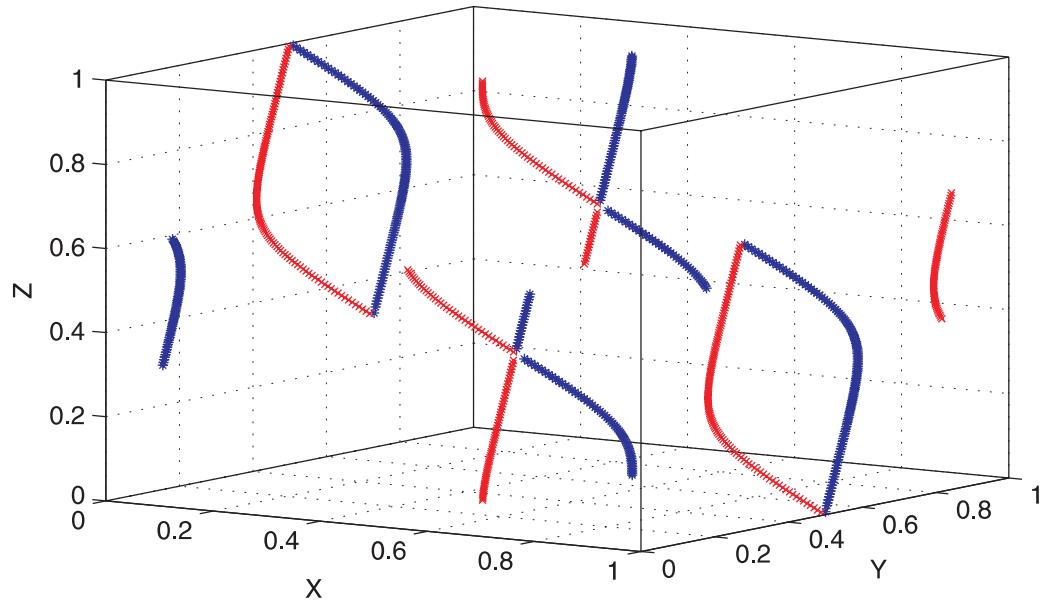
Amplitudy a počáteční fáze jsou zvoleny stejně jako v případě tří rovinných vln, stejně tak barevné rozlišení jednotlivých singulárních čar.

Při pohybu podél singulární čáry jednotlivé fázory rotují kolem počátku grafu, jejich vzájemná poloha však musí být vždy taková, aby platila jedna z dvojic podmínek zapsaných rovnicemi (3.34) až (3.36). V některých bodech dojde k tomu, že všechny fázory leží v jedné přímce. Těmto bodům odpovídají místa, kde se singulární čáry dotýkají, resp. kříží. Tomuto jevu se budeme podrobněji věnovat v části 3.5.

Přejděme nyní k dalšímu případu, kdy pro amplitudy platí $A_1 + A_4 = A_2 + A_3$ (připomeňme, že $A_j \geq A_{j+1}$). Singulární křivky již nejsou přímky, nicméně v bodech,



Obrázek 3.12: Singulární křivky při interferenci čtyř rovinných vln, jejichž amplitudy mají stejnou velikost.



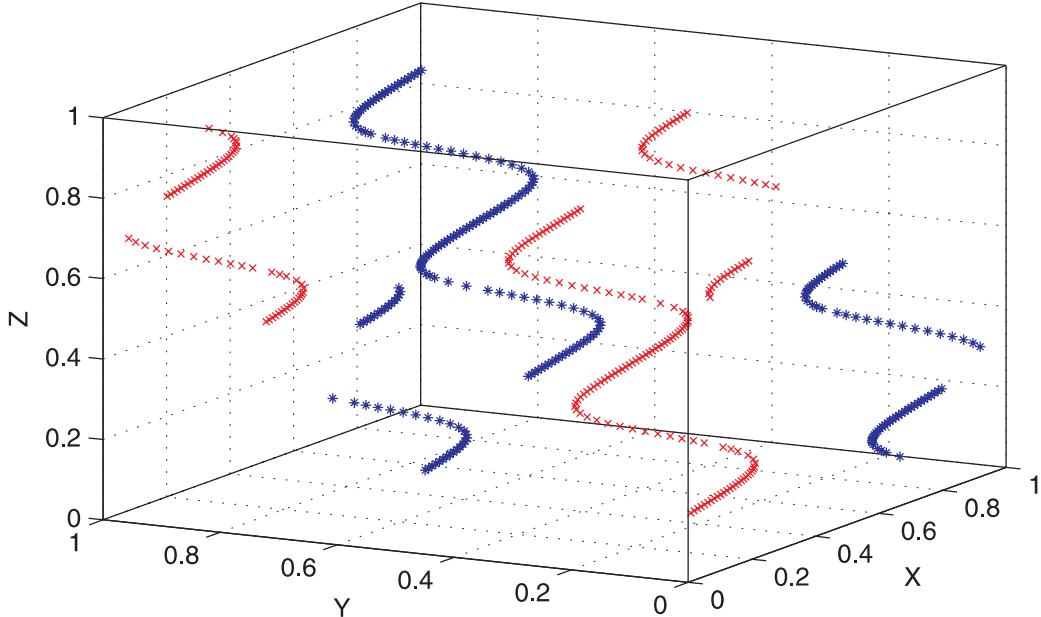
Obrázek 3.13: Singulární křivky při interferenci čtyř rovinných vln, pro jejichž amplitudy platí $A_1 + A_4 = A_2 + A_3$.

kde fázory leží na jedné přímce a zároveň jejich vektorový součet je nulový vektor, se singulární křivky kříží. Na obrázku 3.13 jsou pomocí numerického výpočtu zobrazeny body ležící na singulárních čarách opět pro vlnové vektory (3.37), avšak amplitudy

$$A_1 = 0,5, \quad A_2 = 1, \quad A_3 = 0,8, \quad A_4 = 0,7. \quad (3.38)$$

V případě, že $A_1 + A_4 < A_2 + A_3$, nebude již existovat žádný bod, kde by fázory ležely na jedné přímce a zároveň docházelo k destruktivní interferenci. Proto se singulární čáry nebudou v žádném bodě křížit. Body ležící na singulárních křivkách jsou pro vlnové vektory (3.37) pomocí numerického výpočtu zobrazeny na obrázku 3.14. Zvolené hodnoty amplitud jsou

$$A_1 = 1, \quad A_2 = 0,8, \quad A_3 = 0,5, \quad A_4 = 0,25. \quad (3.39)$$



Obrázek 3.14: Singulární křivky při interferenci čtyř rovinných vln, pro jejichž amplitudy platí $A_1 + A_4 < A_2 + A_3$.

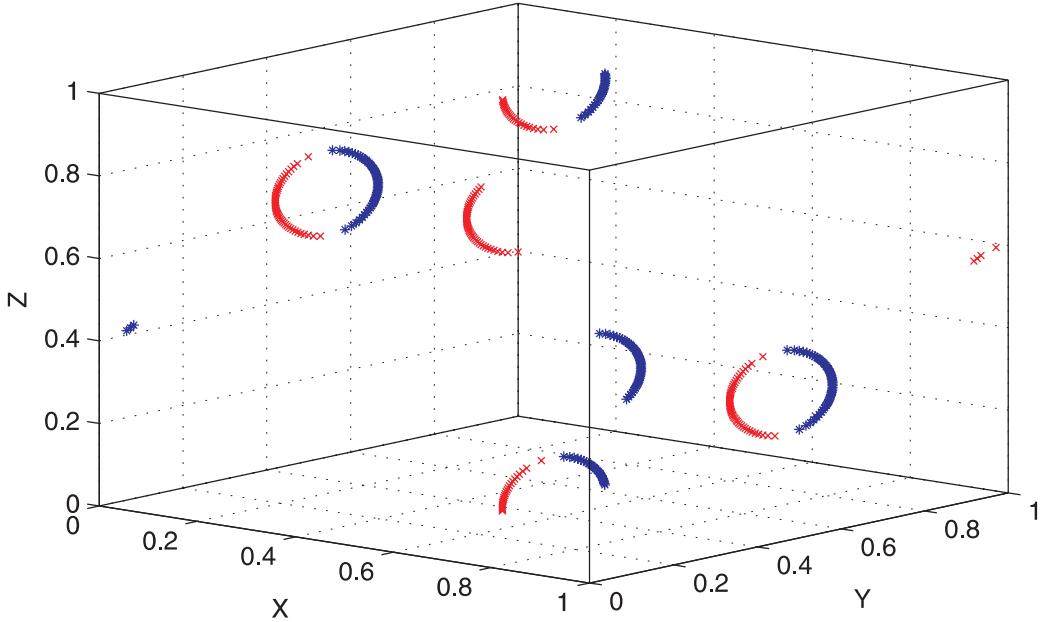
Jestliže pro amplitudy platí $A_1 + A_4 > A_2 + A_3$, singulární křivky tvoří uzavřené smyčky. Obrázek 3.15 je vykreslený opět pro vlnové vektory (3.37) a amplitudy

$$A_1 = 0,5, \quad A_2 = 1, \quad A_3 = 0,3, \quad A_4 = 0,4. \quad (3.40)$$

Vznik uzavřených smyček lze vysvětlit pomocí fázorového diagramu. Destruktivní interference nemůže nastat pro libovolnou hodnotu vzájemného fázového posuvu vln s největší a nejmenší amplitudou, nýbrž pouze pro hodnotu z určité části intervalu $\langle -\pi, \pi \rangle$. Absolutní hodnota maximálního vzájemného fázového posuvu plyne z trojúhelníkové nerovnosti, přičemž strany trojúhelníka jsou dány amplitudami A_1 , A_4 a $A_2 + A_3$. Úhel mezi stranami A_1 a A_4 můžeme spočítat z kosinové věty. Omezení vzájemného natočení fázorů s amplitudami A_1 a A_4 způsobuje, že singulární křivky nemohou být nekonečné a musí mít tvar uzavřených smyček.

3.4.4 Pět a více rovinných vln

Při počtu vln větším jak čtyři již nelze prostorovou strukturu singulárních čar jednoduše popsat. Změna fázového rozdílu mezi jednotlivými vlnami při pevně zvolených ampli-



Obrázek 3.15: Singulární křivky při interferenci čtyř rovinných vln, pro jejichž amplitudy platí $A_1 + A_4 > A_2 + A_3$.

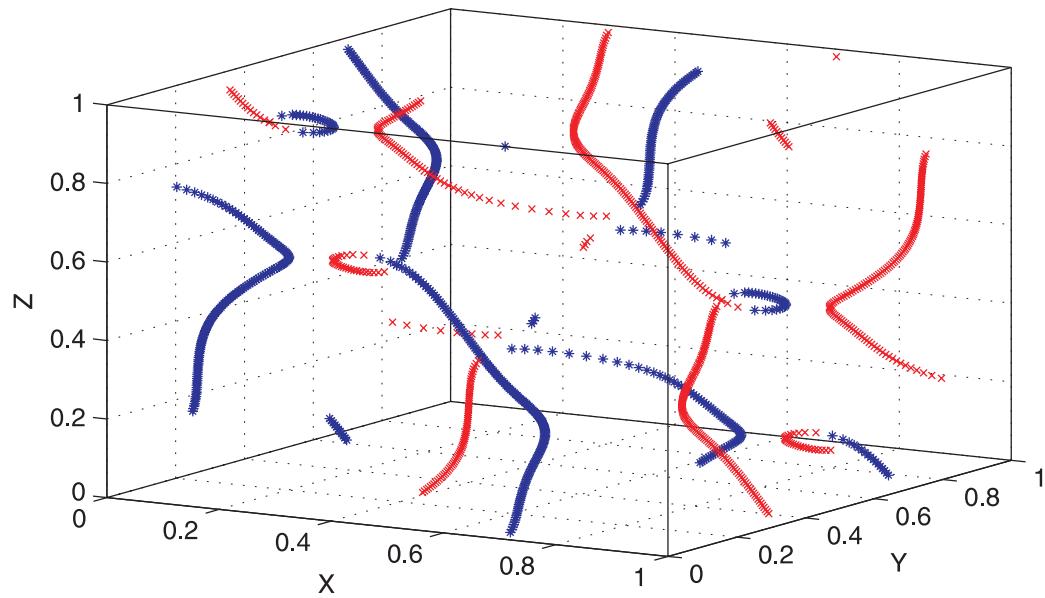
tudách nezpůsobí pouze posunutí v prostoru, ale i změnu tvaru singulárních čar. Proto je třeba jejich strukturu nalézt pomocí numerických výpočtů. Jako příklad uvedeme obrázky 3.16 a 3.17, na nichž jsou vykresleny body ležící na singulárních křivkách vzniklých při interferenci pěti vln. Použité vlnové vektory jsou

$$\mathbf{k}_1 = (0, 0), \quad \mathbf{k}_2 = (\Delta k, 0), \quad \mathbf{k}_3 = (\Delta k, \Delta k), \quad \mathbf{k}_4 = (-\Delta k, -\Delta k), \quad \mathbf{k}_5 = (-\Delta k, \Delta k), \quad (3.41)$$

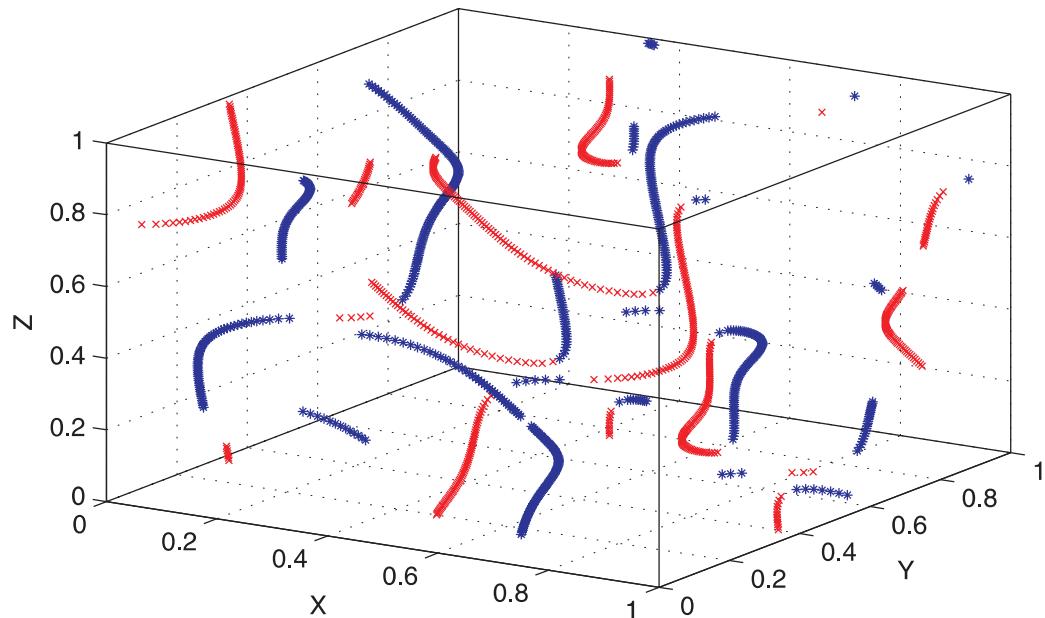
amplitudy byly v obou případech shodné, tj. $A_j = 1$. Při výpočtu obrázku 3.16 byly počáteční fáze shodné $\phi_j = 0$ pro všechny vlny. Při výpočtu obrázku 3.17 byla změnena pouze počáteční fáze páté vlny na $\phi_5 = \frac{\pi}{2}$. Tato změna způsobila rozdílnost tvaru singulárních čar na obou obrázcích. Nejvíce patrný je např. vznik singulární křivky ve tvaru uzavřené smyčky v pravé dolní části obrázku 3.17.

Poskládáním více Talbotových buněk správnými stěnami k sobě si můžeme utvořit představu o struktuře singulárních čar v prostoru. Z obrázků lze vysledovat, že existují dva základní druhy singulárních čar – uzavřené a (zdánlivě) nekonečné. Uzavřenosť singulární čáry přitom nemusí být patrná pouze z jedné Talbotovy buňky, jako je tomu například na obrázcích 3.15 nebo 3.17.

Vezměme Talbotovu buňku z obrázku 3.17 jako základní krychli, jejíž kopie budeme postupně skládat na sebe či vedle sebe. Na horní podstavu základní krychle umístíme druhou krychli, k jejíž zadní stěně přidáme ještě třetí krychli. Na obrázku 3.18 je vykreslena uzavřená singulární čára procházející témoto třemi Talbotovými buňkami. Pro přehlednost je rozsah os přizpůsoben velikosti uzavřené křivky a také nejsou vykresleny ostatní singulární čáry, které se v tomto objemu nachází. Barevně jsou rozlišeny body ležící v různých buňkách – oranžové body leží v základní (spodní) krychli, zelené ve druhé (přední horní) krychli, černé ve třetí (zadní horní) krychli. Barevné rozlišení změny fáze o $\pm 2\pi$ při oběhu

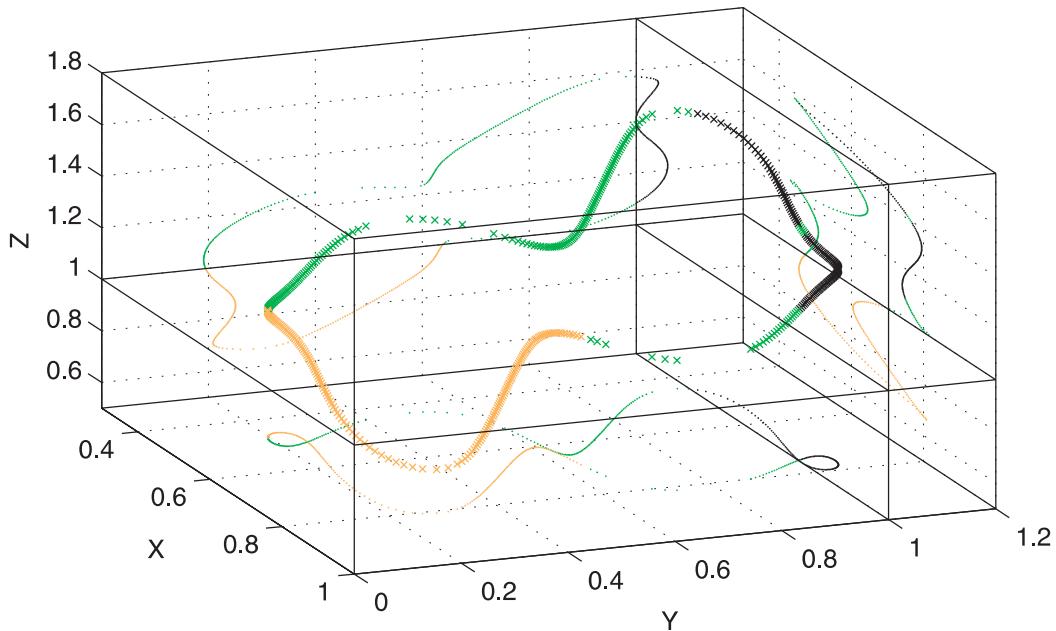


Obrázek 3.16: Singulární křivky při interferenci pěti rovinných vln se stejnými amplitudami a stejnými počátečními fázemi.



Obrázek 3.17: Singulární křivky při interferenci pěti rovinných vln se stejnými amplitudami, avšak jednou vlnou fázově posunutou o $\frac{\pi}{2}$.

kolem singulární křivky je tentokrát vynecháno. Na spodní, zadní a pravé stěně grafu je však navíc vykreslen průmět prostorové singulární křivky do konkrétní roviny, díky čemuž si lze udělat přesnější představu o skutečném tvaru křivky.



Obrázek 3.18: Uzavřená singulární křivka procházející třemi sousedními Talbotovými buňkami.

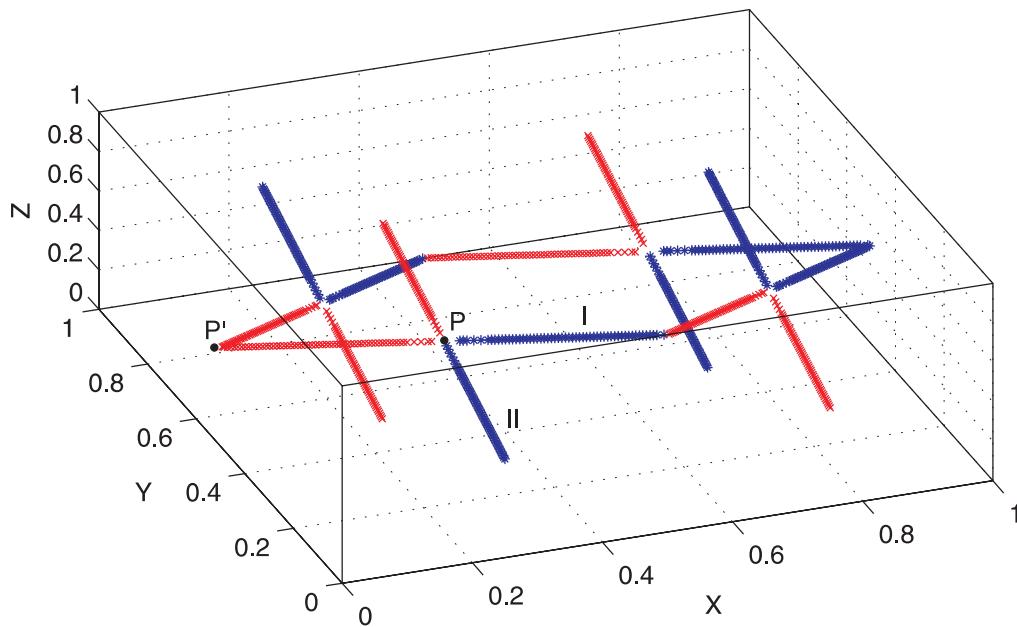
3.5 Křížení singulárních křivek

Vraťme se nyní k případu interference čtyř rovinných vln se stejnými (pro jednoduchost jednotkovými) amplitudami a diskutujme podrobněji, jak dochází ke křížení, resp. dobytu singulárních čar. Zvolme konkrétní tvar vlnových vektorů příslušných jednotlivým rovinným vlnám

$$\mathbf{k}_1 = (0, 0, k), \quad \mathbf{k}_2 = (\Delta k, 0, a), \quad \mathbf{k}_3 = (-\Delta k, 0, a), \quad \mathbf{k}_4 = (0, \Delta k, a), \quad (3.42)$$

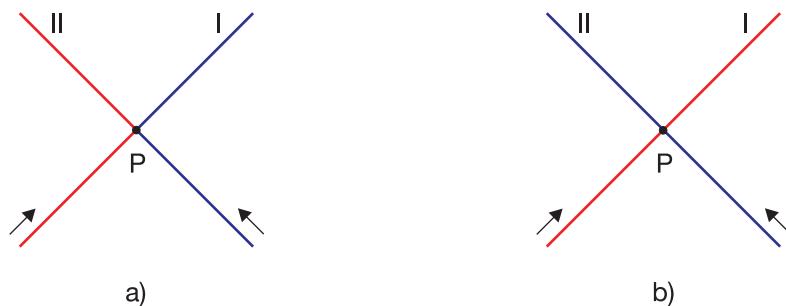
kde jsme označili $a = \sqrt{k^2 - \Delta k^2}$. Všechny vlnové vektory tedy mají shodnou velikost k . Body ležící na singulárních čarách jsou pomocí numerického výpočtu vykresleny na obrázku 3.19. Ve shodě s předchozím textem jsou barevně odlišeny podle nárustu (červená), resp. poklesu (modrá) fáze o 2π při oběhu kolem singulárního bodu po uzavřené křivce v matematicky kladném smyslu v rovině $z = z_0$, kde konstanta z_0 je z -ová souřadnice zvoleného bodu.

Singulárními křivkami jsou tři soustavy rovnoběžných přímek, jež jsou řešením jedné z dvojic podmínek uvedených v rovnicích (3.34) až (3.36). Vydáme-li se myšleně podél libovolné ze singulárních přímek, zjistíme, že barva bodů na ní ležících (tj. znaménko síly singularity) se vždy po určitém intervalu změní z modré na červenou či naopak. K této změně dojde vždy v takovém bodě zvolené přímky, v němž se tato přímka kříží s další, která však je řešením jiné z rovnic (3.34) až (3.36) než zvolená přímka. Vyberme tedy libovolný z bodů, v nichž se dvě singulární přímky kříží. Průběh singulárních křivek v jeho okolí je schématicky zakreslen na obrázku 3.20a. Přímky označíme I a II, bod jejich průniku P. Při myšleném pohybu podél přímky I ve směru šipky znázorněném na obrázku



Obrázek 3.19: Tvar singulárních přímek v jedné Talbotově buňce při skládání čtyř roviných vln se stejnými amplitudami a vlnovými vektory (3.42). Singulární přímka I vychází z levé boční stěny a protíná přední horní hranu krychle. Přímka II protíná spodní a horní podstavu krychle.

3.20a se barva bodů změní v bodě P z modré na červenou, pro přímku II se změní z červené na modrou. Naskýtá se otázka, zda by nemohl existovat případ znázorněný na obrázku 3.20b, kdy při pohybu podél každé z přímek se barva bodů nezmění. Pokusme se nyní na tuto otázku odpovědět.



Obrázek 3.20: Průběh singulárních křivek v okolí bodu P a) pozorovaný na obrázku 3.19, b) diskutovaný teoreticky.

3.5.1 Analytický přístup

Vypočteme nejdříve souřadnice jednoho konkrétního bodu P, v němž se dvě singulární přímky kříží. Přímka I bude řešením rovnice (3.34), přímka II rovnice (3.36).

Přímka I:

$$\begin{aligned} \psi_1 &= -\psi_2 & \psi_3 &= -\psi_4 \\ kz &= \Delta kx + az + \pi & -\Delta kx + az &= \Delta ky + az - \pi \\ 0 &= \Delta kx - (k-a)z + \pi & (3.43) & 0 = \Delta kx + \Delta ky - \pi & (3.44) \end{aligned}$$

Přímka II:

$$\begin{aligned} \psi_1 &= -\psi_4 & \psi_2 &= -\psi_3 \\ kz &= \Delta ky + az + \pi & \Delta kx + az &= -\Delta kx + az + \pi \\ 0 &= \Delta ky - (k-a)z + \pi & (3.45) & 0 = 2\Delta kx - \pi & (3.46) \end{aligned}$$

Řešením soustavy rovnic (3.43) až (3.46) je bod

$$P \left[\frac{\pi}{2\Delta k}, \frac{\pi}{2\Delta k}, \frac{3\pi}{2(k-a)} \right]. \quad (3.47)$$

Jedním ze dvou nejbližších dalších bodů, které leží na přímce I, avšak tentokrát vyhovují dvojici podmínek (3.34) a (3.35) je bod P' , jehož souřadnice jsou

$$P' \left[0, \frac{\pi}{\Delta k}, \frac{\pi}{(k-a)} \right]. \quad (3.48)$$

Vypočteme-li vektor

$$\mathbf{t}_I = P \vec{P} = \left(\frac{\pi}{2\Delta k}, -\frac{\pi}{2\Delta k}, \frac{\pi}{2(k-a)} \right). \quad (3.49)$$

dostaneme se k parametrickému vyjádření rovnice přímky I

$$x = \frac{\pi}{2\Delta k} + \frac{\pi}{2\Delta k}v, \quad y = \frac{\pi}{2\Delta k} - \frac{\pi}{2\Delta k}v, \quad z = \frac{3\pi}{2(k-a)} + \frac{\pi}{2(k-a)}v, \quad (3.50)$$

kde v je parametr. Pro $v = 0$ dostaneme souřadnice bodu P , pro $v = -1$ souřadnice bodu P' . Z vlastností skalárního součinu vektorů můžeme určit průměty vlnových vektorů \mathbf{k}_i do směru daného přímekou I, jenž je určen vektorem \mathbf{t}_I . Pro skalární součin vektorů \mathbf{k}_i a \mathbf{t}_I , které svírají úhel α_i , platí

$$\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{t}_I = |\mathbf{k}_i| |\mathbf{t}_I| \cos \alpha_i \quad (3.51)$$

z čehož pro průmět $|\mathbf{k}_i| \cos \alpha_i$ dostáváme

$$|\mathbf{k}_i| \cos \alpha_i = \frac{\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{t}_I}{|\mathbf{t}_I|}. \quad (3.52)$$

Po dosazení za vlnové vektory (3.42) dojdeme k výsledku

$$|\mathbf{k}_1| \cos \alpha_1 = |\mathbf{k}_2| \cos \alpha_2 = \frac{\frac{k\pi}{2(k-a)}}{|\mathbf{t}_I|}, \quad (3.53)$$

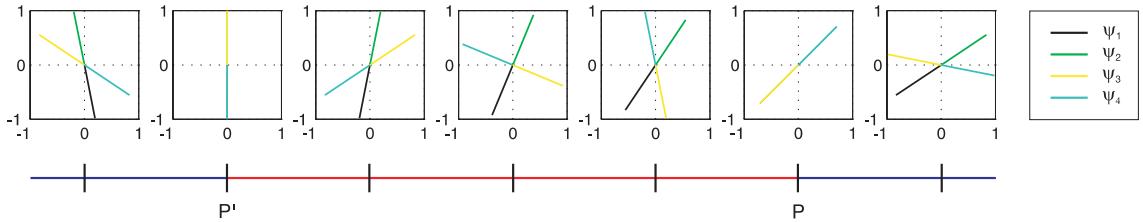
$$|\mathbf{k}_3| \cos \alpha_3 = |\mathbf{k}_4| \cos \alpha_4 = \frac{-\frac{\pi}{2} + \frac{\pi a}{2(k-a)}}{|\mathbf{t}_I|}. \quad (3.54)$$

Protože všechny vlnové vektory mají stejnou velikost k , musí platit $\alpha_1 = \alpha_2$ a $\alpha_3 = \alpha_4$. To však okamžitě plyne také z rovnice (3.34) – aby se fáze vln ψ_1 a ψ_2 měnila podél singulární přímky stejně rychle, musí být průměty vlnových vektorů do směru přímky stejně velké, tedy i úhly sevřené vlnovými vektory a přímkou musí být stejné.

Důležité však je, že velikosti průmětů dvojic vlnových vektorů $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2$ a $\mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4$ do směru singulární přímky nejsou stejné. Lze jednoduše ukázat, že pro čitatele zlomků z rovnic (3.53) a (3.54) platí

$$\left| \frac{k\pi}{2(k-a)} \right| > \left| -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi a}{2(k-a)} \right|. \quad (3.55)$$

Průmět vlnových vektorů $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2$ do směru singulární přímky je tedy větší než průmět vektorů $\mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4$. To znamená, že fáze vln ψ_1, ψ_2 se ve směru singulární přímky I bude měnit rychleji než fáze vln ψ_3, ψ_4 . Ve fázorovém diagramu se tedy při pohybu podél singulární přímky budou fázory vln ψ_1, ψ_2 otáčet rychleji než fázory ψ_3, ψ_4 . Zároveň v bodě P platí, že fáze vln ψ_1, ψ_3 jsou stejné, totéž platí pro dvojici vln ψ_2, ψ_4 . V bodě P' jsou naopak stejné fáze vln ψ_1, ψ_4 a ψ_2, ψ_3 . Situace ve fázorovém diagramu v různých bodech singulární přímky I je znázorněna na obrázku 3.21.



Obrázek 3.21: Fázorové diagramy pro různé body na singulární přímce I.

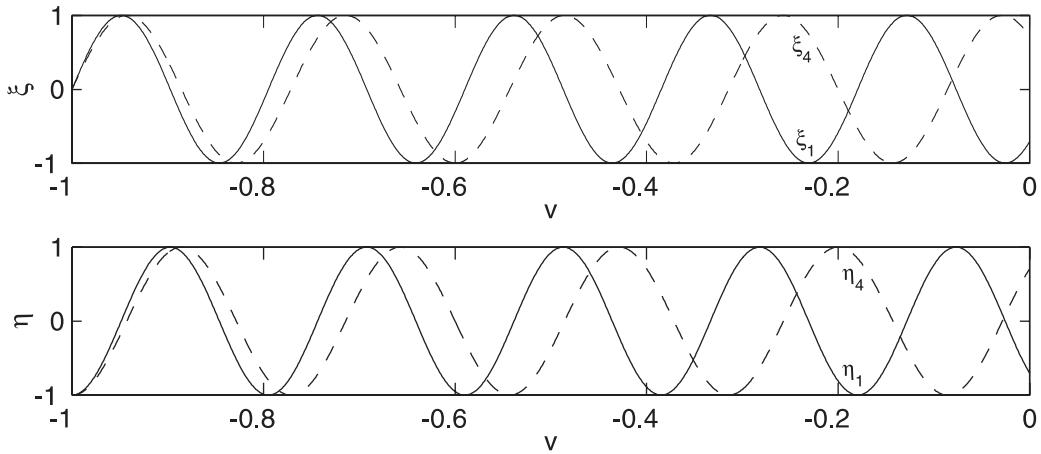
Vyberme si např. vlny ψ_1 a ψ_4 . V bodě P' jsou jejich fázory orientovány stejným směrem. Při pohybu podél singulární přímky směrem k bodu P fázor vlny ψ_1 předbíhá fázor vlny ψ_4 a to tak rychle, aby v bodě P ležely fázory v jedné přímce, avšak jejich orientace byla opačná. Za bodem P fázor ψ_1 nadále předbíhá (spíš by se dalo říct, že jej naopak dohání) fázor ψ_4 tak, aby po uražení vzdálenosti rovné vzdálenosti bodů P' a P byly oba fázory opět orientovány stejným směrem.

Protože známe parametrické rovnice singulární přímky, můžeme vyjádření vln ψ_1, ψ_4 přepsat do tvaru

$$\psi_1 = \exp \left[ik \left(\frac{3\pi}{2(k-a)} + \frac{\pi}{2(k-a)} v \right) \right], \quad (3.56)$$

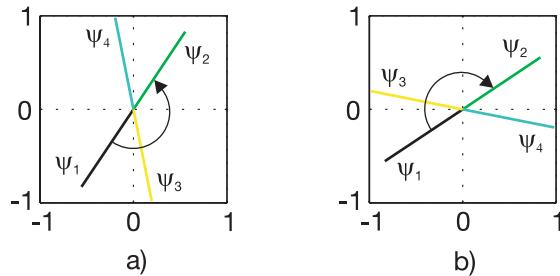
$$\psi_4 = \exp \left[i\Delta k \left(\frac{\pi}{2\Delta k} - \frac{\pi}{2\Delta k} v \right) + ia \left(\frac{3\pi}{2(k-a)} + \frac{\pi}{2(k-a)} v \right) \right] \quad (3.57)$$

Průběh reálné a imaginární části ξ, η vln ψ_1, ψ_4 v závislosti na parametru v je schématicky zakreslen na obrázku 3.22. Pro $v = -1$ mají reálné i imaginární části obou vln stejnou hodnotu včetně znaménka, což odpovídá stejné fázi vln v bodě P' . Pro $v = 0$ mají reálné i imaginární části vln stejnou absolutní hodnotu, avšak opačné znaménko, což odpovídá fázii vln vzájemně posunuté o půl periody v bodě P.



Obrázek 3.22: Schématické zakreslení průběhu reálné a imaginární části ξ, η vln ψ_1, ψ_3 v závislosti na parametru v .

Souvislost se znaménkem síly singularity je poměrně přímočará. Na obrázku 3.23a je zakreslen fázorový diagram pro jeden bod ležící na singulární přímce mezi body P a P' , na obrázku 3.23b pro druhý bod ležící až za bodem P . Jestliže budeme v případě a) otáčet fázorem ψ_1 po směru hodinových ručiček, splynne nejdříve s fázorem ψ_3 a poté s fázorem ψ_2 . Aby v případě b) bylo pořadí splynutí fázoru ψ_1 s fázory ψ_3 a ψ_2 stejné, museli bychom jím otáčet proti směru hodinových ručiček. Tento rozdíl v uspořádání fázorů způsobuje, že znaménko singularity je v jednom ze zvolených bodů kladné a ve druhém záporné, což lze ukázat následovně.



Obrázek 3.23: Fázorový diagram pro bod ležící na singulární přímce I a) mezi body P a P' , b) za bodem P .

Zvolme na singulární přímce bod $P_0[x_0, y_0, z_0]$. V rovině $z = z_0$ sestrojíme malou kružnici o poloměru r se středem v bodě P_0 , azimutální úhel označíme φ . Body kružnice označíme $Q[x_1, y_1, z_0]$, pro jejich souřadnice pak máme vztahy

$$x_1 - x_0 = r \cos \varphi, \quad y_1 - y_0 = r \sin \varphi. \quad (3.58)$$

Pokusme se nyní určit, jak závisí fáze χ výsledné vlny na azimutálním úhlu φ . Jde nám především o to, zda fáze χ při oběhu kolem celé kružnice naroste či klesne o 2π . Výslednou vlnu v bodě P_0 označíme $\psi(x_0, y_0, z_0)$, přitom z definice singulární křivky musí

být $\psi(x_0, y_0, z_0) = 0$. Výslednou vlnu v bodě Q ležícím na sestrojené kružnici označíme $\psi(x_1, y_1, z_0)$. Vlnu v bodě Q můžeme napsat pomocí Taylorova rozvoje

$$\begin{aligned}\psi(x_1, y_1, z_0) &= \psi(x_0, y_0, z_0) + \frac{\partial\psi}{\partial x}\Big|_{P_0}(x_1 - x_0) + \frac{\partial\psi}{\partial y}\Big|_{P_0}(y_1 - y_0) + \frac{\partial\psi}{\partial z}\Big|_{P_0}(z_0 - z_0) = \\ &= \frac{\partial\psi}{\partial x}\Big|_{P_0}(x_1 - x_0) + \frac{\partial\psi}{\partial y}\Big|_{P_0}(y_1 - y_0)\end{aligned}\quad (3.59)$$

Po provedení výpočtu dojdeme ke vztahu

$$\begin{aligned}\psi(x_1, y_1, z_0) &= [2\Delta k \cos(az_0) \sin(-\Delta kx_0) - 2i\Delta k \sin(az_0) \sin(\Delta kx_0)](x_1 - x_0) + \\ &\quad + [-\Delta k \sin(\Delta ky_0 + az_0) + i\Delta k \cos(\Delta ky_0 + az_0)](y_1 - y_0).\end{aligned}\quad (3.60)$$

Pro fázi χ v bodě Q pak s využitím vztahu (3.58) dostaneme vztah

$$\chi = \arctan \frac{-2 \sin(az_0) \sin(\Delta kx_0) + \cos(\Delta ky_0 + az_0) \tan\varphi}{-2 \cos(az_0) \sin(\Delta kx_0) - \sin(\Delta ky_0 + az_0) \tan\varphi}. \quad (3.61)$$

Spočteme-li derivaci $\frac{\partial\chi}{\partial\varphi}$, dojdeme k podmínce pro její znaménko

$$\operatorname{sgn} \left[\frac{\partial\chi}{\partial\varphi} \right] = \operatorname{sgn} [-\sin(\pi v)]. \quad (3.62)$$

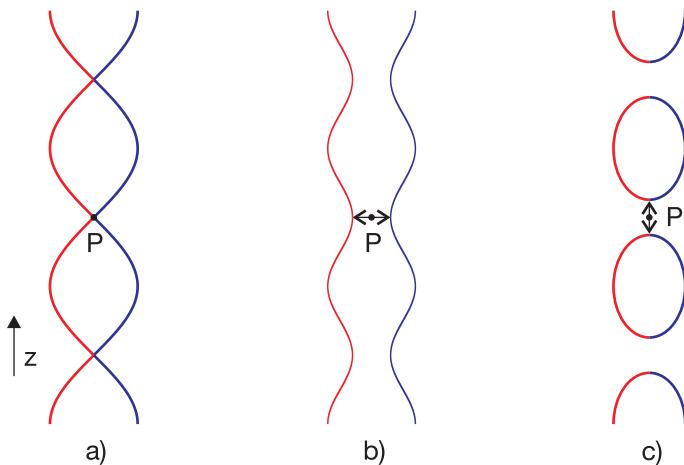
Jestliže hodnota parametru $v \in (-1, 0)$, je znaménko derivace kladné. Tedy při oběhu podél kružnice v matematicky kladném směru fáze naroste o 2π . To je ve shodě s červenou barvou bodů ležících na singulární křivce mezi body P a P' (viz obrázek 3.19).

Na základě uvedeného rozboru můžeme odpovědět na původní otázku, zda při skládání čtyř rovinných vln s jednotkovými amplitudami může nastat situace zakreslená na obrázku 3.20b, kdy by se při průchodu bodem křížení podél jedné singulární přímky nezměnilo znaménko síly singularity. Z podmínky (3.62) vyplývá, že taková situace nastat nemůže.

3.5.2 Jiný přístup – úvahy o symetrii

Celý problém lze diskutovat ještě z jiné strany. Vraťme se k obrázku 3.19, na kterém jsou vykresleny singulární křivky vzniklé při složení čtyř rovinných, jejichž amplitudy splňují podmínu $A_1 + A_4 = A_2 + A_3$ (připomeňme, že platí $A_j \geq A_{j+1}$). V jistých bodech dochází ke křížení vždy dvou singulárních křivek, jeden z nich označíme P. Průběh singulárních křivek v jeho okolí je včetně dříve zavedeného barevného rozlišení schématicky znázorněn na obrázku 3.24. Pro jednoznačnost popisu je také zakreslen směr osy z .

Jestliže nyní zmenšíme amplitudu A_1 a všechny ostatní ponecháme beze změny, bude platit nerovnost $A_1 + A_4 < A_2 + A_3$. Tomu odpovídají singulární čáry ve tvaru nekonečných a nikde se neprotínajících křivek. Situace v okolí bodu P z obrázku 3.24a přejde v schéma zakreslené na obrázku 3.24b. Plocha konstantní fáze v okolí každé z nekonečných singulárních křivek je buď pravotočivá, nebo levotočivá šroubovice. V každém případě však musí být orientace šroubovice (tedy i znaménko síly singularity) stále stejná po celé délce singulární křivky a nikdy nemůže „samovolně“ dojít k její změně na opačnou.

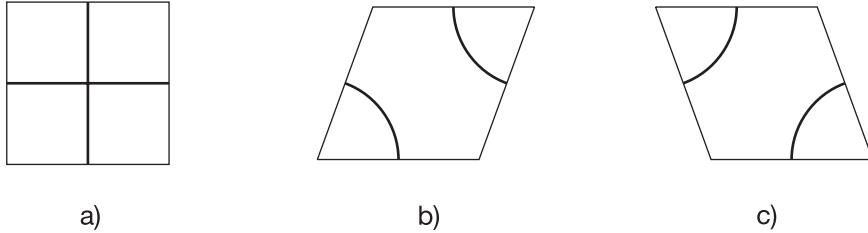
Obrázek 3.24: Průběh singulárních křivek v okolí bodu P pro různé amplitudy A_1 .

Pokud naopak amplitudu A_1 zvětšíme, bude platit $A_1 + A_4 > A_2 + A_3$ a singulární křivky budou mít tvar uzavřených smyček. Situace v okolí bodu P z obrázku 3.24a přejde v schéma zakreslené na obrázku 3.24c. Při pohybu podél uzavřené singulární křivky v jednom směru bude mít v její blízkosti plocha konstantní fáze opět tvar pravotočivé či levotočivé šroubovice. Po oběhnutí celé smyčky se plocha konstantní fáze napojí na samu sebe tak, aby šroubovice byla uzavřená. Znaménko síly singularity však určujeme z nárůstu či poklesu fáze při oběhu kolem singulární čáry v matematicky kladném směru po myšlené uzavřené křivce ležící v rovině $z = \text{konst}$. Proto bude mít síla singularity v pravé a levé části singulární smyčky opačná znaménka. Ke změně znaménka dochází ve dvou bodech, v nichž je vektor tečný k singulární křivce kolmý na směr osy z .

Při plynulé změně amplitudy A_1 musí dojít k plynulému přechodu mezi uspořádáním singulárních křivek z obrázku 3.24b v uspořádání z obrázku 3.24c, resp. naopak. Jediným možným přechodným stavem, který tuto plynulosť zaručuje, je situace z obrázku 3.24a. Uspořádání singulárních křivek z obrázku 3.20b se tedy nemůže při skládání čtyř roviných vln realizovat.

Podotkněme ještě, že ke křížení singulárních křivek dochází proto, že vzájemný vztah součtu amplitud $A_1 + A_4$ a $A_2 + A_3$ je více symetrický (součty jsou si rovny), než když se křivky nekříží (jeden ze součtů je větší než druhý). Podobná situace nastává pro tzv. Chladniho obrazce, do kterých se při rozvezvučení kovové desky uspořádají zrnka písku rozsypaná po jejím povrchu. Jeden z nejjednodušších Chladniho obrazců vzniklých na čtvercové desce je schématicky zakreslen na obrázku 3.25a, zrnka písku jsou nahromaděna podél křivek vytažených tlustou čarou. Pokud bychom měli možnost plynule měnit rozměry desky, při deformaci v jednom směru do tvaru kosočtverce by Chladniho obrazec vypadal podle obrázku 3.25b (viz [9]). Při deformaci desky do tvaru kosočtverce v opačném směru by obrazec měl tvar podle obrázku 3.25c. Ke křížení křivek, podél nichž se nahromadí zrnka písku, tedy také dochází při symetričtějším uspořádání parametrů systému – čtvercová deska má větší symetrii než kosočtvercové desky.

Uvedené chování singulárních křivek i Chladniho obrazců úzce souvisí s tzv. snímáním degenerace při snížení symetrie hamiltoniánu v kvantové mechanice.



Obrázek 3.25: Jeden z nejjednodušších Chladniho obrazců pro a) čtvercovou desku, b) desku deformovanou v kosočtverec v jednom směru, c) desku deformovanou v kosočtverec v opačném směru.

3.6 Chování funkce ψ v okolí singulární čáry

Nyní se budeme věnovat popisu chování skalární komplexní funkce ψ v blízkosti singulární křivky, přitom budeme převážně vycházet z [16]. Nejprve se omezíme na dvourozměrný prostor, tedy na rovinu, v níž se nachází bod P s fázovou singularitou. V této rovině definujme kartézskou soustavu souřadnic (x, y) a také polární soustavu souřadnic (r, φ) , obě s počátkem v bodě P. Pro pozdější účely doplníme ještě společnou osu z , která s osami x, y vytváří pravotočivou kartézskou soustavu souřadnic a má rovněž počátek v bodě P.

Je-li funkce ψ zapsána ve standardním tvaru

$$\psi = \xi + i\eta = \rho e^{i\chi}, \quad (3.63)$$

můžeme v každém bodě roviny definovat vektor *hustoty toku* (zkráceně vektor toku)

$$\mathbf{j} = \text{Im}(\psi^* \nabla \psi) = \xi \nabla \eta - \eta \nabla \xi = \rho^2 \nabla \chi. \quad (3.64)$$

Z poslední rovnosti plyne, že vektorové pole \mathbf{j} je invariantní vzhledem ke globální změně fáze a směr vektoru hustoty toku je shodný se směrem gradientu fáze. Popisuje-li funkce ψ amplitudu lineárně polarizované elektromagnetické vlny, směr vektoru \mathbf{j} odpovídá směru Poyntingova vektoru. Podobně v kvantové mechanice, kde ψ představuje vlnovou funkci, má \mathbf{j} význam hustoty toku pravděpodobnosti.

Na rozdíl od vektorového pole gradientu fáze, které jsme pro šroubovou a hranovou singularitu diskutovali v částech 3.3.1 a 3.3.2, je vektorové pole \mathbf{j} vírové. Kvůli této vlastnosti vektoru toku se někdy místo pojmu fázová singularita používá termín *optický vír*.

V analogii s mechanikou kontinua můžeme v každém bodě roviny definovat vektor *víru* hustoty toku (zkráceně vektor víru)

$$\boldsymbol{\Omega} = \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{j} = \nabla \xi \times \nabla \eta. \quad (3.65)$$

Nachází-li se v bodě P roviny xy fázová singularita síly $s = \pm 1$, má v tomto bodě vektor $\boldsymbol{\Omega}$ jednotkovou velikost. Jeho orientace je závislá na znaménku síly singularity. Pro $s = 1$ je orientován ve směru vektorového součinu $\mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_y$ bázových vektorů kartézské soustavy souřadnic (tj. ve směru osy z), pro $s = -1$ míří ve směru opačném. Je-li absolutní hodnota síly singularity větší než jedna, může pro některé funkce ψ dojít k tomu, že vektor $\boldsymbol{\Omega}$ je

v bodě P nulový, zatímco v okolních bodech nulový není. Vektor víru lze tedy většinou použít pouze pro určení znaménka síly singularity, jejíž absolutní hodnota je rovna jedné. Jako příklad diskutujme hranovou a šroubovou singularitu, jejichž základní vlastnosti jsme popsali v částech 3.3.1 a 3.3.2.

Vypočtěme nejdříve vektorová pole \mathbf{j} a $\boldsymbol{\Omega}$ pro hranovou singularity. Protože funkce ψ zadaná vztahem (3.10) je pouze funkcí proměnných x, y , můžeme rovnou použít definičních vztahů (3.64) a (3.65), dostaneme

$$\mathbf{j} = (-y, x + k(x^2 + y^2), 0), \quad \boldsymbol{\Omega} = (0, 0, 1 + kx). \quad (3.66)$$

V bodě $P[0, 0, z]$ je z -ová složka vektoru víru $\boldsymbol{\Omega}$ rovna jedné, což odpovídá sile hranové singularity $s = 1$.

U šroubové singularity (3.13) budeme počítat průmět vektoru toku \mathbf{j} do roviny $z = 0$. Přitom s výhodou využijeme zápisu složek vektorů \mathbf{j} a $\boldsymbol{\Omega}$ ve válcových souřadnicích (r, φ, z) , tedy

$$\mathbf{j} = (0, r, 0), \quad \boldsymbol{\Omega} = (0, 0, 1). \quad (3.67)$$

V bodě $P[0, 0, 0]$ má vektor víru z -ovou složku rovnu jedné, tedy sila singularity je $s = 1$. Pro obecnou šroubovou singularity (3.18) síly $s = \pm l$, kde l je přirozené číslo, však dostaneme

$$\mathbf{j} = (0, \pm lr^{2l-1}, 0), \quad \boldsymbol{\Omega} = (0, 0, \pm l^2 r^{2(l-1)}). \quad (3.68)$$

z čehož je vidět, že pro $|s| > 1$ je z -ová složka vektoru víru v bodě P nulová. Následující rozbor tedy bude platit pouze pro fázové singularity síly $s = \pm 1$ (resp. singularity, pro něž je vektor víru v bodě P nenulový).

Vlastnosti vektorů toku \mathbf{j} a víru $\boldsymbol{\Omega}$ nyní využijeme při popisu vzájemného vztahu kvadrátu amplitudy ϱ^2 a velikosti gradientu fáze $|\nabla\chi|$ v okolí bodu se singularity fáze. Přitom budeme postupovat podle [16]. V blízkém okolí bodu P zvolíme bod P' , jehož polohový vektor označíme \mathbf{r} . Pro hustotu toku \mathbf{j} v bodě P' můžeme napsat přibližný vztah

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \xi \nabla \eta - \eta \nabla \xi \approx (\nabla \xi \cdot \mathbf{r}) \nabla \eta - (\nabla \eta \cdot \mathbf{r}) \nabla \xi, \quad (3.69)$$

přičemž všechny derivace jsou vyčísleny v bodě P . Úpravou pomocí vektorových identit a definice vektoru víru dostaneme

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) \approx (\nabla \xi \times \nabla \eta) \times \mathbf{r} = \boldsymbol{\Omega}_P \times \mathbf{r}, \quad (3.70)$$

kde $\boldsymbol{\Omega}_P$ jsme označili vektor víru hustoty toku v bodě P . Srovnáním posledních rovností v (3.64) a (3.70) získáme pro bod P' vztah mezi vektorem hustoty toku, gradientem fáze a kvadrátem amplitudy ve tvaru

$$\varrho^2 \nabla \chi = \mathbf{j}(\mathbf{r}) \approx \boldsymbol{\Omega}_P \times \mathbf{r}. \quad (3.71)$$

Vzhledem k orientaci vektorů $\boldsymbol{\Omega}_P$ a \mathbf{r} bude mít gradient fáze v bodě P' pouze složku ve směru bázového vektoru \mathbf{e}_φ . Vyhádřením operátoru nabla v polárních souřadnicích dostaneme pro velikost gradientu fáze vztah

$$|\nabla \chi| = \frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial \varphi}, \quad (3.72)$$

Pro velikost vektoru toku \mathbf{j} tedy platí

$$j = r\Omega_P = \varrho^2 |\nabla\chi| = \frac{\varrho^2}{r} \frac{\partial\chi}{\partial\varphi}, \quad (3.73)$$

přitom jsme do velikosti vektoru víru $\Omega_P = \pm 1$ zahrnuli i znaménko plynoucí z vektorového součinu $\boldsymbol{\Omega}_P \times \mathbf{r}$. Z rovnice (3.73) nakonec dostáváme vztah mezi kvadrátem amplitudy a velikostí gradientu fáze

$$\varrho^2 = \frac{r\Omega_P}{|\nabla\chi|} = \frac{r^2\Omega_P}{\frac{\partial\chi}{\partial\varphi}}. \quad (3.74)$$

Odtud je vidět, že v blízkém okolí singulárního bodu je kvadrát amplitudy nepřímo úměrný velikosti gradientu fáze. Popisuje-li funkce ψ amplitudu lineárně polarizované elektromagnetické vlny, pak ϱ^2 je intenzita, kterou naměří detektor. Tedy v blízkosti fázové singularity je intenzita nepřímo úměrná velikosti gradientu fáze.

Rozepíšeme-li ještě pomocí Taylorova rozvoje velikost kvadrátu amplitudy v bodě P' , dostaneme

$$\varrho^2 \approx |\mathbf{r} \cdot \nabla\psi|^2 = (\mathbf{r} \cdot \nabla\xi)^2 + (\mathbf{r} \cdot \nabla\eta)^2. \quad (3.75)$$

Křivkami konstantní hodnoty ϱ^2 v blízkém okolí bodu P tedy obecně budou elipsy.

Zobecnění dosavadního postupu na případ singulární křivky v trojrozměrném prostoru je poměrně snadné. Na singulární křivce zvolíme konkrétní bod P , v něm sestrojíme vektor tečný k singulární křivce a rovinu kolmou k tečnému vektoru. Na této rovině zavedeme lokální kartézské a polární souřadnice, obě s počátkem v bodě P . Vektor víru $\boldsymbol{\Omega}_P$ pak bude rovnoběžný s vektorem tečným k singulární křivce.

Nyní se pokusíme chování funkce ψ v okolí singulární čáry analyzovat podrobněji na vlastních příkladech. Závislost kvadrátu amplitudy na velikosti gradientu fáze a také tvar křivek konstantní hodnoty ϱ^2 v okolí singulární čáry můžeme vykreslit pro konkrétní funkci ψ . Přitom využijeme postupů popsaných v části 3.4. Při interferenci tří rovinných vln s vlnovými vektory

$$\mathbf{k}_1 = (\Delta k, 0), \quad \mathbf{k}_2 = (-\Delta k, 0), \quad \mathbf{k}_3 = (0, \Delta k) \quad (3.76)$$

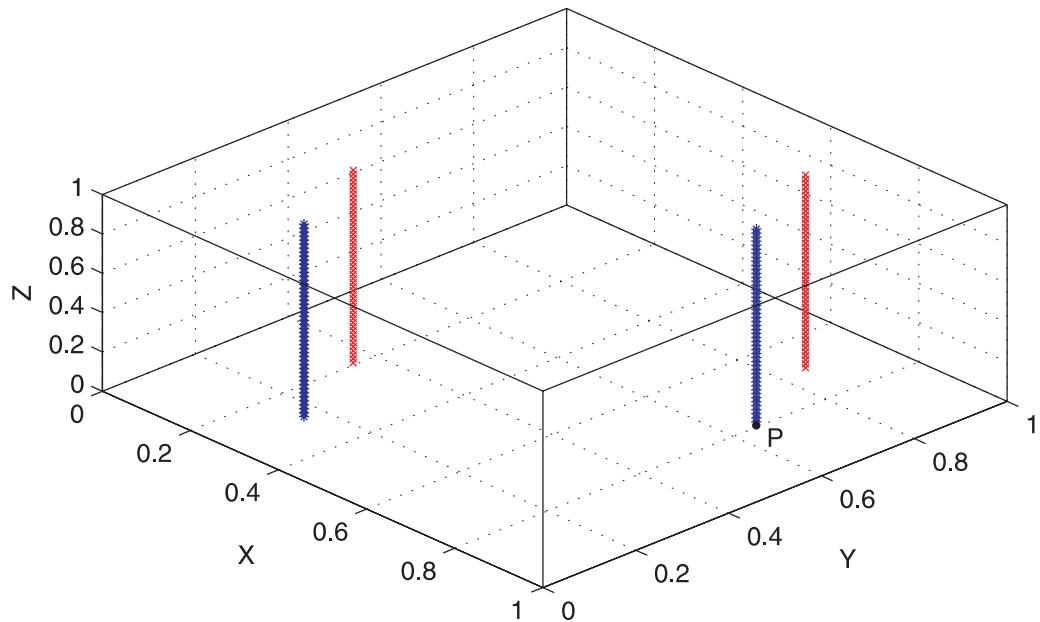
a amplitudami

$$A_1 = 0,4, \quad A_2 = 1, \quad A_3 = 0,7, \quad (3.77)$$

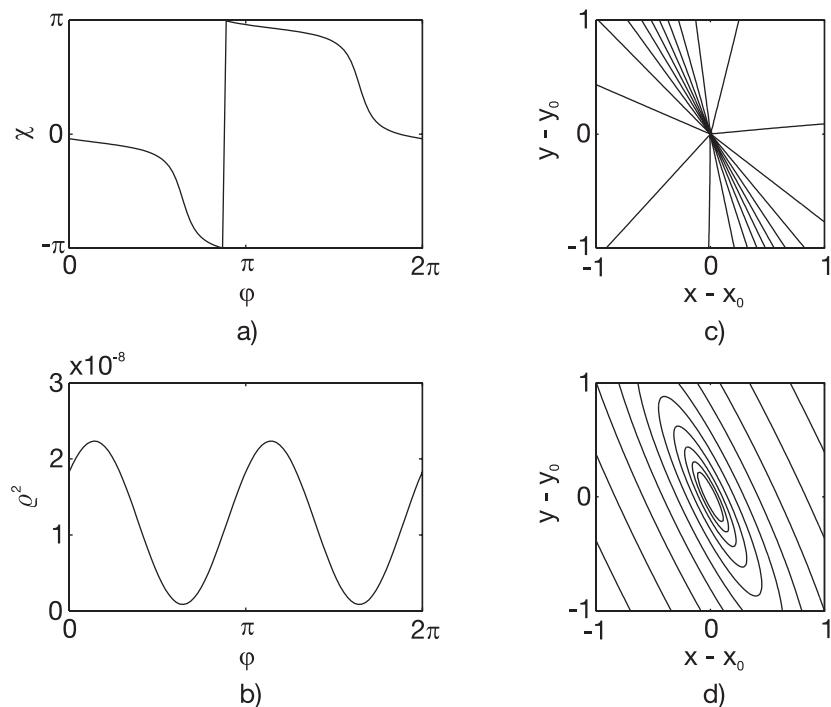
budou mít singulární křivky tvar rovnoběžných přímek. V jedné Talbotově buňce se nachází čtyři singulární přímky, viz obrázek 3.26. Výpočtem složek vektoru $\mathbf{k}_1 \times \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_2 \times \mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_3 \times \mathbf{k}_1$ se lze přesvědčit, že singulární křivky jsou rovnoběžné s osou z . V rovině $z = 0$ vybereme fázovou singularitu, nacházející se v bodě $P[x_0, y_0, 0]$. Sestrojíme kružnice se středem v tomto bodě a poloměrem r , jejíž rovnice jsou

$$x = x_0 + r \cos \varphi, \quad y = y_0 + r \sin \varphi. \quad (3.78)$$

Závislost fáze χ na azimutálním úhlu φ je vykreslena na obrázku 3.27a, závislost ϱ^2 na úhlu φ na obrázku 3.27b. Z grafů je vidět, že v místech rychlé změny fáze je velikost



Obrázek 3.26: Singulární křivky při interferenci tří rovinných vln.

Obrázek 3.27: Závislost a) fáze χ na úhlu φ , b) kvadrátu amplitudy ρ^2 na úhlu φ . Tvar křivek konstantní velikosti c) fáze χ , d) kvadrátu amplitudy ρ^2 .

kvadrátu amplitudy malá a naopak. Při oběhu kolem celé kružnice proti směru hodinových ruciček fáze klesne o 2π , což odpovídá modré barvě bodů singulární čáry.

Na obrázku 3.27d jsou vykresleny křivky konstantní velikosti kvadrátu amplitudy ϱ^2 v blízkosti bodu P, jejich tvar odpovídá elipsám. Pro přehlednost jsou na osách grafu vyneseny rozdíly $x - x_0$ a $y - y_0$. Na obrázku 3.27c jsou křivky konstantní velikosti fáze χ . Hodnoty fáze, pro které jsou křivky vykresleny, jsou rozděleny rovnoměrně na intervalu $(-\pi, \pi)$. Všechny křivky se paprskovitě sbíhají do bodu P, kde není fáze definována, přičemž ve směru hlavních poloos elips odpovídajících konstantním hodnotám ϱ^2 je jich poměrně hodně blízko u sebe. Tato nerovnoměrnost zřejmě plyne z nepřímé úměry mezi kvadrátem amplitudy a velikostí gradientu fáze.

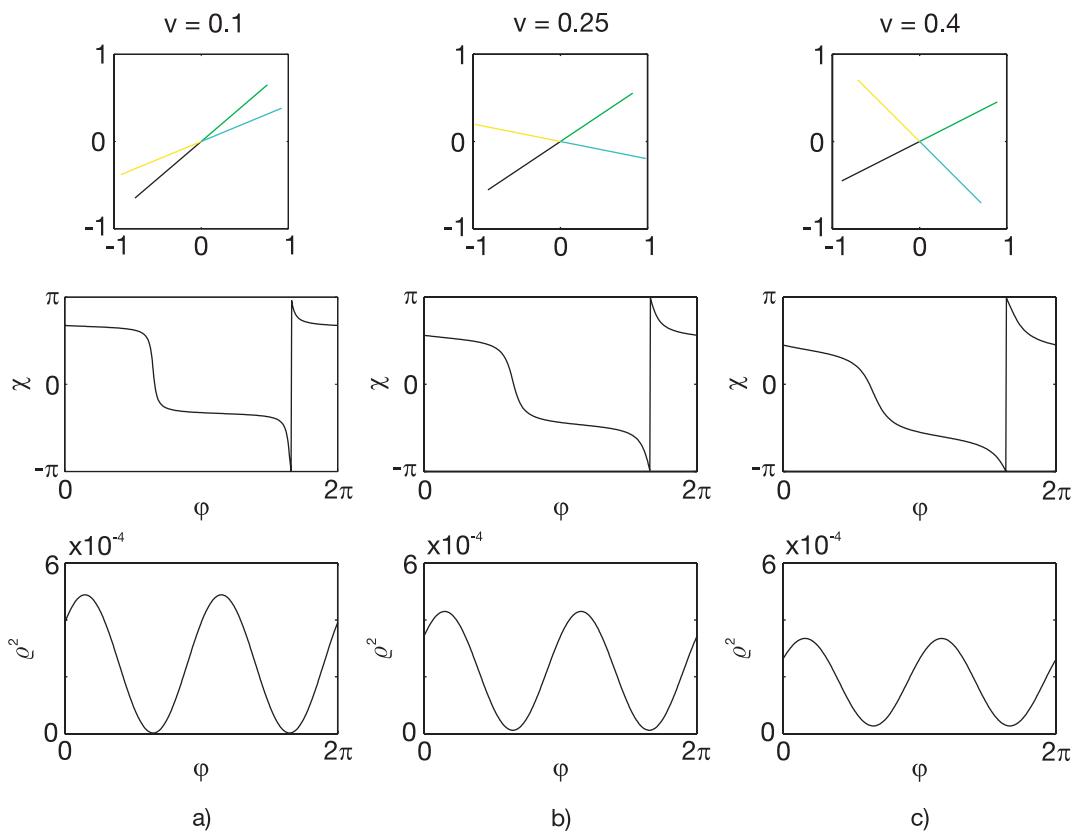
Vrátíme-li se k případu interference čtyř roviných vln se stejnými amplitudami, který jsme v jiné souvislosti podrobně diskutovali v části 3.5, můžeme si všimnout zajímavého jevu. Pro různé hodnoty parametru v , který určuje polohu na singulární přímce I, jsou závislosti fáze a kvadrátu amplitudy na úhlu φ odlišné. Zdůrazněme, že pro tento případ je úhel φ definován v rovině kolmé na směr singulární přímky, který je dán vektorem (3.49). Průběh zmiňovaných závislostí je pro tři různé hodnoty parametru $v \in (0, 1)$ vykreslen na obrázku 3.28. V souhlasu s rovnicí (3.62) hodnota fáze se vzrůstajícím úhlem φ klesá.

Ve všech třech případech stále platí, že v místech rychlé změny fáze s úhlem φ je hodnota kvadrátu amplitudy malá a naopak. Rozdíl však je v rozsahu hodnot, jakých kvadrát amplitudy dosahuje. V případě a) je tento rozsah největší, proto bude v tomto případě největší i rozsah hodnot derivace $\chi' = \frac{\partial \chi}{\partial \varphi}$, která odpovídá rychlosti změny fáze χ při změně úhlu φ . To se v grafu projeví tím, že v okolí úhlů φ , jimž odpovídá nejmenší hodnota ϱ^2 , bude v případě a) křivka $\chi(\varphi)$ klesat strměji než v případech b) a c). Naopak v okolí úhlů φ , jimž odpovídá největší hodnota ϱ^2 , bude v případě a) křivka $\chi(\varphi)$ klesat pomaleji než v případech b) a c). Naskýtá se tedy otázka, zda se dá alespoň kvalitativně předpovídat, jestli bude rozsah hodnot rychlosti změny fáze s úhlem φ malý nebo velký podle toho, kde se nacházíme na singulární přímce.

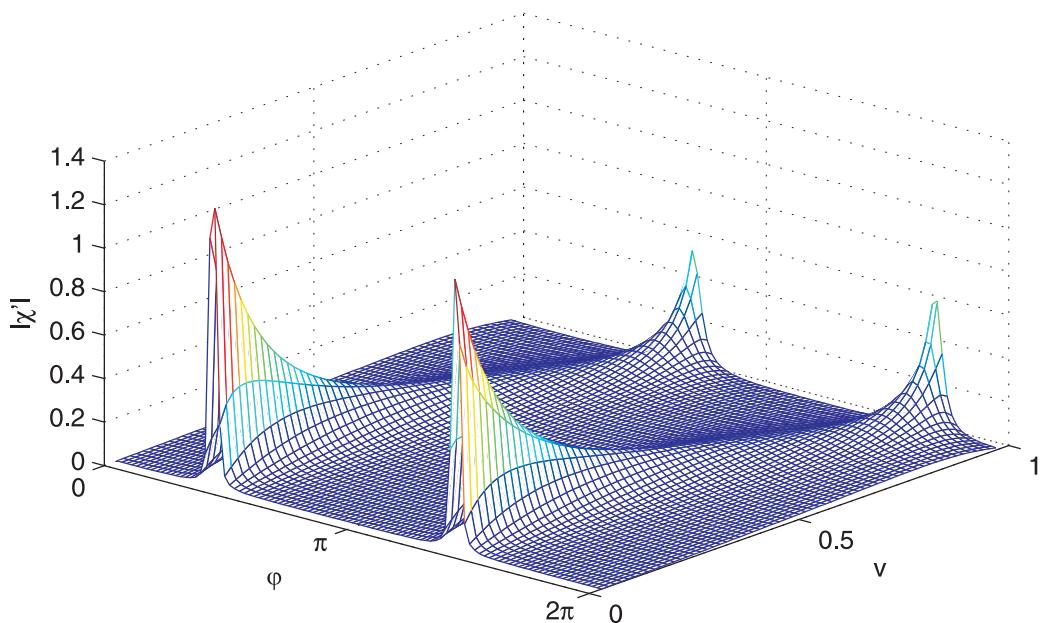
Na obrázku 3.28 jsou vykresleny také fázorové diagramy zachycující vzájemné usporádání fázorů jednotlivých roviných vln v bodech singulární přímky určených parametrem v . Připomeňme, že vždy dvojice fázorů ψ_1, ψ_2 a ψ_3, ψ_4 jsou opačně orientované, barevné označení je stejné jako na obrázku 3.21. Z fázorových diagramů na obrázku 3.28 je vidět, že když jsou dvojice opačně orientovaných fázorů téměř rovnoběžné, je rozsah hodnot ϱ^2 a χ' větší, než když jsou dvojice opačných fázorů téměř kolmé.

Graf závislosti absolutní hodnoty $|\chi'|$ na parametru $v \in (0,03; 0,97)$ a úhlu φ je vykreslen na obrázku (3.29). Pro hodnotu v zhruba uprostřed mezi nulou a jedničkou je maximální hodnota $|\chi'|$ mnohem menší, než když se v blíží nule nebo jedničce, kdy maximum $|\chi'|$ narůstá do nekonečna (proto byl z praktických důvodů zvolen pouze výše uvedený interval hodnot v). Pro $v = 0$ jsou obě dvojice fázorů rovnoběžné, pro $v = 0,5$ jsou kolmé a pro $v = 1$ opět rovnoběžné. Zhruba lze tedy říct, že čím více jsou v konkrétním bodě singulární přímky dvojice opačných fázorů vzájemně natočené (maximum natočení nastává pokud jsou dvojice fázorů na sebe kolmé), tím rovnoměrněji se bude fáze při oběhu kolem sestrojené kružnice měnit.

Tyto vlastnosti můžeme vysvětlit pomocí fázorového diagramu, zachyceného na obrázku 3.30. Orientaci každého z fázorů ψ_n , kde n nabývá celočíselných hodnot od jedné



Obrázek 3.28: Závislost fáze χ a kvadrátu amplitudy ρ^2 na azimutálním úhlu φ při oběhu po kružnici kolem singulární přímky I z obrázku 3.19 pro hodnoty parametru a) $v = 0,1$, b) $v = 0,25$, c) $v = 0,4$.



Obrázek 3.29: Závislost absolutní hodnoty $|\chi'|$ na parametru v a úhlu φ .

do čtyř, budeme popisovat úhlem, který označíme θ_n . Pokud bychom fázorový diagram kreslili pro bod nacházející se přímo na singulární přímce, měly by tyto úhly hodnoty, které označíme θ_{0n} . Amplituda všech vln je rovna jedné, proto budou mít fázory jednotkovou velikost. Protože na singulární přímce jsou dvojice fázorů ψ_1, ψ_2 a ψ_3, ψ_4 opačně orientované, bude platit

$$\theta_{02} = \theta_{01} + \pi, \quad \theta_{04} = \theta_{03} + \pi. \quad (3.79)$$

Při oběhu kolem singulární přímky po kružnici ležící v rovině kolmé na její směr se orientace každého z fázorů bude lehce měnit. Na obrázku 3.30 je to naznačeno malými šípkami, které ukazují, že fázory budou oscilovat kolem svých rovnovážných poloh daných úhly θ_{0n} .

Výslednou vlnu ψ v konkrétním bodě kružnice, po níž obíháme singulární přímku, můžeme obecně zapsat

$$\psi = \sum_n \psi_n(\theta_n) = \sum_n \exp[i\theta_n]. \quad (3.80)$$

Pokud kružnice, po které obíháme singulární přímku, nebude příliš velká, bude změna $d\theta_n$ úhlové polohy fázorů v diagramu malá. Rozepíšeme-li $\theta_n = \theta_{0n} + d\theta_n$, můžeme pro výslednou vlnu ψ napsat přibližný vztah

$$\psi = \sum_n \psi_n(\theta_{0n} + d\theta_n) \approx \sum_n \exp[i\theta_{0n}] + \sum_n i \exp[i\theta_{0n}] d\theta_n, \quad (3.81)$$

Výsledkem první sumy je nula, neboť to je výraz pro výslednou vlnu ψ na singulární přímce. S využitím vztahů (3.79) a součtových vzorců pro goniometrické funkce dojdeme k výrazům pro reálnou část ξ a imaginární část η výsledné vlny

$$\begin{aligned} \xi &= (d\theta_2 - d\theta_1) \sin \theta_{01} + (d\theta_4 - d\theta_3) \sin \theta_{03}, \\ \eta &= -(d\theta_2 - d\theta_1) \cos \theta_{01} - (d\theta_4 - d\theta_3) \cos \theta_{03}. \end{aligned} \quad (3.82)$$

Nyní je třeba analyzovat, jak se tyto vztahy budou chovat v závislosti na rozdílu úhlů θ_{01} a θ_{03} , což odpovídá vzájemnému natočení dvojic opačných fázorů ψ_1, ψ_2 a ψ_3, ψ_4 v bodě na singulární přímce. Protože je důležitý rozdíl úhlů θ_{01} a θ_{03} , můžeme pro zjednodušení popisu zvolit $\theta_{03} = 0$. Vztahy (3.82) přepíšeme

$$\begin{aligned} \xi &= (d\theta_2 - d\theta_1) \sin \theta_{01}, \\ \eta &= -(d\theta_2 - d\theta_1) \cos \theta_{01} - (d\theta_4 - d\theta_3). \end{aligned} \quad (3.83)$$

Jestliže $\theta_{01} \rightarrow \frac{\pi}{2}$, můžeme pro fázi χ výsledné vlny přibližně napsat

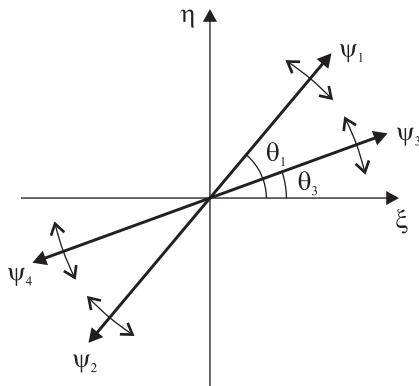
$$\chi = \arctan \frac{\eta}{\xi} \approx \arctan \left[-\frac{d\theta_4 - d\theta_3}{d\theta_2 - d\theta_1} \right]. \quad (3.84)$$

Protože výrazy v čitateli a jmenovateli zlomku, který je argumentem funkce arcus tangens, se s úhlem φ mění zhruba stejně rychle a jejich hodnoty se pohybují v přibližně stejných intervalech, bude se fáze χ s úhlem φ měnit vcelku rovnoměrně. Pokud naopak $\theta_{01} \rightarrow 0$, při použití přibližného vyjádření $\sin \theta_{01} \approx \theta_{01}$ bude platit

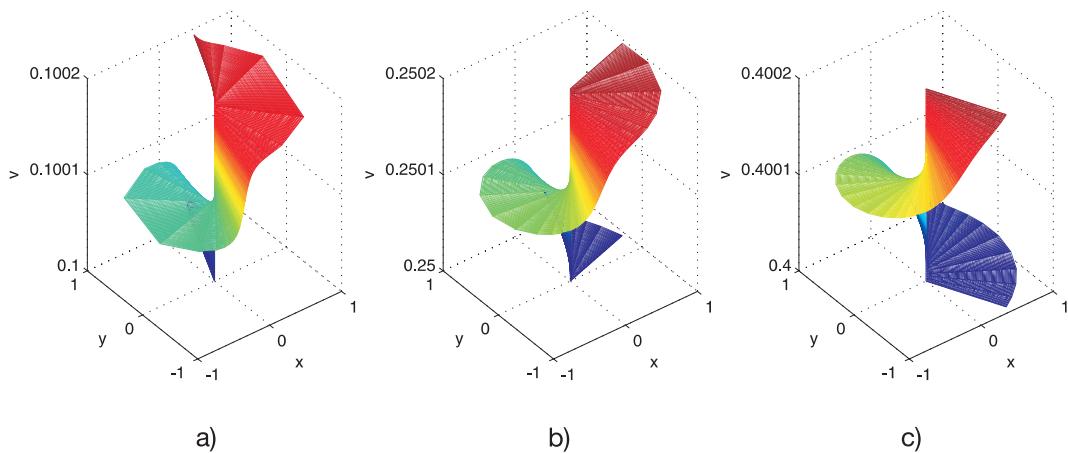
$$\chi = \arctan \frac{\eta}{\xi} \approx \arctan \left[-\frac{(d\theta_2 - d\theta_1) + (d\theta_4 - d\theta_3)}{\theta_{01}(d\theta_2 - d\theta_1)} \right] \quad (3.85)$$

Jelikož θ_{01} je malé číslo, je v tomto případě interval hodnot čitatele zlomku v argumentu funkce arcus tangens mnohem větší než interval hodnot jmenovatele. Fáze χ se proto s úhlem φ může měnit mnohem rychleji i pomaleji než v případě $\theta_{01} \rightarrow \frac{\pi}{2}$.

Rozdílný průběh fáze χ v závislosti na úhlu φ pro různé hodnoty parametru v poukazuje na to, že také tvar plochy konstantní fáze bude v různých částech singulární přímky odlišný. Na obrázku 3.31 je pro různé intervaly hodnoty parametru v vykreslena plocha konstantní fáze odpovídající hodnotě $\chi = \frac{\pi}{2}$. Souřadnice x, y uvedené na osách grafů jsou pomocné lokální souřadnice definované v rovině kolmé na směr singulární přímky tak, že bod s fázovou singularitou leží v jejich počátku. Intervaly hodnot parametru v byly zvoleny tak, že jejich dolní meze jsou rovny hodnotám v použitým u obrázku 3.28. Strmost plochy konstantní fáze na obrázku 3.31a se s úhlem φ mění poměrně hodně, naopak na obrázku 3.31c je pro různé úhly φ téměř stejná, šroubovice je pak velmi podobná šroubovici z obrázku 3.8a pro nejjednodušší šroubovou singularitu síly $s = 1$.



Obrázek 3.30: Fázorový diagram pro bod na singulární přímce. Malými šipkami je naznačeno, že při oběhu po malé kružnici kolem singulární přímky se bude úhlová poloha fázorů lehce měnit.



Obrázek 3.31: Tvar plochy konstantní fáze odpovídající hodnotě $\chi = \frac{\pi}{2}$ pro různé intervaly hodnot parametru v .

Kapitola 4

Laserové svazky obsahující fázovou singularitu

V následující části práce se budeme zabývat některými přibližnými řešeními vlnové rovnice, která obsahuje singularitu a jsou zároveň důležitá z experimentálního hlediska. Konkrétně nám půjde o laserové svazky, jejichž komplexní amplituda je v rovině kolmé na osu svazku úměrná součinu Gaussovy funkce a přidruženého Laguerrova polynomu. Tyto tzv. Laguerrovy-Gaussovy módy mají singularitu fáze na ose svazku, tvar plochy konstantní fáze v jejím okolí odpovídá šroubové singularitě. LG módy jsou jedny z možných řešení tzv. paraxiální vlnové rovnice, kterou nyní odvodíme.

4.1 Paraxiální vlnová rovnice

Podobně jako v části 3.2 přejdeme za předpokladu časové periodičnosti řešení od vlnové rovnice

$$\nabla^2 \psi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} \quad (4.1)$$

pro skalárni komplexní funkci $\psi(\mathbf{r}, t)$ k Helmholtzově rovnici

$$\nabla^2 \psi(\mathbf{r}) + k^2 \psi(\mathbf{r}) = 0. \quad (4.2)$$

pro prostorovou část $\psi(\mathbf{r})$. Přitom jsme označili k velikost vlnového vektoru. V prostoru definujeme kartézskou soustavu souřadnic (x, y, z) a také válcovou soustavu souřadnic (r, φ, z) , které mají společnou osu z .

Svazky laserového světla jsou známy tím, že s narůstající vzdáleností od osy svazku amplituda vlny rychle klesá – svazek je úzký a také málo rozvíhavý. Zvolíme-li hlavní směr šíření svazku podél osy z (tzv. paraxiální approximace), můžeme řešení Helmholtzovy rovnice předpokládat ve tvaru

$$\psi(x, y, z) = u(x, y, z) e^{ikz}. \quad (4.3)$$

Přitom funkce $u(x, y, z)$ závisí na souřadnici z jen velmi slabě. Po dosazení do rovnice (4.2) dostaneme

$$\nabla_T^2 u + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 2ik \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad (4.4)$$

kde operátor ∇_T^2 vyjádřený v kartézských, resp. válcových souřadnicích má tvar

$$\nabla_T^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad \text{resp.} \quad \nabla_T^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}. \quad (4.5)$$

Protože se funkce $u(x, y, z)$ při změně souřadnice z o hodnotu vlnové délky změní velmi málo, bude platit $\left| \frac{\partial u}{\partial z} \right| \ll |ku|$ a následně také $\left| \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right| \ll \left| k \frac{\partial u}{\partial z} \right|$. Zanedbáním členu s druhou derivací podle proměnné z v rovnici (4.4) pak dostáváme pro funkci $u(x, y, z)$ tzv. paraxiální vlnovou rovnici

$$\nabla_T^2 u + 2ik \frac{\partial u}{\partial z} = 0. \quad (4.6)$$

K této rovnici jsme došli na základě požadavku, aby hlavní směr šíření svazku byl podél osy z . Tuto souřadnicovou osu tedy ztotožníme s osou laserového svazku. Nyní potřebujeme najít takové řešení paraxiální rovnice, pro něž bude s narůstající vzdáleností od osy z amplituda rychle klesat. Přitom budeme postupovat podle [32].

4.2 Základní mód laserového svazku

Při hledání funkce $u(x, y, z)$, která má tuto vlastnost, můžeme vyjít z jednoduché představy kulové vlny šířící se z bodového zdroje umístěného v počátku kartézské soustavy souřadnic. Funkce $\psi(\mathbf{r})$ popisující prostorovou část této vlny ve vzdálenosti $|\mathbf{r}|$ od zdroje záření je

$$\psi(\mathbf{r}) \propto \frac{e^{ik|\mathbf{r}|}}{|\mathbf{r}|}, \quad (4.7)$$

V blízkém okolí osy z můžeme pro vzdálenost $|\mathbf{r}|$ použít approximaci

$$|\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \approx z + \frac{x^2 + y^2}{2z}. \quad (4.8)$$

Po dosazení do (4.7) bychom dostali vyjádření vlny $\psi(\mathbf{r})$, které je formálně podobné rovnici (4.3) a z něhož plyne konkrétní předpis pro funkci $u(x, y, z)$.

Na základě jiných argumentů a mnohem podrobnějšího rozboru (viz [32]) lze dospět k výchozí funkci

$$\psi(\mathbf{r}) = \frac{1}{i\lambda z} \exp \left[\frac{ik(x^2 + y^2)}{2z} \right] \exp [ikz] = u(x, y, z) \exp [ikz], \quad (4.9)$$

jež se od té, kterou bychom získali pomocí úvahy s kulovou vlnou, liší konstantou $1/i\lambda$. Přímým dosazením lze ověřit, že část označená $u(x, y, z)$ je řešením paraxiální vlnové rovnice (4.6). Z tohoto tvaru funkce $u(x, y, z)$ nyní vyjdeme při konstrukci funkce popisující tzv. gaussovský svazek. Ten již bude splňovat požadavek rychlého poklesu amplitudy s narůstající vzdáleností od osy z .

Jeden z běžně používaných postupů, jak tuto funkci získat, spočívá v nahrazení proměnné z komplexním výrazem $z - iz_R$. Funkci $u(x, y, z)$ z rovnice (4.9) tedy přepíšeme

$$u(x, y, z) = \frac{A}{i(z - iz_R)} \exp \left[\frac{ik(x^2 + y^2)}{2(z - iz_R)} \right], \quad (4.10)$$

kde A je normovací konstanta, do níž jsme zahrnuli i vlnovou délku λ . Pomocí úprav

$$\frac{1}{z - iz_R} = \frac{z + iz_R}{z^2 + z_R^2}, \quad (4.11)$$

$$\frac{1}{iz(z - iz_R)} = \frac{z_R - iz}{z^2 + z_R^2} = \frac{\sqrt{z^2 + z_R^2} \exp\left[i \arctan\left(-\frac{z}{z_R}\right)\right]}{z^2 + z_R^2} \quad (4.12)$$

a vlastnosti $\arctan(-\alpha) = -\arctan(\alpha)$ dostaneme

$$u(x, y, z) = \frac{A}{\sqrt{z^2 + z_R^2}} \exp\left[-i \arctan\left(\frac{z}{z_R}\right)\right] \exp\left[\frac{ik(x^2 + y^2)(z + iz_R)}{2(z^2 + z_R^2)}\right]. \quad (4.13)$$

Označíme-li

$$\frac{1}{R} = \frac{z}{z^2 + z_R^2}, \quad (4.14)$$

$$w^2 = \frac{2z_R}{k} \left(1 + \frac{z^2}{z_R^2}\right) = w_0^2 \left(1 + \frac{z^2}{z_R^2}\right), \quad (4.15)$$

$$\tan \theta = \frac{z}{z_R}, \quad (4.16)$$

lze rovnici (4.13) přepsat

$$u(x, y, z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{w} \exp\left[-\frac{x^2 + y^2}{w^2}\right] \exp\left[\frac{ik(x^2 + y^2)}{2R}\right] \exp[-i\theta]. \quad (4.17)$$

Konstantu $\sqrt{2/\pi}$ lze odvodit z podmínky pro normování v rovině $z = 0$

$$\iint |u(x, y, z = 0)|^2 dx dy = 1. \quad (4.18)$$

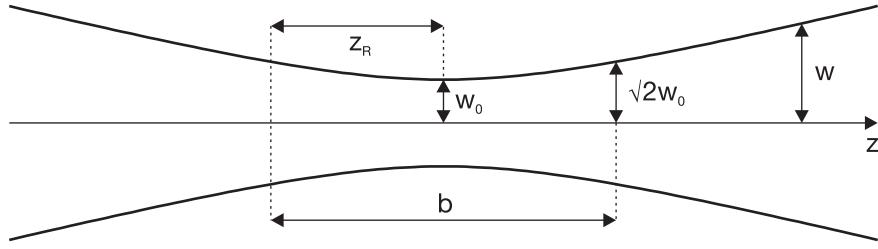
Zdůrazněme, že funkce (4.17) je přesným řešením paraxiální vlnové rovnice. Gaussovský svazek, jehož šíření v prostoru je popsáno funkcí (4.17), je označován jako základní mód laserového svazku. Pomocí něj lze nalézt další řešení paraxiální rovnice, která jsou o něco složitější a označují se jako vyšší módy. Nejdříve však stručně popíšeme vlastnosti gaussovského svazku a vysvětlíme význam veličin zavedených rovnicemi (4.14) až (4.16).

Amplituda základního módu je v rovině kolmé na osu z modulována Gaussovou funkcí $e^{-(x^2+y^2)/w^2}$, odtud název gaussovský svazek. Poloměr svazku $w(z)$ je definován jako vzdálenost od osy svazku, na níž amplituda poklesne e-krát oproti hodnotě na ose. Nejmenší poloměr má svazek v rovině $z = 0$, kde nabývá hodnoty w_0 , tato rovina je označována jako pás svazku.

Parametr R zavedený rovnicí (4.14) je poloměr křivosti vlnoplochy v dané rovině $z = \text{konst}$, faktor $e^{ik(x^2+y^2)/2R}$ vyjadřuje skutečnost, že vlnoplochy jsou zakřivené. Z rovnice (4.14) je vidět, že pro $z = 0$ a $z \rightarrow \pm\infty$ je $|R| \rightarrow \infty$, tomu odpovídá vlnoplocha ve tvaru roviny kolmé na osu svazku. Absolutní hodnota poloměru křivosti nabývá nejmenší hodnoty v rovinách $z = \pm z_R$. Veličina z_R je označována jako Rayleighova vzdálenost, její

dvojnásobek $b = 2z_R$ jako konfokální parametr. Z rovnice (4.15) plyne, že poloměr svazku v rovinách $z = \pm z_R$ je $w(\pm z_R) = \sqrt{2}w_0$. Geometrický význam parametrů je znázorněn na obrázku 4.1.

Fázový člen θ definovaný rovnicí (4.16) se označuje jako Gouyův fázový posuv a odpovídá odchylce fáze gaussovského svazku na ose z od fáze rovinné vlny s vlnovým vektorem o velikosti k , která se šíří ve směru osy z . V rovině $z = 0$ jsou fáze gaussovského svazku a této rovinné vlny shodné, pro $z \rightarrow \pm\infty$ je $\theta = \pm\pi/2$.



Obrázek 4.1: Geometrický význam parametrů gaussovského svazku.

4.3 Vyšší módy laserového svazku

Ze znalosti předpisu (4.17) pro základní mód lze nalézt funkce popisující vyšší módy, které jsou rovněž řešenými paraxiální rovnice. Podrobně je celý postup zpracován v [33], zde se omezíme na uvedení nejdůležitějších výsledků. Jestliže se při hledání dalších řešení paraxiální rovnice použijí kartézské souřadnice (x, y, z) , dojdeme k funkci

$$u_{mn}(x, y, z) = \frac{C_{mn}}{w} H_m \left(\frac{x\sqrt{2}}{w} \right) H_n \left(\frac{y\sqrt{2}}{w} \right) \exp \left[-\frac{x^2 + y^2}{w^2} \right] \exp \left[\frac{ik(x^2 + y^2)}{2R} \right] \times \exp [-i(m+n+1)\theta], \quad (4.19)$$

kde C_{mn} je normovací konstanta a funkce H_m, H_n jsou Hermitovy polynomy. Indexy m, n tedy mohou být přirozená čísla nebo nula. Protože amplituda funkce (4.19) je v rovině kolmé na osu z úměrná součinu Hermitových polynomů a Gaussovy funkce, jsou laserové svazky popsané touto funkcí označovány jako tzv. Hermitovy-Gaussovy módy.

Pokud se při hledání řešení paraxiální rovnice použijí válcové souřadnice (r, φ, z) , lze dojít k předpisu

$$u_{hl}(r, \varphi, z) = \frac{C_{hl}}{w} \left(\frac{r\sqrt{2}}{w} \right)^l L_h^l \left(\frac{2r^2}{w^2} \right) \exp \left[-\frac{r^2}{w^2} \right] \exp \left[\frac{ikr^2}{2R} \right] \exp [\pm il\varphi] \times \exp [-i(2h+l+1)\theta], \quad (4.20)$$

kde C_{hl} je normovací konstanta a funkce L_h^l je přidružený Laguerrovův polynom. Koeficienty h, l mohou být přirozená čísla nebo nula. Pro laserové svazky popsané funkcí (4.20) se používá označení Laguerrové-Gaussovy módy, neboť jejich amplituda je v rovině kolmé na

osu z úměrná součinu přidruženého Laguerrova polynomu a Gaussovy funkce. Člen $r^l e^{\pm il\varphi}$ odpovídá obecnému vztahu (3.18) pro šroubovou singularitu, jejíž síla je $s = \pm l$. LG módy tedy představují řešení paraxiální vlnové rovnice, která obsahují fázovou singularitu.

Velmi zajímavá vlastnost HG a LG módů se ukáže při srovnání průběhu intenzity

$$I_{mn}(x, y, z) = |u_{mn}(x, y, z)|^2, \quad I_{hl}(r, \varphi, z) = |u_{hl}(r, \varphi, z)|^2, \quad (4.21)$$

v různých rovinách $z = \text{konst}$ laserového svazku. Ve všech členech vystupujících ve výrazech pro intenzitu jsou souřadnice x, y a také r škálovány faktorem w , jehož závislost na souřadnici z je dána vztahem (4.15). Rozložení intenzity v různých rovinách kolmých na osu svazku se proto bude lišit pouze škálováním.

Funkce (4.19) a (4.20) jsou řešeními též rovnice, proto by mělo být možné vyjádřit $u_{hl}(r, \varphi, z)$ jako lineární kombinaci jistých $u_{mn}(x, y, z)$ a naopak. Z předpisů pro funkce popisujících HG a LG módy je vidět, že součin

$$\exp\left[-\frac{x^2+y^2}{w^2}\right] \exp\left[\frac{ik(x^2+y^2)}{2R}\right]$$

je shodný pro oba typy řešení paraxiální rovnice, stačí tedy porovnávat ostatní členy. Zřejmě by se mělo rovnat vyjádření Gouyova fázového posuvu, z čehož pro koeficienty m, n a h, l dostaneme podmínu

$$m + n = 2h + l. \quad (4.22)$$

Budeme-li chtít získat zápis funkce $u_{hl}(r, \varphi, z)$, jejíž hodnota součtu $2h + l$ je pevně daná, jako lineární kombinaci $u_{mn}(x, y, z)$, pak v této kombinaci mohou vystupovat pouze takové součiny Hermitových polynomů, jejichž koeficienty m, n splňují podmínu (4.22). Obecný vztah pro tuto lineární kombinaci uvedený v [28] má při volbě $n \geq m$ poměrně komplikovaný tvar

$$\sum_{k=0}^{n+m} (2i)^j P_j^{(n-j, m-j)}(0) H_{n+m-j}(x) H_j(y) = 2^{n+m} (-1)^m m! (x+iy)^{n-m} L_m^{n-m}(x^2+y^2), \quad (4.23)$$

kde

$$P_j^{(n-j, m-j)}(0) = \frac{(-1)^j}{2^j j!} \frac{d^j}{dg^j} [(1-g)^n (1+g)^m]|_{g=0}. \quad (4.24)$$

Pro větší přehlednost zápisu jsme v argumentech jednotlivých funkcí použili proměnných x, y bez škálovacích faktorů.

Vždy dva nejnižší Hermitovy a přidružené Laguerrovy polynomy mají tvar

$$\begin{aligned} H_0(x) &= 1 & L_0^l(x) &= 1 \\ H_1(x) &= x & L_1^l(x) &= -x + l + 1 \end{aligned} \quad (4.25)$$

Jednoduchým příkladem, na němž můžeme ukázat vlastnosti vztahu (4.23), je rozklad

$$(x+iy)L_0^1(x^2+y^2) = H_1(x)H_0(y) + iH_0(x)H_1(y), \quad (4.26)$$

kdy na obou stranách vyjde shodný výraz $x + iy = re^{i\varphi}$. Ten odpovídá vztahu (3.13) pro nejjednodušší šroubovou singularitu síly $s = 1$. Fyzikální význam lineární kombinace (4.26) je přímý. Laserový svazek obsahující šroubovou singularitu síly $s = 1$ můžeme vytvořit složením dvou svazků, jejichž amplituda je úměrná pouze souřadnici x , resp. y , a jejichž fázový rozdíl je $\frac{\pi}{2}$. Pro vyšší hodnoty koeficientů h, l dává rovnice (4.23) mnohem komplikovanější vztahy, nicméně fyzikální význam zůstává v principu stejný.

4.4 První analogie s kvantovou mechanikou

Vraťme se nyní zpět k paraxiální vlnové rovnici (4.6) a přepišme ji do tvaru

$$i \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{2k} \nabla_T^2 u. \quad (4.27)$$

Po této úpravě je dobře vidět, že paraxiální rovnice je formálně shodná s kvantovou Schrödingerovou rovnicí pro volnou částici ve dvou dimenzích, přičemž čas t je nahrazen souřadnicí z a zlomek m/\hbar odpovídá velikosti vlnového vektoru k . Popis šíření laserového svazku podél osy z tedy bude mít společné prvky s popisem časového vývoje stavu volné částice ve dvou dimenzích. Funkce (4.19) a (4.20) pak z pohledu kvantové mechaniky představují časově závislé vlnové funkce zapsané v souřadnicové reprezentaci. Analogie mezi paraxiální a Schrödingerovou rovinicí je stručně diskutována např. v [30]. V této části se ji pokusíme podrobněji rozpracovat.

Z kvantové mechaniky je známo, že od popisu kvantového stavu pomocí vlnové funkce lze přejít k popisu tohoto stavu ve fázovém prostoru (x, p) pomocí tzv. Wignerovy kvazidistribuční funkce. Ta je pro jednorozměrnou časově závislou vlnovou funkci $u(x, t)$ definována vztahem

$$W(x, p, t) = \frac{1}{2\pi} \int u^* \left(x - \frac{q}{2}, t \right) e^{ipq} u \left(x + \frac{q}{2}, t \right) dq, \quad (4.28)$$

Pro obecnou vlnovou funkci závisející na N souřadnicích můžeme sestrojit Wignerovu kvazidistribuční funkci, která je závislá na těchto N souřadnicích a N k nim konjugovaných hybnostech. Wignerova funkce je do jisté míry analogická klasické distribuční funkci $F(x, p, t)$ ve fázovém prostoru, avšak její význam a vlastnosti jsou lehce odlišné. Uvedeme jen stručně některé z nich.

Pokud funkci $W(x, p, t)$ zintegrujeme přes p pro konstantní čas t , dostaneme rozložení pravděpodobnosti naměření vlastní hodnoty souřadnice x , tedy

$$\int_{-\infty}^{\infty} W(x, p, t) dp = |u(x, t)|^2. \quad (4.29)$$

Podobně při integraci funkce $W(x, p, t)$ přes x dostaneme rozložení pravděpodobnosti naměření vlastní hodnoty p . Dále lze ukázat, že funkce $W(x, p, t)$ může nabývat záporných hodnot, což je velmi podstatný rozdíl oproti klasické distribuční funkci, která musí být vždy větší nebo rovna nule.

Protože vlnová funkce $u(x, t)$ závisí na čase, bude na něm záviset i Wignerova kvazidistribuce $W(x, p, t)$. Problém časového vývoje Wignerovy funkce je podrobně diskutován

např. v [34]. Nás budou zajímat některé jeho konkrétní vlastnosti, které mají jistou souvislost s funkcemi (4.19) a (4.20) popisujícími šíření laserového svazku podél osy z .

V [34] je odvozeno, že pokud je vlnová funkce $u(x, t)$ řešením Schrödingerovy rovnice, v níž vystupuje konstantní, lineární nebo kvadratický potenciál, bude časový vývoj příslušné Wignerovy funkce splňovat stejné vztahy, jako klasická distribuce $F(x, p, t)$. Pro tu platí tzv. Liouvilleova rovnice

$$\frac{\partial}{\partial t}F(x, p, t) = \frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial}{\partial p}F(x, p, t) - \frac{\partial H}{\partial p}\frac{\partial}{\partial x}F(x, p, t), \quad (4.30)$$

v níž H je klasický hamiltonián odpovídající Hamiltonovu operátoru z dané Schrödingerovy rovnice. Pokud tedy nalezneme popis časového vývoje klasické distribuční funkce $F(x, p, t)$, budeme jej moci použít i pro Wignerovu kvazidistribuci $W(x, p, t)$, přestože mají tyto funkce odlišný význam.

Vraťme se k paraxiální rovnici (4.27), která je analogická Schrödingerově rovnici pro volnou částici ve dvou dimenzích. Její řešení (4.19), resp. (4.20), představuje z pohledu kvantové mechaniky vlnovou funkci závislou na dvou souřadnicích. Odpovídající Wignerova funkce proto bude čtyřrozměrná. Ve Schrödingerově rovnici pro volnou částici je potenciál zřejmě roven nule, proto se bude časový vývoj sestrojené Wignerovy funkce řídit stejnými vztahy jako vývoj čtyřrozměrné klasické distribuční funkce. Pro ni bude platit rovnice analogická (4.30), přičemž hamiltonián bude příslušet klasické volné částici ve dvou dimenzích.

Časový vývoj klasické distribuce ve fázovém prostoru lze popsat pomocí pohybu bodů, které v něm reprezentují stavy volné částice. Zvolme v čase $t = 0$ konkrétní bod fázového prostoru, označme jej A . V něm má distribuční funkce hodnotu F a jeho souřadnice určují stav konkrétní volné částice, pro určitost ji označíme Q . Necháme-li nyní plynout čas, můžeme ve fázovém prostoru sledovat pohyb bodu, který reprezentuje stav částice Q . V obecném čase t bude její stav reprezentován bodem B . Z Liouvilleovy věty plyne, že v bodě B bude mít v čase t distribuční funkce stejnou hodnotu F jakou měla v čase $t = 0$ v bodě A . Pro nalezení časového vývoje klasické distribuce tedy stačí popsat pohyb volné částice ve dvou dimenzích. Protože funkce (4.19) a (4.20) jsou po řadě zapsány v kartézských a polárních souřadnicích, bude třeba pro nalezení časového vývoje příslušných distribučních funkcí popsat pohyb volné částice zvlášť v obou souřadných soustavách.

Začněme popisem v kartézských souřadnicích (x, y) , hmotnost částice zvolme jednotkovou. Klasický hamiltonián má tvar

$$H = \frac{1}{2} \left(p_x^2 + p_y^2 \right), \quad (4.31)$$

kde p_x, p_y jsou hybnosti ve směrech x, y . Označíme-li klasickou distribuční funkci v čase t zkráceně $F(t) = F(x, p_x, y, p_y, t)$, bude pro ni platit Liouvilleova rovnice

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(t)}{\partial t} &= \frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial F(t)}{\partial p_x} - \frac{\partial H}{\partial p_x}\frac{\partial F(t)}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y}\frac{\partial F(t)}{\partial p_y} - \frac{\partial H}{\partial p_y}\frac{\partial F(t)}{\partial y} = \\ &= -p_x \frac{\partial F(t)}{\partial x} - p_y \frac{\partial F(t)}{\partial y}. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Hodnotu $F(x, p_x, y, p_y, t)$ má distribuční funkce v obecném čase t v bodě B fázového prostoru o souřadnicích $[x, p_x, y, p_y]$. Stejnou hodnotu však má také v čase $t = 0$ v bodě A o souřadnicích $[x_0, p_{x0}, y_0, p_{y0}]$, označme ji $F(x_0, p_{x0}, y_0, p_{y0}, 0)$. Bude tedy platit

$$F(x, p_x, y, p_y, t) = F(x_0, p_{x0}, y_0, p_{y0}, 0). \quad (4.33)$$

Pro určení časového vývoje distribuční funkce je nyní třeba nalézt vztahy mezi souřadnicemi bodů A a B. Ty lze dostat řešením Hamiltonových rovnic, které můžeme odvodit z výrazu (4.31) pro hamiltonián. Pro dvojici veličin x, p_x dostáváme

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p_x} = p_x, \quad \dot{p}_x = -\frac{\partial H}{\partial x} = 0. \quad (4.34)$$

Řešením těchto diferenciálních rovnic jsou vztahy

$$x = p_{x0}t + x_0, \quad p_x = p_{x0}. \quad (4.35)$$

Pro dvojici y, p_y bychom dostali analogické rovnice

$$y = p_{y0}t + y_0, \quad p_y = p_{y0}. \quad (4.36)$$

Pokud z těchto rovnic vyjádříme počáteční hodnoty jednotlivých veličin, můžeme napsat

$$F(x, p_x, y, p_y, t) = F(x - p_x t, p_x, y - p_y t, p_y, 0). \quad (4.37)$$

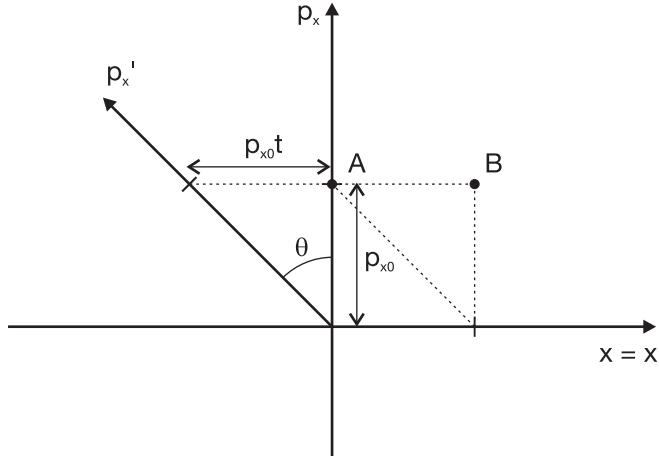
Tímto vztahem je časový vývoj klasické distribuční funkce ve fázovém prostoru plně popsán. Zdůrazněme ještě jednou, že formálně stejným vztahem je popsán i časový vývoj Wignerovy kvazidistribuce $W(x, p_x, y, p_y, t)$. Přitom se jedná o tzv. aktivní transformaci, neboť se mění průběh samotné distribuční funkce a nemění se vzájemná poloha os fázového prostoru. Správnost nalezeného vyjádření (4.37) funkce $F(x, p_x, y, p_y, t)$ pomocí její hodnoty v čase $t = 0$ lze po dosazení do Liouvilleovy rovnice (4.32) lehce ověřit pomocí pravidla pro derivaci složené funkce.

Vzhledem k tomu, že rovnice (4.35) a (4.36) jsou zcela nezávislé a formálně mají stejný tvar, můžeme se omezit pouze na rovinu x, p_x fázového prostoru a zakreslit do ní bod A pro čas $t = 0$ a jemu odpovídající bod B pro čas t (viz obrázek 4.2). Je zřejmé, že obecně mají trajektorie bodu popisujícího v této rovině stav volné částice tvar přímek rovnoběžných s osou x .

Průběh distribuční funkce v obecném čase t můžeme také získat z jejího tvaru v čase $t = 0$ pomocí vhodné transformace souřadných os fázového prostoru. Takový postup se označuje jako pasivní transformace. Jinak řečeno, chtěli bychom najít takovou souřadnou soustavu (x', p'_x, y', p'_y) , v níž by souřadnice bodu A v čase $t = 0$ byly shodné se souřadnicemi bodu B v čase t , avšak vyjádřenými v soustavě (x, p_x, y, p_y) . Transformační rovnice, které splňují tento požadavek, jsou

$$\begin{aligned} x' &= x + p_x t & y' &= y + p_y t \\ p'_x &= p_x & p'_y &= p_y \end{aligned} \quad (4.38)$$

Jestliže zvolíme $x' = 0$ dostaneme předpis pro osu p'_x v závislosti na parametrech x, p_x , podobně při volbě $p'_x = 0$ získáme rovnici pro osu x' . Vzájemné uspořádání os v rovině x, p_x je znázorněno na obrázku 4.2. Osy x, x' jsou shodné, osy p_x, p'_x jsou vzájemně natočené o jistý úhel. Konstantní hodnotě souřadnice p'_x odpovídá přímka rovnoběžná s osou x' , konstantní hodnotě x' odpovídá přímka rovnoběžná s osou p'_x . Z obrázku je vidět, že tangens úhlu, o který jsou natočeny osy p_x, p'_x , je roven t .



Obrázek 4.2: Rovina x, p_x fázového prostoru.

Z formální podobnosti mezi Schrödingerovou a paraxiální rovnicí jsme vyvodili, že při přechodu od prvně jmenované rovnice k druhé je třeba čas t nahradit souřadnicí z . Provedeme-li nyní tuto záměnu i při popisu časového vývoje distribuční funkce, bude tangens úhlu, o který jsou natočeny osy p_x, p'_x , roven z . Jestliže budeme souřadnici z udávat v bezrozměrných násobcích parametru z_R , potom z rovnice (4.16) plyne, že úhel natočení os p_x, p'_x je přímo roven parametru θ .

Tento výsledek dává do zajímavé souvislosti parametr θ vystupující v předpisu (4.19) pro HG módy s geometrickou interpretací nalezené pasivní transformace ve fázovém prostoru. Analogické výsledky bychom zřejmě dostali pro dvojici y, p_y .

Přejděme nyní k popisu klasické volné částice ve dvou dimenzích pomocí polárních souřadnic (r, φ) . Hamiltonián má tvar

$$H = \frac{1}{2} \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 \right) = \frac{1}{2} \left(p_r^2 + \frac{p_\varphi^2}{r^2} \right). \quad (4.39)$$

Označíme-li klasickou distribuční funkci v čase t zkráceně $F(t) = F(r, p_r, \varphi, p_\varphi, t)$, bude mít Liouvilleova rovnice pro tvar

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(t)}{\partial t} &= \frac{\partial H}{\partial r} \frac{\partial F(t)}{\partial p_r} - \frac{\partial H}{\partial p_r} \frac{\partial F(t)}{\partial r} + \frac{\partial H}{\partial \varphi} \frac{\partial F(t)}{\partial p_\varphi} - \frac{\partial H}{\partial p_\varphi} \frac{\partial F(t)}{\partial \varphi} = \\ &= -\frac{p_\varphi^2}{r^3} \frac{\partial F(t)}{\partial p_r} - p_r \frac{\partial F(t)}{\partial r} - \frac{p_\varphi}{r^2} \frac{\partial F(t)}{\partial \varphi}. \end{aligned} \quad (4.40)$$

Hodnotu $F(r, p_r, \varphi, p_\varphi, t)$ má distribuční funkce v obecném čase t v bodě B o souřadnicích $[r, p_r, \varphi, p_\varphi]$. Stejnou hodnotu má také v čase $t = 0$ v bodě A o souřadnicích $[r_0, p_{r0}, \varphi_0, p_{\varphi0}]$, kterou označíme $F(x_0, p_{x0}, y_0, p_{y0}, 0)$. Bude tedy platit

$$F(r, p_r, \varphi, p_\varphi, t) = F(r_0, p_{r0}, \varphi_0, p_{\varphi0}, 0). \quad (4.41)$$

Pro určení časového vývoje bychom nyní opět potřebovali nalézt obecné vztahy mezi souřadnicemi bodů A a B. Proto budeme řešit soustavu Hamiltonových rovnic

$$\dot{r} = \frac{\partial H}{\partial p_r} = p_r, \quad (4.42) \qquad \dot{p}_r = -\frac{\partial H}{\partial r} = \frac{p_\varphi^2}{r^3}, \quad (4.44)$$

$$\dot{\varphi} = \frac{\partial H}{\partial p_\varphi} = \frac{p_\varphi}{r^2}, \quad (4.43) \qquad \dot{p}_\varphi = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = 0, \quad (4.45)$$

Z rovnice (4.45) okamžitě plyne $p_\varphi = p_{\varphi0}$. Dále vezmeme rovnici (4.42), zderivujeme ji podle času a dosadíme za \dot{p}_r ze vztahu (4.44). Dostaneme rovnici, kterou budeme bez dalších komentářů upravovat, tedy

$$\begin{aligned} \ddot{r} &= \frac{p_{\varphi0}^2}{r^3} && / \cdot 2\dot{r} \\ 2\dot{r}\ddot{r} &= 2\dot{r}\frac{p_{\varphi0}^2}{r^3} \\ \int (\dot{r}^2)dt &= 2 \int \frac{p_{\varphi0}^2}{r^3} \dot{r} dt \\ \dot{r} &= \pm \sqrt{C^2 - \frac{p_{\varphi0}^2}{r^2}}, \end{aligned} \quad (4.46)$$

kde C^2 je integrační konstanta. Protože Hamiltonova funkce (4.39) je v případě klasické volné částice rovna její kinetické energii E , ze srovnání vztahů (4.39) a (4.46) vyplývá rovnost $C^2 = 2E$. Pokud je $\dot{r} = 0$, nachází se částice v nejmenší možné vzdálenosti od počátku souřadnic, která je rovna $r_m = \frac{p_{\varphi0}^2}{C^2}$ (viz obrázek 4.3). Znaménka \pm před odmocninou v rovnici (4.46) odpovídají přibližování a vzdalování částice od počátku souřadnic. Zvolme znaménko plus a upravujme rovnici (4.46) dále

$$\begin{aligned} \frac{dr}{\sqrt{C^2 - \frac{p_{\varphi0}^2}{r^2}}} &= dt \\ \int \frac{r dr}{\sqrt{C^2 r^2 - p_{\varphi0}^2}} &= \int dt \\ \frac{1}{C^2} \sqrt{C^2 r^2 - p_{\varphi0}^2} &= t - K \\ r &= \sqrt{\frac{p_{\varphi0}^2}{C^2} + C^2(t - K)^2}. \end{aligned} \quad (4.47)$$

Během úprav jsme zavedli novou integrační konstantu K . Pro čas $t = 0$ bude mít radiální vzdálenost hodnotu r_0 , z rovnice (4.47) dostaneme

$$r_0 = \sqrt{\frac{p_{\varphi 0}^2}{C^2} + C^2 K^2} = \sqrt{r_m^2 + C^2 K^2}. \quad (4.48)$$

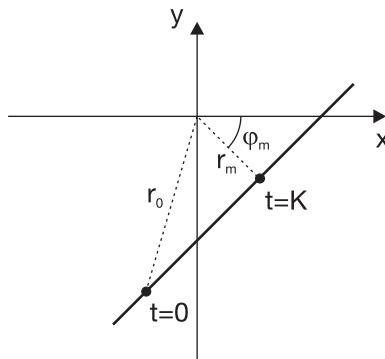
Z tohoto vztahu a obrázku 4.3 vyplývá, že konstanta K je čas, ve kterém se částice bude nacházet v minimální vzdálenosti r_m od počátku souřadnic. Konstantu K bychom mohli z rovnice (4.48) vyjádřit a dosadit ji do vztahu (4.47), čímž by v závislosti vzdálenosti r na čase přímo vystupovala počáteční hodnota r_0 . Tuto úpravu si však odpustíme, neboť rovnice (4.47) by tím nabyla zbytečně komplikovaného tvaru. Dále můžeme z rovnice (4.42) lehce vyjádřit p_r , výsledek je

$$p_r = \frac{C^2(t - K)}{\sqrt{\frac{p_{\varphi 0}^2}{C^2} + C^2(t - K)^2}}. \quad (4.49)$$

Jako poslední ještě zbývá dopočítat závislost úhlu φ na čase. Po dosazení z rovnice (4.47) do (4.43) můžeme provést úpravy

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &= \frac{p_{\varphi 0}}{\frac{p_{\varphi 0}^2}{C^2} + C^2(t - K)^2} \\ \int d\varphi &= \int \frac{p_{\varphi 0} dt}{\frac{p_{\varphi 0}^2}{C^2} + C^2(t - K)^2} \\ \varphi &= \arctan \left[\frac{C^2(t - K)}{p_{\varphi 0}} \right] + \varphi_m. \end{aligned} \quad (4.50)$$

Poslední integrační konstanta φ_m určuje úhlovou polohu bodu, v němž se volná částice přiblíží na nejmenší vzdálenost k počátku soustavy souřadnic (viz obrázek 4.3). Ze vztahů (4.49) a (4.50) bychom opět mohli určit počáteční hodnoty p_{r0} , φ_0 a následně je vhodnými úpravami dostat přímo do vyjádření veličin p_r , φ . Tyto úpravy si rovněž odpustíme, neboť vztahy (4.49) a (4.50) by pak byly zbytečně komplikované.



Obrázek 4.3: Pohyb volné částice ve dvou dimenzích.

Pro přehlednost shrňme řešení soustavy diferenciálních rovnic (4.42) až (4.45) na jednom místě, neboť je budeme potřebovat k dalšímu výkladu, tedy

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{\frac{p_{\varphi 0}^2}{C^2} + C^2(t - K)^2}, & p_r &= \frac{C^2(t - K)}{\sqrt{\frac{p_{\varphi 0}^2}{C^2} + C^2(t - K)^2}}, \\ \varphi &= \arctan \left[\frac{C^2(t - K)}{p_{\varphi 0}} \right] + \varphi_m, & p_\varphi &= p_{\varphi 0}. \end{aligned} \quad (4.51)$$

Pokud by nyní v rovnicích (4.51) přímo vystupovaly počáteční hodnoty jednotlivých veličin, mohli bychom rovnice invertovat a získat vyjádření počátečních hodnot pomocí těch v obecném čase. To lze skutečně provést, avšak výsledné vztahy jsou poměrně hodně komplikované a nepřehledné. Proto se uchýlíme k jistému zjednodušení – nalezneme tyto inverzní vztahy pouze pro takové částice, pro které platí $K = 0$. Po malých úpravách dostaneme

$$\begin{aligned} r_0 &= \sqrt{r^2 - C^2 t^2}, & p_{r0} &= p_r - \frac{C^2 t}{r}, \\ \varphi_0 &= \varphi - \arctan \frac{C^2 t}{p_\varphi}, & p_{\varphi 0} &= p_\varphi. \end{aligned} \quad (4.52)$$

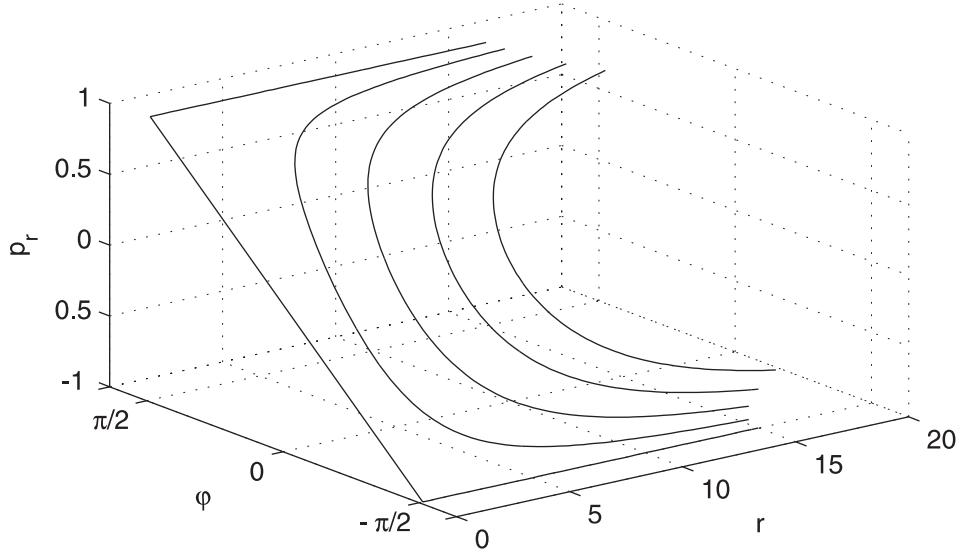
Konečně se tedy můžeme vrátit k rovnici (4.41), pomocí které chceme popsat časový vývoj distribuční funkce. Po dosazení právě odvozených vztahů ji můžeme přepsat

$$F(r, p_r, \varphi, p_\varphi, t) = F \left(\sqrt{r^2 + C^2 t^2}, p_r - \frac{C^2 t}{r}, \varphi - \arctan \frac{C^2 t}{p_\varphi}, p_\varphi, 0 \right). \quad (4.53)$$

Tímto vztahem je časový vývoj klasické distribuční funkce ve fázovém prostoru popsán, byť ne pro všechny možné částice. Formálně stejným vztahem je tedy popsán i časový vývoj Wignerovy kvazidistribuce $W(r, p_r, \varphi, p_\varphi, t)$. Pomocí pravidla pro součin složené funkce lze opět přímým výpočtem ukázat, že vyjádření distribuční funkce ze vztahu (4.53) splňuje Liouvilleovu rovnici (4.40). Popsat časový vývoj pomocí aktivní transformace je tedy možné, přestože by příslušné obecné rovnice byly poměrně komplikované.

Zvolíme-li pevně parametr $p_{\varphi 0}$, můžeme zobrazit trajektorii bodu reprezentujícího stav volné částice v trojrozměrném grafu, na jehož osách budou vyneseny hodnoty veličin r, φ, p_r (jedná se tedy o podprostor fázového prostoru, který je sám o sobě čtyřrozměrný). Pro shodné časové intervaly je tato trajektorie vykreslena pro pět různých hodnot $p_{\varphi 0}$ na obrázku 4.4, přičemž bylo zvoleno $C^2 = 1$, $K = 0$, $\varphi_m = 0$.

Podobně jako při popisu pomocí kartézských souřadnic bychom se mohli pokusit o nalezení takové souřadné soustavy, ve které by tvar distribuční funkce v čase $t = 0$ byl shodný s jejím tvarem v soustavě $(r, p_r, \varphi, p_\varphi)$ v obecném čase t . Přijatelné geometrické zobrazení této transformace se mi však nalézt nepodařilo.



Obrázek 4.4: Trajektorie bodu reprezentujícího stav volné částice v trojrozměrném podprostoru fázového prostoru pro různé hodnoty $p_{\varphi 0}$.

4.5 Druhá analogie s kvantovou mechanikou

Podíváme-li se ještě jednou na tvar funkcí (4.19) a (4.20), které popisují HG a LG módy, lze vysledovat další analogii s kvantovou mechanikou, jež je popsána např. v [30]. Označme

$$x_s = r_s \cos \varphi_s = \frac{x\sqrt{2}}{w}, \quad y_s = r_s \sin \varphi_s = \frac{y\sqrt{2}}{w} \quad (4.54)$$

a uvažujme bezrozměrnou stacionární Schrödingerovu rovnici

$$\hat{H}\Psi = E\Psi, \quad (4.55)$$

pro dvoudimenzionální harmonický oscilátor, jehož energie je E . Vyjádření této rovnice pomocí kartézských souřadnic x_s, y_s je známé z kvantové mechaniky a má tvar

$$\frac{1}{2} \left[-\frac{\partial^2}{\partial x_s^2} - \frac{\partial^2}{\partial y_s^2} + x_s^2 + y_s^2 \right] \Psi(x_s, y_s) = E\Psi(x_s, y_s), \quad (4.56)$$

Přímým výpočtem metodou separace proměnných jsem nalezl řešení této rovnice v podobě vlnové funkce

$$\Psi_{mn}(x_s, y_s) = C_{mn} H_m(x_s) H_n(y_s) \exp \left[-\frac{x_s^2 + y_s^2}{2} \right], \quad (4.57)$$

kde H_m, H_n jsou Hermitovy polynomy, C_{mn} je normalizační konstanta a energie má hodnotu $E = m + n + 1$.

Dále pro tento harmonický oscilátor hledejme vlnovou funkci $\Psi_{mn}(x_s, y_s, \theta)$, která je řešením časové Schrödingerovy rovnice

$$i \frac{\partial \Psi_{mn}(x_s, y_s, \theta)}{\partial \theta} = \hat{H}\Psi_{mn}(x_s, y_s, \theta), \quad (4.58)$$

v níž jsme čas t formálně nahradili parametrem θ . S využitím dříve uvedené stacionární vlnové funkce (4.57) můžeme řešení rovnice (4.58) zapsat ve tvaru

$$\Psi_{mn}(x_s, y_s, \theta) = \Psi_{mn}(x_s, y_s) \exp[-i(m+n+1)\theta]. \quad (4.59)$$

Srovnáme-li nalezené řešení časové Schrödingerovy rovnice pro dvourozměrný harmonický oscilátor s řešením paraxiální vlnové rovnice popisujícím HG módy (4.19), dostaneme jejich vzájemný vztah

$$u_{mn}(x, y, z) = \frac{1}{w} \Psi_{mn}(x_s, y_s, \theta) \exp\left[\frac{ik(x^2 + y^2)}{2R}\right]. \quad (4.60)$$

Analogicky můžeme postupovat v polárních souřadnicích r_s, φ_s . Řešením stacionární Schrödingerovy rovnice

$$\frac{1}{2} \left[-\frac{1}{r_s} \frac{\partial}{\partial r_s} \left(r_s \frac{\partial}{\partial r_s} \right) - \frac{1}{r_s^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi_s^2} + r_s^2 \right] \Psi(r_s, \varphi_s) = E \Psi(r_s, \varphi_s), \quad (4.61)$$

opět metodou separace proměnných jsem dospěl k výsledku

$$\Psi_{hl}(r_s, \varphi_s) = C_{hl} r_s^l L_h^l \left(r_s^2 \right) \exp\left[-\frac{r_s^2}{2}\right] \exp[\pm il\varphi_s], \quad (4.62)$$

přičemž pro energii platí $E = 2h + l + 1$. Dále pro časovou Schrödingerovu rovnici, v níž opět nahradíme čas t parametrem θ , dostaneme řešení v podobě vlnové funkce

$$\Psi_{hl}(r_s, \varphi_s, \theta) = \Psi_{hl}(r_s, \varphi_s) \exp[-i(2h + l + 1)\theta]. \quad (4.63)$$

Vztah mezi tímto řešením Schrödingerovy rovnice pro dvourozměrný harmonický oscilátor a řešením (4.20) paraxiální rovnice popisujícím LG módy pak bude

$$u_{hl}(r, \varphi, z) = \frac{1}{w} \Psi_{hl}(r_s, \varphi_s, \theta) \exp\left[\frac{ikr^2}{2R}\right]. \quad (4.64)$$

Ze vztahů (4.60) a (4.64) je vidět, že vlnové funkce popisující stav dvourozměrného harmonického oscilátoru velmi úzce souvisí s funkcemi, které popisují HG a LG módy. Exponenciální člen $e^{ik(x^2+y^2)/2R}$ je totiž společný pro všechny módy zcela bez ohledu na hodnoty koeficientů m, n či h, l . Protože při šíření laserového svazku od $z = -\infty$ do $z = +\infty$ nabývá parametr θ hodnot od $-\frac{\pi}{2}$ do $\frac{\pi}{2}$ a pro harmonický oscilátor jsme čas t nahradili parametrem θ , bude šíření svazku podél osy z odpovídat vývoji harmonického oscilátoru během poloviny periody. Této analogie s kvantovou mechanikou bylo využito např. v [30] při dalším popisu módů laserového světla.

Kapitola 5

Závěr

V první části práce jsem se zabýval samotným jevem koherenční zrnitosti. Na základě výpočtu převzatého z [1] jsem pomocí autokorelační funkce rozložení intenzity určil střední příčnou velikost zrn pozorovaných na druhém stínítku. Závislost této velikosti na průměru osvětlené oblasti prvního stínítku jsem ověřil experimentálně, přičemž dosažené výsledky byly v dobré shodě s teorií. Kromě toho jsem uvedl vlastní odhad střední příčné velikosti použitelný i pro zrna více vzdálená od osy z , kde již nefungují approximace provedené při výpočtu autokorelační funkce. S využitím některých kroků převzatého výpočtu se mi dále podařilo určit střední velikost zrn v podélném směru. V závěru této části jsem se pokusil podrobně vysvětlit principy testování vlastností lidského oka pomocí jevu koherenční zrnitosti.

Druhá část se týkala tzv. fázových singularit, které s jevem koherenční zrnitosti velmi úzce souvisí. Po prostudování jejich základních vlastností jsem se zabýval interferencí malého počtu rovinných vln. Podařilo se mi sestavit vlastní výpočetní program, který pro zadaný soubor rovinných vln najde numerickou cestou body se singularitou fáze. Díky tomu jsem pro konkrétní soubory rovinných vln dospěl k podobným tvarům singulárních křivek, jaké byly zveřejněny v původní práci [22]. Výpočetní program jsem poté využil při podrobné vlastní analýze problému krížení singulárních křivek v případě interference čtyř rovinných vln se stejnou amplitudou. Dále jsem se zabýval chováním skalární komplexní funkce ψ v blízkosti singulární křivky. Obecné vlastnosti odvozené v [16] jsem diskutoval pro případ interference čtyř rovinných vln se stejnou amplitudou.

Ve třetí části práce jsem se věnoval laserovým svazkům obsahujícím fázovou singularity, konkrétně šlo o tzv. Laguerrovy-Gaussovy módy. Po jejich odvození pomocí [32] a [33] jsem podrobně rozebral analogii mezi paraxiální vlnovou rovnicí a kvantovou Schrödingerovou rovnicí pro volnou částici ve dvou dimenzích. Nakonec jsem krátce zmínil úzkou souvislost mezi funkcemi popisujícími Laguerrovy-Gaussovy módy a funkcemi, které představují řešení Schrödingerovy rovnice pro dvourozměrný harmonický oscilátor.

Hlavní přínos této práce spočívá v analýze některých problémů, které nebyly v původní literatuře příliš diskutovány. Kromě teoretických úvah se mi také podařilo realizovat pořízené experimenty s jevem koherenční zrnitosti a sestavit zmíněný výpočetní program pro hledání bodů se singularitou fáze při interferenci rovinných vln.

Literatura

- [1] M. Hrabovský, Z. Bača, P. Horváth (2001): *Koherenční zrnitost v optice*. Olomouc, Vydavatelství Univerzity Palackého.
- [2] J. C. Dainty (1984): *Laser speckle and related phenomena*. Springer-Verlag.
- [3] J. W. Goodman (2007): *Speckle phenomena in optics: theory and applications*. Roberts and Company Publishers.
- [4] M. Born, E. Wolf (1999): *Principles of optics*. Cambridge University Press.
- [5] E. Hecht, A. Zajac (1997): *Optics*. Addison Wesley Publishing Company.
- [6] Internet: <http://www.wikipedia.org>.
- [7] Internet: <http://isaac.exploratorium.edu/> pauld/index.html.
- [8] M. V. Berry, J. F. Nye (1974): *Dislocations in wave trains*. Proc. R. Soc. Lond. A. **336**, 165-190.
- [9] N. S. Bardell (1992): *The free vibration of skew plates using the hierarchical finite element method*. Computers & Structures **45**, 841-874.
- [10] M. V. Berry, S. Klein (1996): *Integer, fractional and fractal Talbot effects*. J. Mod. Opt **43**, 2139-2164.
- [11] M. V. Berry (1998): *Wave dislocations in non-paraxial Gaussian beams*. J. Mod. Optics **45**, 1845-1858.
- [12] M. V. Berry (1998): *Much ado about nothing: optical dislocation lines (phase singularities, zeros, vortices...)*. Singular optics, SPIE 3487 (Frunzenskoe, Crimea), pp 1-5.
- [13] M. V. Berry, M. R. Dennis (2000): *Phase singularities in isotropic random waves*. Proc. R. Soc. A **456**, 2059-2079.
- [14] M. V. Berry (2001): *Geometry of phase and polarization singularities, illustrated by edge diffraction and the tides*. Second international conference on Singular Optics (Optical Vortices): Fundamentals and applications, SPIE 4403 (Bellingham, Washington), 1-12.

- [15] M. V. Berry, M. R. Dennis (2001): *Knotted and linked phase singularities in monochromatic waves*. Proc. R. Soc. A **457**, 2251-2263.
- [16] M. R. Dennis (2001): *Topological Singularities in Wave Fields*. Disertační práce.
- [17] M. V. Berry, M. R. Dennis (2001): *Knotting and unknotting of phase singularities: Helmholtz waves, paraxial waves and waves in 2+1 spacetime*. J. Phys. A **34**, 8877-8888.
- [18] M. R. Dennis (2004): *Local structure of wave dislocation lines: twist and twirl*. Journal of Optics A: Pure and Applied Optics **6**, S202-8.
- [19] J. Leach, M. R. Dennis, J. Courtial, M. J. Padgett (2004): *Knotted threads of darkness*. Nature **432**, 165.
- [20] M. V. Berry (2005): *Phase vortex spirals*. J. Phys. A **38**, L745-L751.
- [21] J. Leach, M. R. Dennis, J. Courtial, M. J. Padgett (2005): *Vortex knots in light*. New Journal of Physics **7**, 55.
- [22] K. O'Holleran, M. J. Padgett, M. R. Dennis (2006): *Topology of optical vortex lines formed by the interference of three, four, and five plane waves*. Optics Express **14**, 3039-44.
- [23] K. O'Holleran, M. J. Padgett, M. R. Dennis (2006): *Illustrations of optical vortices in three dimensions*. Journal of the European Optical Society – Rapid Publications **1**, 06008.
- [24] M. V. Berry, M. R. Dennis (2007): *Topological events on wave dislocation lines: birth and death of loops, and reconnection*. J. Phys. A **40**, 65-74.
- [25] K. O'Holleran, M. R. Dennis, F. Flossmann, M. J. Padgett (2008): *Fractality of light's darkness*. Physical Review Letters **100**, 053902.
- [26] J. W. Goodman (1996): *Introduction to Fourier optics*. McGraw-Hill Companies.
- [27] G. Nienhuis, L. Allen (1993): *Paraxial wave optics and harmonic oscillators*. Phys. Rev. A **48**, 656-665.
- [28] L. Allen, M. W. Beijersbergen, R. J. C. Spreeuw, J. P. Woerdman (1992): *Orbital angular momentum of light and the transformation of Laguerre-Gaussian laser modes*. Phys. Rev. A **45**, 8185-8189.
- [29] S. M. Barnett, L. Allen (1994): *Orbital angular momentum and nonparaxial light beams*. Optics Communications **110**, 670-678.
- [30] G. Nienhuis, J. Visser (1994): *Angular momentum and vortices in paraxial beams*. J. Opt. A: Pure Appl. Opt. **6**, S248-S250.

- [31] F. Pampaloni, J. Enderlein (2004), *Gaussian, Hermite-Gaussian, and Laguerre-Gaussian beams: A primer*. arXiv:physics/0410021.
- [32] H. A. Haus (1984): *Waves and fields in optoelectronics*. Prentice-Hall.
- [33] A. E. Siegman (1986): *Lasers*. University Science Books.
- [34] Y. S. Kim, M. E. Noz (1991): *Phase space picture of quantum mechanics: group theoretical approach*. World Scientific.
- [35] U. Leonhardt (1997): *Measuring the quantum state of light*. Cambridge University Press.