Masarykova univerzita v Brně
Přírodovědecká faktulta

Časové změny fyzikálních veličin ve středoškolské výuce

Diplomová práce

Lenka Součková

2004

Prohlašuji, že tato práce je mým původním autorským dílem, které jsem vypracovala samostatně jen s použitím uvedené literatury.

Linka Saunkova

Děkuji především vedoucí své diplomové práce prof. RNDr. Janě Musilové, CSc. za cenné rady, připomínky a trpělivost se kterou mě dovedla až k cíli. Dále Vladimíru Šenflokovi a Lukáši Horkému za pomoc s grafickou úpravou práce. Děkuji také své rodině za podporu, kterou mi poskytovala během psaní této práce.

Lenka Součková: Časové změny fyzikálních veličin ve středoškolské výuce
Přírodovědecká fakulta Masarykovy univerzity, Brno 2004
67 stran, 19 obrázků

Ve své diplomové práci se zabývám časovými změnami fyzikálních veličin ve středoškolské výuce, konkrétně se věnuji pojmům rychlosti a zrychlení. Práce se skládá ze dvou kapitol, v první z nich se zabývám rozborem vybudování pojmů rychlosti a zrychlení ve středoškolských učebnicích pro gymnázia z let 1910 až po současnost. Při rozboru učiva o rychlosti a zrychlení jsem věnovala největší pozornost dvěma základním problematickým oblastem. První z nich je zavádění rychlosti resp. zrychlení, ať již s jakýmkoliv přívlastkem, jako vektoru či skaláru. Druhou oblastí je definice pojmů okamžitá rychlost a okamžité zrychlení. Součástí rozboru je také hodnocení typografické stránky učebnic. V druhé části své diplomové práce předkládám svůj vlastní návrh zavádění pojmů rychlosti a zrychlení na středních školách. Návrh uzavírám několika příklady k procvičení.

Obsah

Předmluva

Na středních školách patří fyzika mezi méně oblíbené předměty. Proč tomu tak je? Zkusila jsem se některých žáků zeptat. Zjistila jsem, že příčinou je nejčastěji nesrozumitelný nezáživný výklad, vedený většinou jen s použitím křídy a tabule. Velmi často nebývá přizpůsoben skutečnosti, že v průměrné třídě českého gymnázia je přibližně jen 10–20% studentů se zájmem či nadáním pro fyziku, a ostatní žáky často místo potřebné motivace spíše odrazuje. Studenti si stěžují, že je látka složitá, musí se učit velké množství vzorců a definic bez představy o jejich využití v běžném životě nebo při posuzování a interpretaci pozorovaných jevů. Fyzika je přitom pro pochopení i běžně pozorovaných jevů nezbytná. Jistě by se dala přednášet atraktivnějším způsobem zejména s použitím zajímavých pokusů a příkladů z přírody i ze života, které by ji studentům dokázaly přiblížit a vzbudit o ni zájem.

Problémem při fyzikálním výkladu je také nedostatečné matematické zázemí studentů. Velmi dobře lze toto tvrzení dokumentovat na učivu, kterým se zabývám ve své práci. Jedná se o vybudování zdánlivě jednoduchých pojmů *rychlost* a *zrychlení*. Tato látka se na středních školách vyučuje v úvodních týdnech prvního ročníku. Studenti v této době disponují pouze znalostmi nabytými na základní škole, které mohou být velmi rozdílné. V mnoha případech nejsou někteří studenti schopni provádět ani elementární úpravy rovnic potřebné pro vyjádření fyzikálních veličin. Proto výuka vyžaduje trpělivý přístup učitele a často i doplňující matematický výklad "navíc". Nejlepším řešením je, když učitel fyziky vyučuje ve třídě zároveň i matematiku. Může tak výuku obou předmětů skloubit a připravit si půdu pro to, aby se ve výuce fyziky mohl opravdu věnovat výkladu fyzikálních pojmů. Pokud tomu tak není a učitel chce přesto studenty svědomitě připravit, musí část hodin fyziky obětovat matematice.

Ani v případech, kdy jsou okolnosti pro symbiózu výuky matematiky a fyziky příznivé, však nelze zajistit, aby matematická "výzbroj" studentů pro výuku fyziky byla dostatečná. Fyzikální děje probíhají v čase a veličiny, které je popisují, se mění i v závislosti na souřadnicích. Učitel je tak neustále stavěn před velmi obtížný problém, jak při budování fyzikálních pojmů a výkladu zákonitostí obejít diferenciální a integrální počet. Kapitoly o kinematice ve všech českých gymnaziálních učebnicích vydaných od roku 1910 až po současnost, které se mi podařilo opatřit, jsou jen neúspěšnými pokusy tento úkol splnit. Také má diplomová práce je pokusem o vybudování některých fyzikálních pojmů, které jsou z matematického hlediska založeny na pochopení derivace. Aby bylo možné takové pojmy korektně zavést bez použití derivací, je třeba založit výklad na příkladech, pokusech a také na zkušenosti.

První kapitola práce je věnována rozboru textu týkajícího se rychlosti a zrychlení ve zmíněných učebnicích. Její závěr je věnován stručnému rozboru úskalí při zavádění těchto pojmů. Druhá kapitola představuje návrh přístupu k pojmům rychlost a zrychlení, s trochou nadsázky tedy k výkladu "derivací bez derivování". Výklad je založen na rozboru řady konkrétních situací a směřuje jen pozvolna k obecné definici rychlosti a zrychlení.Tento postup je zvolen proto, že pro studenty je obtížné šžít se již se samotným pojmem funkce. A definice rychlosti a zrychlení vyžadují pracovat dokonce s jejími změnami. Závěr kapitoly obsahuje nepříliš rozsáhlý soubor příkadů, pomocí nichž lze pochopení nových pojmů ověřit a procvičit.

Kapitola 1

Rychlost a zrychlení v českých gymnaziálních učebnicích

Užívání důležitých fyzikálních pojmů *rychlost* a *zrychlení* je v běžném životě velmi frekventované. Skutečnost, že se z fyzikálního a matematického hlediska jedná o pojmy, jejichž korektní zavedení zejména na středoškolské úrovni je poměrně obtížné, se tak může jevit jako poněkud paradoxní. Je to způsobeno tím, že intuitivní představa o těchto pojmech je, právě díky jejich běžnému užívání, na poměrně dobré úrovni a nevzniká proto potřeba jejich důkladné definice pro praktické užití. Pro pochopení pohybových zákonů mechaniky je však nezbytně nutné mít základní kinematické pojmy, a zejména pak rychlost a zrychlení, zavedeny korektně, bezchybně a jednoznačně. Poněvadž se z matematického hlediska jedná o derivace, je nalezení vhodného postupu při definování těchto pojmů na samém počátku středoškolské výuky fyziky (v současnosti začátek prvního ročníku čtyřletých gymnázií a odborných středních škol) didaktickým "prubířským kamenem". Oprávněnost tohoto tvrzení ukazuje rozbor odpovídajících částí všech středokolských učebnic fyziky z téměř stoletého období sahajícího až do současnosti, konkrétně z let 1910 až 2001, které se mi podařilo získat. Vlastní návrh výkladu pojmů *rychlost* a *zrychlení* na úrovni současných čtyřletých gymnázií, předložený v této diplomové práci, vychází pak z výsledků tohoto rozboru, a to jak z pozitivně hodnocených přístupů v diskutovaných učebnicích, tak především z poučení vyplývajích ze závěrů negativních.

Vzhledem k malému rozsahu daného tématu v středoškolských učebnicích před rokem 1910 jsem se rozhodla soustředit se na období po tomto roce. V prvním odstavci této kapitoly je proveden rozbor způsobu zavádění pojmů *rychlost* a *zrychlení* v učebnicích fyziky vydaných v letech 1910 až 1979, v druhém odstavci je zpracováno období 1984 až 2001. Jedná o učebnice určené především gymnáziím nebo středním školám, které odpovídají dnešním gymnáziím. Toto omezení jsem přijala proto, že se na středních školách jiných typů byla výuce fyziky věnována malá pozornost. V závěru druhého odstavce jsem se podrobněji zabývala současnými učebnicemi, které jsou díky doložce MŠMT považovány za oficiální podklad pro výuku fyziky na gymnáziích.

Při rozboru učiva o rychlosti a zrychlení jsem věnovala největší pozornost dvěma základním problematickým oblastem. První z nich je zavádění rychlosti resp. zrychlení, ať již s jakýmkoliv přívlastkem, jako vektoru či skaláru. Druhou oblastí je definice pojmů okamžitá rychlost a okamžité zrychlení. Součástí rozboru je i sledování klasifikace pohybů z hlediska tvaru trajektorie (pohyb přímočarý resp. křivočarý). Rozbor ukázal nepříliš povzbudivou skutečnost, že v takřka stoletém intervalu, v němž byly posuzované učebnice postupně vydávány, nezaznamenal způsob výkladu základních kinematických pojmů prakticky žádný vývoj. Tato skutečnost by nemusela být hodnocena negativně, pokud by výklad problematiky byl fyzikálně správný. Ve většině případů však tomu tak, bohužel není.

Pro lepší orientaci je rozbor učebnic graficky upraven tak, že doslovné citáty z učebnic jsou umístěny na šedém pozadí. Rozbor každé učebnice má následující strukturu:

1. Hodnocení (věcná stránka, typografická stránka)
2. Zavedení pojmu přímočarý resp. křivočarý pohyb
3. Zavedení pojmu rovnoměrný pohyb
4. Zavedení pojmu rychlost
5. Zavedení průměrné rychlosti
6. Okamžitá rychlost
7. Pojem rovnoměrně zrychlený pohyb a zrychlení
8. Okamžité a průměrné zrychlení
9. Pohyb po kružnici (pokud je v učebnici obsažen)

1.1 Učebnice z let 1910 –1979

V tomto odstavci je předložen souhrn a zhodnocení týkající se zavádění veličin *rychlost* a *zrychlení* ve středoškolských učebnicích, které se v současné době při výuce již nepoužívají. Pro ucelené posouzení vývoje přístupů k výkladu uvedených pojmů však přinášejí zajímavá poučení.

1.1.1 Učebnice [1] z roku 1910

V této učebnici je téma rychlosti a zrychlení zařazeno do kapitoly *Mechanika hmot tuhých (geomechanika)* část *Základní pojmy.* V úvodu kapitoly je definován pojem *pohyb*, který je následně při definici pojmu *dráha* rozdělen na přímočarý a křivočarý, v dalším textu se tato klasifikace již neužívá. *Rychlost* i *zrychlení* jsou definovány jako skalární fyzikální veličiny, o vektorovém charakteru rychlosti je uvedena pouze dodatečná zmínka. Od pojmů *průměrná rychlost* a *průměrné zrychlení*, definovaných jako skalární veličiny, dospívají autoři pro případ malého časového intervalu k *okamžité rychlosti* a *okamžitému zrychlení.* Text je doplněn o grafy, znázorňující závislost dráhy nebo rychlosti na čase, a řešené příklady k procvičení.

Text má velmi nevýrazné členění, nejsou použita žádná vertikální odsazení, zvýraznění textu je omezeno jen na použití tučného písma, kurzívy nebo prostrkávání (zvětšení meziznakových mezer). Vztahy jsou součástí textu, nejsou od něj dostatečně odděleny ani jinak zvýrazněny. Tento způsob znemožňuje rozlišit úroveň důležitosti jednotlivých vztahů. Stejný problém nastává i u definic, špatně odlišených od ostatního textu, který tak ztrácí rozumné členění.

Zavedení pojmu přímočarý resp. křivočarý pohyb

> Čára, kterou pohybující se b o d probíhá, slove jeho *drahou*. Je-li dráha p ř í m á , děje se pohyb *přímočarý*; jeho směr je stále týž. Je-li dráha k ř i v á, koná se pohyb *křivočarý*; směr jeho se mění a je v každém místě dráhy určen příslušnou t e č n o u.

Zavedení pojmu rovnoměrný pohyb

> Nejjednodušší je pohyb (ať přímočarý, ať křivočarý), při němž dráha roste ú m ě r n ě s dobou; nazýváme jej *rovnoměrným*.

Zavedení pojmu rychlost

> Úměrnost dráhy (s) s příslušnou dobou (t) při pohybu rovnoměrném lze vyjádřit vztahem
>
> $$s = c.t$$
>
> Konstanta úměrnosti c slove *rychlost* pohybu rovnoměrného a číselně znamená dráhu proběhnutou za jednotku doby.

Jako základní jednotku rychlosti uvádějí autoři $cm{\cdot}sec^{-1}$ (v době, kdy byla učebnice vydána, bylo obvyklejší užívání soustavy jednotek CGS než soustavy MKS odpovídající dnešní SI). Po uvedení definice rychlosti rovnoměrného pohybu jako skaláru následuje upozornění na její vektorový charakter:

> Při rychlosti je třeba přihlížeti též k jejímu směru; rychlost je proto v e k t o r e m. Rychlost jakožto vektor znázorňujeme úsečkou, jejíž směr a délka stanoví směr a velikost rychlosti.

Zavedení průměrné rychlosti

> Při pohybech n e r o v n o m ě r n ý ch (na př. při jízdě vlaků) zavádí se *rychlost průměrná*, kterou by se v téže době proběhla táž dráha, kdyby pohyb byl r o v n o m ě r n ý. Chceme-li průměrnou rychlost určiti, pozorujeme dráhu Δs proběhnutou za dobu Δt; pak značí podíl $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ p r ů m ě r n o u rychlost ve zvolené době Δt.

Poznamenejme, že průměrnou rychlostí je zde nesprávně nazývána časová střední hodnota velikosti rychlosti.

Okamžitá rychlost

> Volíme-li však při pokusu Δt kratší a kratší, pozorujeme, že podíl $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ blíží se k mezné (limitní) hodnotě, již označujeme $\frac{ds}{dt}$; tato mezná hodnota se jmenuje *differenciální kvocient* dráhy s podle doby t a její velikost vyjadřuje *okamžitou* rychlost v:
>
> $$v = \frac{ds}{dt}$$

Také okamžitá rychlost je definována jako skalár. Ve skutečnosti představuje formulace zavedení velikosti okamžité rychlosti. Bez doplnění komentáře o směru rychlosti (tečna k trajektorii) je pojem zaveden nejen nedostatečně, ale dokonce matoucím způsobem.

Pojem rovnoměrně zrychlený pohyb a zrychlení

> Pohyb *rovnoměrně zrychlený* je takový, při němž okamžité rychlosti v přibývá úměrně s dobou t, měřenou od počátku pohybu, což vyjadřuje vztah
>
> $$v = a.t$$
>
> Konstanta úměrnosti a znamená vzrůst rychlosti za vteřinu a jmenuje se *zrychlení*[1] (akcelerace).

Okamžité a průměrné zrychlení

Postup při zavedení pojmu zrychlení je obdobný:

> Pozorujeme-li za dobu Δt vzrůst rychlosti Δv, znamená podíl $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ p r ů m ě r n é zrychlení v době Δt. Zmenšujeme-li dobu Δt, blíží se podíl $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ mezné hodnotě, kterou označujeme $\frac{dv}{dt}$ a jmenujeme *okamžitým zrychlením.*

Učebnice z roku 1911 je, v části týkající se kinematky, doslovným opisem knihy [1].

1.1.2 Učebnice [3] z roku 1934

Látka týkající se rychlosti a zrychlení je obsažena v kapitole *Mechanika hmot pevných. (Geomechanika)* v části *Základy kinematiky.* Pohyb je rozdělen na přímočarý a křivočarý, v dalším výkladu se již klasifikace nepoužívá. Rychlost i zrychlení jsou definovány jako skaláry, o jejich vektorovém charakteru se učebnice nezmiňuje. Pojem zrychlení je definován pouze pro rovnoměrně zrychlený pohyb.

Učebnice již používá základních typografických pravidel, objevuje se vertikální členění textu, který je tak mnohem čitelnější. Způsob zvýrazňování důležitých pojmů v textu je stejný jako v předchozích učebnicích, opět je použito tučné písmo, kruzíva a prostrkávání (zvětšení meziznakové mezery). Výklad je doprovázen obrázky, avšak oproti předcházejícím učebnicím je ochuzen o grafy závislostí. Je zde také několik úloh k procvičení.

Zavedení pojmu přímočarý resp. křivočarý pohyb

> P o h y b u j í c í se bod opisuje čáru, která slove jeho *dráha.* Podle tvaru dráhy dělíme pohyb bodu na ***přímočarý*** a ***křivočarý***. Směr pohybu křivočarého se mění a je stanoven t e č n o u v uvažovaném bodu.

[1] Vektorový charakter zrychlení zde není zmíněn.

Zavedení pojmu rovnoměrný pohyb

> Nejjednodušší pohyb bodu je pohyb *rovnoměrný*, při němž bod vykoná za jakékoliv stejné doby stejně dlouhé dráhy (přímé nebo křivé). Každý jiný pohyb slove *nerovnoměrný*.

Zavedení pojmu rychlost

> Podle definice je dráha za každou jednotku času stejná a slove *rychlost c*.

Rychlost je opět definována jako skalání veličina.

> Dráha za t jednotek časových je tedy
>
> $$s = c.t$$
>
> Zákon dráhy pohybu rovnoměrného tedy praví, že dráha je přímo úměrná času. Analyticky tu vystupuje rychlost[2] jako konstanta úměrnosti.
>
> $$c = \frac{s}{t} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Zavedení průměrné rychlosti

> Ve skutečnosti je pohyb rovnoměrný řídký případ; přírůstky drah za stejné doby i velmi krátké nejsou stejné. Rychlost c ztrácí význam. Můžeme však i při pohybech nerovnoměrných definovati *rychlost průměrnou v* za určitou dobu. Průměrná rychlost v intervalu časovém $t \ldots t + \Delta t$ je číselně rovna dráze vykonané v tomto intervalu průměrně za jednotku časovou. Změříme přírůstek dráhy Δs za dobu Δt a stanovíme
>
> $$v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Okamžitá rychlost

Pro malý časový interval přechází autoři od průměrné rychlosti k pojmu okamžitá rychlost. Ve vztahu pro okamžitou rychlost používají symboliku pro derivace.

> ... Můžeme pak definovati *okamžitou rychlost v* pohybu nerovnoměrného v čase t jako průměrnou rychlost v nekonečně krátkém intervalu časovém t, $t + dt$[3], neboli
>
> $$v = \frac{ds}{dt}$$

[2]Jednotkou je tu opět $cm{\cdot}sec^{-1}$.

[3]Symbolem Δ značíme přírůstky konečné, symbolem d přírůstky nekonečně malé. Ve fysice však stačí uvažovati přírůstky jen tak malé, jaká je citlivost měření. Všechna měření fysikální jsou jen přibližná.

Pojem rovnoměrně zrychlený pohyb a zrychlení

Přírůstek rychlosti za vteřinu slove *zrychlení (akcelerace)*. Tento pohyb, při němž je zrychlení nepromĕnné, slove *pohyb rovnoměrně zrychlený*. Obecně platí pro pohyb rovnoměrně zrychlený

$$v = a.t$$

Okamžité a průměrné zrychlení

O těchto veličinách se učebnice vůbec nezmiňuje.

V sekci *Metody fysiky* se autoři zmiňují o vektorové povaze rychlosti a zrychlení.

1.1.3 Učebnice [4] z roku 1936

Ačkoli vydání této knihy od učebnice [1] dělí 25 let, jedná se pouze o její stručnější verzi, která nepřináší žádné nové věci a dokonce je o mnohé důležité ochuzena.

Zavedení pojmu přímočarý resp. křivočarý pohyb
Zavedení pojmu rovnoměrný pohyb
Zavedení pojmu rychlost

Definice jsou doslovně převzaty z učebnice [1]. Avšak o vektorovém charakteru rychlosti a zrychlení se učebnice nezmiňuje vůbec. I zde je základní jednotkou rychlosti cm·sec^{-1}.

Zavedení průměrné rychlosti

$$c = \frac{s - s_0}{t - t_0} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

...(poměr přírůstku dráhy Δs k přírůstku doby Δt). Při pohybu nerovnoměrném určuje tento poměr *rychlost průměrnou* ve zvolené době Δt.

Okamžitá rychlost

Volíme-li tuto dobu kratší a kratší, pozorujeme, že se podíl $\Delta s/\Delta t$ blíží určité mezní (limitní) hodnotě, která stanoví *okamžitou rychlost* v a značí se, ds/dt (derivace dráhy podle času)[4].

Pojem rovnoměrně zrychlený pohyb a zrychlení

Tento pohyb je přiblížen na pokusu s Atwoodovým padostrojem.

[4]Poprvé se zde výslovně mluví o derivaci.

Pohyb, jehož rychlost vzrůstá úměrně s dobou, měřenou od počátku pohybu, nazývá se *pohyb rovnoměrně zrychlený*. Zákon rychlosti tohoto pohybu je vyjádřen vztahem

$$v = a.t$$

Konstanta úměrnosti a znamená stálý přírůstek rychlosti za vteřinu a jmenuje se *zrychlení* (akcelerace).

Okamžité a průměrné zrychlení

Pojmy nejsou zavedeny.

1.1.4 Učebnice [5] z roku 1950

Téma rychlosti a zrychlení je zde probíráno ve dvou kapitolách – *Pohyb rovnoměrný a Pohyb rovnoměrně zrychlený*. Klasifikace pohybů podle tvaru trajektorie není provedena. V příkladu na rovnoměrný pohyb ... rozjetý vlak na přímé vodorovné trati ..., je myšlen přímočarý pohyb. Při formulaci definic rychlosti a zrychlení neberou autoři v úvahu vektorový charakter těchto veličin.

Z typografického hlediska se jedná o první učebnici, která je velmi podobná současným učebnicím. Text je přehledný díky dobrému vertikálnímu členění a lepšímu zvýraznění důležitých pasáží tučným písmem. Stále však nejsou definice odlišeny od ostatního zvýrazněného textu. V každém případě se jedná o výrazné zlepšení úrovně učebnice už proto, že každá definice je doprovázena názorným příkladem. Poprvé je zde také náznak určitého "shrnutí" resp. ukončení kapitoly v podobě otázek a úkolů. Chybí grafy a obrázky, které by studentům usnadnily pochopení látky.

Zavedení pojmu rovnoměrný pohyb

Pojem je zaveden až po definici rychlosti.

> **Pohyb, při kterém se rychlost nemění, je pohyb rovnoměrný.**

Zavedení pojmu rychlost

Jedná se o první definici v kapitole, aniž by přecházel nějaký úvod. Vše je představeno na příkladu chodce.

> **Rychlost je dráha, kterou těleso urazí za jednotku času.** Obyčejně se udává buď za hodinu v kilometrech (rychlost hodinová), nebo za vteřinu v metrech (rychlost vteřinová).[5]

Zavedení průměrné rychlosti

Zavedení průměrné rychlosti přímo navazuje na definici rovnoměrného pohybu.

[5] Jedná se o první použití jiné základní jednotky než cm·sec^{-1}.

. . . U tohoto pohybu jsou dráhy, které těleso urazí za stejné doby, stejné. Ve skutečnosti se chodec takto nepohybuje. Někdy jde rychleji, jindy pomaleji. Proto tímto výpočtem[6] obdržíme jeho **průměrnou rychlost.**

Okamžitá rychlost

Okamžitá rychlost je zde prezentována jako údaj, který získáme použitím přístroje zvaného **rychloměr**.

Pojem rovnoměrně zrychlený pohyb a zrychlení

K zavedení těchto pojmů je použit názorný příklad s nakloněnou rovinou.

> . . . pohyb po nakloněné rovině je **pohyb rovnoměrně zrychlený**. Přírůstek rychlosti zrychleného pohybu za jednotku doby nazýváme **zrychlení** čili akcelerace; označujeme ji a. **U přímočarého rovnoměrně zrychleného pohybu je zrychlení stále stejně veliké čili konstantní.**

Okamžité a průměrné zrychlení

O těchto veličinách se učebnice nezmiňuje.

1.1.5 Učebnice [6] z roku 1951

Téma rychlosti a zrychlení je probíráno ve čtyřech kapitolách *Pohyb přímočarý, rovnoměrný; Časová změna fyzikální veličiny; Pohyb přímočarý, nerovnoměrný; Skaláry a vektory.* Pohyb není rozdělen na křivočarý a přímočarý, autoři používají pouze přímočarý pohyb. Rychlost i zrychlení jsou definovány jako skalární fyzikální veličiny, v závěrečné kapitole je upozornění na jejich vektorový charakter. Od pojmu průměrná rychlost pro malý časový interval dospívají autoři k pojmu okamžitá rychlost. Používají infinitezimální počet. Okamžité zrychlení nezavádí. Poprvé jsou k výkladu použity právě limity, text je doplněn také otázkami a úkoly k samostatné práci. Před zaváděním pojmů je vždy uveden příklad z praxe nebo experiment.

Z typografického hlediska se jedná o učebnici se stejnými klady a zápory jako učebnice předchozí.

Zavedení pojmu přímočarý resp. křivočarý pohyb

Touto klasifikací se učebnice přímo nezabývá, výklad se týká pouze pohybu přímočarého.

Zavedení pojmu rovnoměrný pohyb

> Přímočarý pohyb, jehož délka dráhy je přímo úměrná času, nazýváme **přímočarý pohyb rovnoměrný.**

[6] Výpočtem se myslí vztah $c = \frac{s}{t}$.

V tomto pojetí byla termínem *dráha* zřejmě míněna křivka, po které se hmotný bod pohybuje, bylo tedy třeba hovořit o ***délce dráhy*** V současném pojetí se o křivce, po níž se pohybuje hmotný bod, určené její parametrickým vyjádřením, hovoří jako o *trajektorii*, slovo *dráha* je rezervováno pro délku oblouku, po kterém hmotný bod prošel, popřípadě pro celkovou délku oblouku, z nichž je příslušná část trajektorie složena.

Zavedení pojmu rychlost

$$s = c.t$$

Dosaďme do rovnice dráhy čas $t = 1$ vteřina, pak jest $s = c$. To znamená, že konstanta c se **číselně** rovná dráze vykonané za jednu vteřinu. Konstantu c nazýváme **rychlostí přímočarého pohybu rovnoměrného.**

Zavedení průměrné rychlosti

Pro nerovnoměrný pohyb po přímce se přechází k průměrné rychlosti.

Průměrná rychlost pohybu v časovém intervalu t a v dráhovém úseku s je $v_p = s/t$.

Okamžitá rychlost

Zmenšujeme-li stále časový interval Δt, $\Delta t \to 0$, pak Δs bude stále těsněji uzavírat bod C. Podíl $\Delta s/\Delta t$ se blíží mezné hodnotě, kterou nazýváme **okamžitá rychlost** pohybu v bodě C. Matematicky

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = s'$$

Pojem rovnoměrně zrychlený pohyb a zrychlení

Nejdříve učebnice zavádí pojem zrychlení.

Časová změna rychlosti se nazývá zrychlení.

K definování pojmu rovnoměrně zrychleného pohybu je opět využito příkladu s nakloněnou rovinou.

Pohyb na nakloněné rovině nazýváme **rovnoměrně zrychlený.**

Okamžité a průměrné zrychlení

O těchto veličinách se učebnice nezmiňuje.

Je provedena klasifikace pohybů podle zrychlení na rovnoměrně zrychlené, rovnoměrně zpožděné a obecně pohyby nerovnoměrné. V celém textu jsou rychlost a zrychlení definovány jako skaláry, i když na závěr v kapitole *Skaláry a vektory* je uvedeno:

Délka dráhy, rychlost a zrychlení jsou vektory.

Interpretace dráhy jako vektoru je chybná.

1.1.6 Učebnice [7] z roku 1955

Téma rychlosti a zrychlení je zde probíráno v patnácti kapitolách. Rychlost i zrychlení jsou definovány jako skaláry, i když později je zdůrazněn jejich vektorový charakter. V této učebnici je text nevhodně rozdroben do mnoha kapitol, jejichž návaznost není vždy logická. Některé definice a následné komentáře si odporují. I tato učebnice obsahuje příklady k procvičování.

Z typografického hlediska je text členěn do odstavců, ovšem s přehnaným počtem kapitol. Pro zvýraznění důležitých pasáží textu je použito tučné kurzívy. Text je doplněn obrázky, grafy a tabulkami, které pomáhají studentům při pochopení látky.

Zavedení pojmu přímočarý resp. křivočarý pohyb

Tyto pojmy autoři nezavádí.

Zavedení pojmu rovnoměrný pohyb

> *Pohyb se stálou rychlostí se nazývá rovnoměrný. Pohyb, při kterém těleso mění svou rychlost, nazýváme nerovnoměrný.*

Pohyby jsou tříděny na rovnoměrný a nerovnoměrný podle rychlosti ještě dříve, než byla tato veličina definována. Taková klasifikace se opírá pouze o intuitivní pochopení pojmu rychlost. Navíc je chybná proto, že nepočítá s vektorovým charakterem rychlosti. Při křivočarém rovnoměrném pohybu se totiž rychlost rovněž mění.
Následuje snaha o zpřesnění pojmu rovnoměrný pohyb:

> Přesněji definujeme *rovnoměrný pohyb* jako pohyb, při kterém *hmotný bod ve stejných časových úsecích urazí stejně veliké dráhy.*

Zavedení pojmu rychlost

> *Rychlost rovnoměrného pohybu měříme délkou dráhy vykonanou za časovou jednotku.* Označíme-li v rychlost pohybu s velikost dráhy a t dobu, za kterou byla vykonána, pak je rychlost
>
> $$v = \frac{s}{t}$$
>
> Chceme-li přesně stanovit rychlost, musíme udat nejen její *velikost* v jednotkách rychlosti, nýbrž i její *směr*. Je důležité si zejména uvědomit, že rychlosti stejné velikosti považujeme za různé, i když mají různý pouze směr. Rychlost jako vektor značíme $\vec{v}$, kdežto v znamená její velikost bez ohledu na směr.

Zde je vidět, jak problematické je zavádění rychlosti. Autoři v první definici mluví o v jako o rychlosti, ale v dalším textu již "upřesňují", že symbol v představuje velikost rychlosti. Ve skutečnosti nejde o žádné zpřesnění, nýbrž o zpochybnění předchozí definice rovnoměrného a nerovnoměrného pohybu.

Znovu zavádí pojem nerovnoměrný pohyb.

> *Pohyb, jehož rychlost není stálá, nazýváme nerovnoměrný.* Jinak můžeme říci, že *nerovnoměrný pohyb koná hmotný bod nebo těleso tenkrát, jestliže ve stejných, ale jinak libovolně zvolených časových úsecích urazí nestejné dráhy.*

Autoři opět zapomněli na skutečnost, že v bezprostředně předchozím textu začali rozlišovat mezi vektorovou veličinou $\vec{v}$ a skalární v. V definici měli použít pojem velikost rychlosti.

Zavedení průměrné rychlosti

> Průměrná rychlost je rychlost rovnoměrného pohybu, při němž se tentýž úsek dráhy vykoná za stejnou dobu jako při pohybu nerovnoměrém.

Okamžitá rychlost

> *Okamžitou rychlostí nerovnoměrného pohybu nazýváme takovou rychlost, se kterou by se těleso pohybovalo, kdyby od daného okamžiku byl jeho pohyb rovnoměrný.*

Taková definice není vhodná, neboť je založena na fiktivní situaci (obsahuje kondicionál "...kdyby od daného okamžiku byl pohyb rovnoměrný...").

Pojem rovnoměrně zrychlený pohyb a zrychlení

> *Rovnoměrně zrychlený pohyb je pohyb, při krerém se rychlost v libovolných stejných časových intervalech změní o stejné hodnoty.* Pro tento pohyb je definováno zrychlení. *Zrychlení* rovnoměrně zrychleného pohybu stanovíme, když vypočítáme, oč se *změní rychlost za jednu vteřinu.* Jestliže se počáteční rychlost v_0 změnila za t vteřin v rychlost v, pak zrychlení, které označíme a, je
>
> $$a = \frac{v - vo}{t}.$$
>
> *Zrychlení* je stejně jako rychlost *vektor*, neboť se měří změnou vektoru rychlosti za 1 vteřinu.

Autoři opět nerozlišují rychlost $\vec{v}$ a její velikost v. Definice tak mohou být pro studenty matoucí.

Okamžité a průměrné zrychlení

O těchto pojmech se v učebnici vůbec nehovoří, neboť z nerovnoměrných pohybů je diskutován pouze pohyb rovnoměrně zrychlený.

1.1.7 Učebnice [8] z roku 1961

Téma rychlosti a zrychlení je zde probíráno ve dvou kapitolách – *Rovnoměrný pohyb a Rovnoměrně zrychlený pohyb*. Tyto kapitoly jsou dále členěny na podkapitoly. Rychlost i zrychlení jsou definovány jako skaláry, o vektorech se autoři nezmiňují. Definici okamžité rychlosti obcházejí a okamžité zrychlení zde není definováno vůbec. Také v této učebnici najdeme úlohy k procvičení.

Z typografického hlediska je učebnice velmi podobná současným, text je přehledně členěn a důležité pojmy jsou zvýrazněny tučným písmem. Poprvé jsou fyzikální vztahy ohraničeny rámečkem, což přispívá k lepší orientaci v textu a celkové přehlednosti učebnice. Výklad je doprovázen řadou názorných obrázků a tabulek, které pomáhají při pochopení látky. Na škodu však může být absence grafů, které by jistě napomohly k získání lepší představy o časových závislostech a pomohly tak studentům sžívat se s pojmem funkce.

Zavedení pojmu přímočarý resp. křivočarý pohyb

Tyto pojmy zde nejsou přímo definovány, jsou však dokumentovány příkladem popisujícím pohyby při házení kuličky.

Zavedení pojmu rovnoměrný pohyb

> Jestliže těleso vykoná ve stejných, ale jinak libovolných dobách vždy stejnou dráhu, nazývá se jeho **pohyb rovnoměrný. Rovnoměrný pohyb se děje rychlostí, která má konstantní velikost.** Označíme-li rychlost písmenem v, můžeme tento **zákon rychlosti rovnoměrného pohybu** napsat rovnicí:
>
> $$v = konst.$$

Opět vidíme již obvyklý rozpor, kdy autoři hovoří nejprve o konstantní velikosti rychlosti, ale v další větě již uvádějí, že konstantní je rychlost. Je to také jediná zmínka narážející na skutečnost, že rychlost má velikost. Poté, co pomocí pojmu rychlost zavádějí rovnoměrný pohyb, uvádí definici rychlosti rovnoměrného pohybu a zavádí ji jako skalár. Nazývat definici zákonem ("zákon rychlosti") je nevhodné. Definice rovnoměrného pohybu (obecně křivočarého) pomocí drah uražených ve stejně velkých časových intervalech umístěných na časové ose libovolně, je korektní. Na druhé straně její pochopení vyžaduje formulaci dobře promyslet. Není-li dokumentována experimentem nebo alespoň příklady, zůstává na tak abstraktní úrovni, že je prakticky nepoužitelná.

Zavedení pojmu rychlost

> Rychlost se tedy vypočítá jako podíl dráhy a času. **Rychlost rovnu jednotce má těleso, které rovnoměrným pohybem urazí za 1 sekundu dráhu 1 m.**

Zavedení průměrné rychlosti

S využitím příkladu jedoucího vlaku dospívají autoři k pojmu průměrná rychlost.

> *Průměrná rychlost je ta rychlost, kterou by vlak ujel touž dráhu za stejný čas, kdyby jel rovnoměrně.*
>
> *Mění-li se rychlost pohybu, nazývá se pohyb nerovnoměrný.*

Rychlost je opět zaměňována s velikostí rychlosti.

Okamžitá rychlost

> **Okamžitá rychlost tělesa v určitém okamžiku je rychlost, kterou by se těleso pohybovalo, kdyby od toho okamžiku byl jeho pohyb rovnoměrný.**

Autoři tento pojem zavádí stejným způsobem jako v předchozí učebnici.

Pojem rovnoměrně zrychlený pohyb a zrychlení

Na pokusu s vozíčkem, který je tažen závažím, je zde odvozena závislost okamžité rychlosti na čase pro rovnoměrně zrychlený pohyb.

> **Okamžitá rychlost pohybu rovnoměrně zrychleného je přímo úměrná času. Přírůstek rychlosti za sekundu nazýváme zrychlení** rovnoměrně zrychleného pohybu. Zrychlení se značí písmenem a. Zákon rychlosti rovnoměrně zrychleného pohybu můžeme napsat ve tvaru rovnice:
>
> $$v = a.t$$
>
> Zrychlení pohybu rovnoměrně zrychleného je stálé.

O kinematickém vztahu představujícím časovou závislost velikosti rychlosti rovnoměrně zrychleného pohybu není vhodné mluvit jako *zákonu*.

Okamžité a průměrné zrychlení

O těchto pojmech se autoři v učebnici nezmiňují.

1.1.8 Učebnice [9] z roku 1968

Téma rychlosti a zrychlení je zařazeno do kapitoly *Základy kinematiky*, která se dále člení do sedmi odstavců. Pomocí příkladů pádu resp. vrhání kuličky dělí autoři pohyb na přímočarý a křivočarý. V dalším výkladu však vycházejí pouze z pohybu přímočarého. Rychlost i zrychlení definují jako skaláry, ale dodávají, že jde o vektorové fyzikální veličiny. K pojmu okamžitá rychlost dochází na příkladu jedoucího automobilu, o okamžitém zrychlení se vůbec nezmiňují. Text obsahuje úlohy k samostatnému procvičování.

Z typografického hlediska je text přehledně členěn za použití vertikálního odsazení, dokonce jsou použity popisky po stranách, které umožňují studentům lepší orientaci v textu. Výklad látky je doprovázen velkým množstvím názorných obrázků s popisky a grafy některých kinematických veličin v závislosti na čase. Pro zvýraznění důležitých úseků textu je použito především tučného písma. Definice nejsou odlišeny od běžného textu.

Zavedení pojmu přímočarý resp. křivočarý pohyb

> **Podle tvaru dráhy rozeznáváme pohyby přímočaré a křivočaré**

Odlišnost přímočarého a křivočarého pohybu je objasněna pomocí obrázku.

> Ale pohyb bodu může být různý také podle toho, zda se bod pohybuje proměnnou nebo stálou rychlostí..

Autoři charakterizují pohyb pomocí veličiny, kterou zatím nedefinovali.

Zavedení pojmu rovnoměrný pohyb

> **Rovnoměrným nazýváme pohyb, při němž těleso v libovolných, ale stejných časových intervalech urazí stejné dráhy.**

Zavedení pojmu rychlost

> Rychlost různých rovnoměrných pohybů můžeme srovnávat co do velikosti, známe-li např. dráhy, které se vykonají za 1 s. Jestliže těleso urazí za čas t dráhu s, pak rychlost je určena podílem
>
> $$v = s/t$$

Nejprve mluví o velikosti rychlosti a poté již jen o rychlosti. V další podkapitole *Vektory a skaláry* se dočteme:

> Rychlost je určena, je-li kromě velikosti a jednotky udán ještě směr. Vektory označujeme polotučnými písmeny, např. **v** (rychlost) ... Velikost vektoru značíme obyčejnými písmeny v.

Zde je zřejmý rozpor s definicí, ve které autoři rychlost zavádí.

Zavedení průměrné rychlosti

> Průměrnou rychlost $\overline{v}$ v nerovnoměrného pohybu v určitém úseku dráhy určíme jako podíl vykonané dráhy Δs a příslušného časového intervalu
>
> $$\Delta t : \overline{v} = \Delta s/\Delta t.$$
>
> **... průměrná rychlost nerovnoměrného pohybu je rychlost, při které by těleso urazilo touž dráhu za tentýž čas, kdyby se pohybovalo rovnoměrně.**

Grafická úprava vztahu je nevhodná a matoucí. Symbol ":" v matematických vztazích obvykle znamená operaci dělení, zde však jde evidentně o dvojtečku.

Okamžitá rychlost

Pojem okamžité rychlosti je vyložen na příkladu nerovnoměrně jedoucího automobilu. Pro klesající posloupnost časových intervalů je proveden výpočet průměrné rychlosti a sleduje se její chod k limitní hodnotě. Tento způsob výkladu je správný a pro studenty pochopitelný. *Chybí však zdůraznění, že jde o pohyb jednorozměrný.*

> ... Nakonec naše přístroje nebudou schopny změnu rychlosti vůbec zjistit. Pohyb bude v tak krátkých časových intervalech prakticky rovnoměrný a rychlost tohoto rovnoměrného pohybu bude možno považovat za okamžitou rychlost nerovnoměrného pohybu v daném bodě dráhy.

Ve snaze přiblížit správně zavedený pojem okamžité rychlosti autoři studenty znovu matou:

> *Okamžitou rychlost automobilu ukazuje přístroj, nazvaný tachometr. ... Okamžitá rychlost je vektor, neboť je určena velikostí a směrem.*

V těchto dvou větách, které následují téměř po sobě, si autoři odporují. Tachometr neukazuje okamžitou rychlost, ale její velikost.

Pojem rovnoměrně zrychlený pohyb a zrychlení

> **Rychlost rovnoměrně zrychleného pohybu je přímo úměrná času**, tj. platí vztah
>
> $$v = a.t$$
>
> **Zrychlení a u pohybu rovnoměrně zrychleného je číselně rovno přírůstku rychlosti za 1 s a je konstantní:**
>
> $$a = konst.$$
>
> Zrychlení je vektorová veličina, neboť je určena velikostí, směrem a orientací.

Nejprve je zrychlení definováno jako skalár a teprve pak následuje upozornění na jeho vektorový charakter.

Okamžité a průměrné zrychlení

O této problematice se autoři nezmiňují vůbec.

1.2 Učebnice z let 1984 a 2001

Rozboru učebnic z tohoto období se věnuji podrobněji vzhledem k tomu, že jsou stále užívány při výuce fyziky na gymnáziích. Struktura a grafická úprava rozboru jsou stejné jako v odstavci 2.1.

1.2.1 Učebnice [10] z roku 1984

Téma rychlosti a zrychlení je zařazeno do kapitoly *Kinematika hmotného bodu*, kde je probíráno v několika odstavcích:

- Rovnoměrné a nerovnoměrné pohyby
- Pohyb rovnoměrný, pohyb rovnoměrný přímočarý
- Rychlost rovnoměrně zrychleného pohybu
- Zrychlení rovnoměrně zrychleného přímočarého pohybu
- Rovnoměrný pohyb hmotného bodu po kružnici
- Dostředivé zrychlení

Úvodní pasáže jsou věnovány opakování poznatků o pohybu ze základní školy. V dalším textu autoři znovu tyto poznatky a vztahy prezentují. Úvodní část se mi jeví jako zbytečná. Zvláštností učebnice je pořadí, v jakém jsou jednotlivé pojmy budovány. Nejdříve se autoři vždy zabývají velikostí vektorové veličiny a teprve potom definují veličinu samotnou. Rychlost rovnoměrného pohybu a průměrnou rychlost definují jako skaláry, okamžitou rychlost a zrychlení jako vektory. Okamžité zrychlení nezavádí vůbec. Další věcí, která se dá této učebnici vytknout, je chybějící stať o obecném křivočarém pohybu. Zpočátku je sice pohyb rozdělen na přímočarý a křivočarý, později se s touto klasifikací již nepracuje. Až v závěrečných odstavcích je popisován speciální případ křivočarého pohybu – pohyb po kružnici. Výklad pojmů, které mají být zavedeny obecně, je veden pro přímočarý pohyb, tj. pro speciální situaci. V závěru jsou však aplikovány na situaci obecnější, pohyb po kružnici. Poprvé se setkáváme se závěrečným shrnutím kapitoly, které je přehledně zpracováno formou tabulky.

Z typografického hlediska není učebnici možno takřka nic vytknout. Text je přehledně členěn do odstavců, důležité části jsou zvýrazněny tučným písmem. Orámování vztahů usnadňuje sice čtenářovu orientaci, na druhé straně však může vzbudit nežádoucí dojem jejich stejné důležitosti (zarámovány jsou jak vztahy vyjadřující klíčové fyzikální zákony, tak i v podstatě okrajové "vzorečky"). Výklad je doprovázen množstvím přehledných a názorných nákresů, obrázků a grafů.

Rovnoměrné a nerovnoměrné pohyby

Nejdříve autoři připomínají definici rovnoměrného a nerovnoměrného pohybu známou ze základních škol.

> **Rovnoměrným pohybem nazýváme takový pohyb, při němž hmotný bod urazí v libovolných, ale stejných dobách stejné dráhy. V ostatních případech je pohyb nerovnoměrný.**

Jsou uvedeny známé vztahy pro dráhu a rychlost rovnoměrného pohybu a velikost průměrné rychlosti nerovnoměrného pohybu.

$$s = vt, v = \frac{s}{t}$$

$$v_p = \frac{s}{t}$$

Rychlost, průměrná i okamžitá, jsou definovány jako skaláry. V této kapitole se však na druhé straně setkáváme s pojmem velikost okamžité rychlosti.

Protože jde o pohyb rovnoměrný, musí platit

$$v = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Podle uvedeného vztahu dovedeme určit velikost rychlosti rovnoměrného pohybu v kterémkoli okamžiku, dovedeme tedy určit velikost okamžité rychlosti rovnoměrného pohybu. Velikost okamžité rychlosti rovnoměrného pohybu je rovna velikosti rychlosti daného rovnoměrného pohybu.

Autoři nejprve hovoří o velikosti okamžité rychlosti, aniž by před tím zavedli a objasnili samotný pojem okamžitá rychlost. Navíc je předchozí citovaný text hutný a téměř nesrozumitelný. Ve dvou větách se použijí slovní spojení "velikost rychlosti rovnoměrného pohybu v kterémkoli okamžiku", "velikost okamžité rychlosti rovnoměrného pohybu", "velikost rychlosti daného rovnoměrného pohybu". S ohledem na fakt, že všechny "rychlosti" byly definovány jako skaláry, je lpění na slově "velikost" poněkud paradoxní.

Pohyb rovnoměrný, pohyb rovnoměrný přímočarý

Veličina **okamžitá rychlost** je určena nejen svou velikostí, ale i směrem.**Okamžitá rychlost je vektorová veličina.**

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{d}}{\Delta t}$$

Okamžitá rychlost (vektor okamžité rychlosti) pohybu rovnoměrného přímočarého je určena poměrem posunutí a odpovídající doby, v níž posunutí nastalo.

Poprvé se objevuje pojem *posunutí*, který má při korektním zavádění pojmu rychlost důležitý význam. Bohužel jsou úvahy omezeny jen na pohyb rovnoměrný přímočarý a pojem posunutí není využit pro zobecnění definice rychlosti.

Rychlost rovnoměrně zrychleného pohybu

> **Okamžitá rychlost hmotného bodu v určitém okamžiku je rychlost, kterou by se hmotný bod pohyboval, kdyby od toho okamžiku byl jeho pohyb rovnoměrný přímočarý.**

V případě, že se hmotný bod pohybuje přímočaře, je směr okamžité rychlosti zřejmý, ale u pohybů křivočarých tomu tak být nemusí. Bylo by proto dobré říci, že okamžitá rychlost má směr tečny k trajektorii.

Dále jsou uvedeny vztahy pro velikost okamžité rychlosti, které jsou odvozeny z experimentu.

$$v = at$$

Autoři zavádějí velikost zrychlení, aniž zavedli zrychlení samotné jako novou fyzikální veličinu.

$$v = v_0 + at$$

> Pohyb, pro který platí, že velikost jeho okamžité rychlosti je rostoucí lineární funkcí času, nazývá se **rovnoměrně zrychlený pohyb.**

Nejprve jsou z experimentu odvozeny vztahy a teprve potom autoři pojmenovávají pohyb, pro který tyto vztahy platí. Možná by bylo pro studenty lepší, aby se již na začátku kapitoly dověděli, k čemu bude výklad směřovat.

Zrychlení rovnoměrně zrychleného přímočarého pohybu

$$\mathbf{a} = \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t}$$

> **Zrychlení přímočarého pohybu rovnoměrně zrychleného je určeno podílem změny okamžité rychlosti a odpovídající doby, během níž tato změna nastala.** Je to vektor mající stejný směr jako změna rychlosti.

Tato definice je v pořádku. Objevují se zde také vztahy pro rychlost rovnoměrně zrychleného pohybu.

$$\mathbf{v} = v_0 + \mathbf{a}t$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{a}t$$

V předchozí kapitole byly uvedeny odpovídající vztahy pro velikost rychlosti. Na tuto souvislost autoři neupozorňují.

Rovnoměrný pohyb hmotného bodu po kružnici

Autoři zavádí orientovaný úhel a definují rovnoměrný pohyb po kružnici.

> **Rovnoměrný pohyb po kružnici koná hmotný bod, jestliže ve stejných libovolně zvolených dobách opíše stejně dlouhé oblouky kružnice Δs, kterým přísluší také stejné velikosti úhlů $\Delta\varphi$.**

Pro tento konkrétní pohyb autoři znovu zavádí velikost rychlosti hmotného bodu.

> Pro velikost rychlosti hmotného bodu platí
>
> $$v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$
>
> a tato velikost rychlosti je při rovnoměrném pohybu po kružnici stálá.

Dále diskutují o změnách směru rychlosti pohybu hmotného bodu po kružnici a shrnují vlastnosti vektoru rychlosti.

> ... **okamžitá rychlost pohybu hmotného bodu v má směr tečny v příslušném bodě trajektorie.** Okamžitá rychlost u pohybu po kružnici je kolmá ke směru poloměru v daném místě. **Při rovnoměrném pohybu hmotného bodu po kružnici má okamžitá rychlost stálou velikost, ale mění se její směr.**

Velikost rychlosti je dále vyjádřena pomocí periody neboli doby oběhu T a frekvence f.

$$v = \frac{2\pi r}{T} = 2\pi r f$$

Následuje definice velikosti úhlu.

> Velikost úhlu je určena poměrem délky oblouku kružnice s a poloměrem r téže kružnice
>
> $$\varphi = \frac{s}{r}$$
>
> Úhlová rychlost rovnoměrného pohybu po kružnici je určena poměrem velikosti úhlu a doby, za níž hmotný bod tento úhel opsal,
>
> $$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}.$$

I úhlová rychlost je vektorová fyzikální veličina, proto by měla být zavedena pomocí orientovaného úhlu a měl by být definován její směr. Veličina, kterou autoři nayývají úhlovou rychlostí, je tak ve skutečnosti velikostí úhlové rychlosti. Autoři neupozorňují na jednotku úhlu v obloukové míře. Na závěr výkladu je uvedena souvislost mezi velikostí okamžité rychlosti hmotného bodu a velikostí jeho úhlové rychlosti.

$$v = \frac{2\pi r}{T} = \omega r$$

V řešeném příkladu se v zadání autoři dopouštějí chyby, kdy zadávají rychlost družice, ačkoli se jedná o velikost rychlosti. Jde o paradoxní situaci, neboť v celé části, týkající se pohybu po kružnici, se autoři striktně drží správného pojmenování fyzikálních veličin – rychlost a velikost rychlosti.

Pozn.: Bylo by jistě možné zkracovat používané formulace tím, že bychom v případech, kde je směr rychlosti buď stálý (pohyb přímočarý) nebo v každém okamžiku zřejmý (rovnoměrný pohyb po kružnici), používali slova "rychlost" namísto slovního spojení "velikost rychlosti", například "...automobil jede po rovném úseku silnice rychlostí 70 km/h...". Taková dohoda by však musela být předem jasně vysvětlena a zdůvodněna. Zaměňování "rychlosti" a "velikosti rychlosti" v textu, kde jsou tyto pojmy zaváděny způsobem, který lze právem podrobit kritice, by však taková dohoda nejspíše způsobila ještě větší zmatek.

V úloze číslo 2, určené k samostatnému procvičení látky, se autoři žáků dotazují na velikost úhlové rychlosti, ačkoli se o této veličině ve výkladu samotném nezmiňují.

Dostředivé zrychlení

V této části autoři odvozují správným způsobem vztah pro velikost dostředivého zrychlení a dochází k následujícímu závěru

$$a_d = \frac{v^2}{r} = v\omega$$

...**Vektor dostředivého zrychlení při pohybu hmotného bodu po kružnici je kolmý k vektoru okamžité rychlosti, má směr do středu kružnicové trajektorie.**

1.2.2 Současná učebnice mechaniky

Učebnice Mechanika, která patří do nejnovější řady učebnic s názvem *Fyziky pro gymnázia*, byla vydána celkem třikrát. Poprvé v roce 1993, poté následovalo druhé vydání v roce 1997 a konečně poslední třetí v roce 2001. V případě prvního a druhého vydání se jedná o shodný text, třetí vydání se již liší. Proto jsem se v rozboru zabývala pouze prvním a třetím vydáním.

Vydání [11] z roku 1993 (1997)

Téma rychlosti a zrychlení je zařazeno do kapitoly *Kinematika hmotného bodu* v odstavcích

- Rychlost hmotného bodu
- Rovnoměrný pohyb
- Zrychlení hmotného bodu
- Rovnoměrně zrychlený přímočarý pohyb
- Rovnoměrný pohyb po kružnici
- Zrychlení při pohybu po kružnici

V úvodu kapitoly autoři rozdělují pohyby na přímočaré a křivočaré, další výklad je však obecný. Postupují deduktivně, nejdříve zavádějí okamžitou rychlost a charakterizují její velikost, definici aplikují na speciální druh pohybu – rovnoměrný pohyb. Dále obecně zavádějí okamžité zrychlení a charakterizují jeho velikost. Poté se opět věnují rozboru konkrétního případu, tentokrát pohybu rovnoměrně zrychleného přímočarého. Okamžitá rychlost i okamžité zrychlení jsou zde definovány jako vektory. Autoři také připomínají vztah ze základní školy, který se týká průměrné rychlosti, jíž definují jako skalár. Každý odstavec obsahuje úlohy určené k samostatnému procvičování, všechny úlohy jsou uvedeny s výsledky. V některých odstavcích jsou vzorově vyřešené příklady. Kapitola je uzavřena shrnutím. Oproti předchozí učebnice se již nejedná o tabulku, ale o souvislý text proložený důležitými vztahy.

Z typografického hlediska nelze této učebnici, stejně jako předchozí, mnoho vytknout. Jedná se totiž z hlediska typografie o velice podobnou učebnici. Text je dobře vertikálně členěn, důležité definice i vztahy jsou zřetelně orámovány. Zvýraznění textu je opět provedeno pomocí tučného písma, výklad je doprovázen množstvím grafů, nákresů a názorných příkladů, z nichž některé obsahují i obrázky. Novinkou je odlišení rozšiřujícího učiva, které je vysázeno zmenšeným písmem – petitem. Jediné, co se mi na grafické úpravě učebnice nelíbilo, je nepřehledná úprava matematického řešení některých příkladů.

Rychlost hmotného bodu

Pomocí změn polohového vektoru definují autoři okamžitou rychlost.

Okamžitá rychlost v hmotného bodu v čase t, kdy je hmotný bod v bodě A, je dána podílem

$$\mathbf{v} = \frac{\Delta r}{\Delta t},$$

přičemž předpokládáme, že Δt je velmi malé.

Na formulaci je patrná snaha o korektnost, na druhé straně je jejím cílem snadno se vyhnout nevyhnutelnému, tj. pojmu derivace. Studenti nemají představu, co znamená z matematického či z fyzikálního hlediska slovní spojení *velmi malé*. Pokud není definice doložena názornými příklady, je bezcenná.

Okamžitá rychlost hmotného bodu je vektorová fyzikální veličina, která má vždy směr tečny k trajektorii hmotného bodu a je orientována ve směru změny polohového vektoru.

Zde autoři použili stejné značení jako v případě předchozí definice, a tak není pro studenty lehké rozeznat, co je ještě definice a co tvrzení.

Velikost okamžité rychlosti je dána podílem velikosti změny polohového vektoru a příslušného časového intervalu:

$$|\mathbf{v}| = v = \frac{|\Delta r|}{\Delta t}$$

V následujícím textu autoři vycházejí z pojmu *průměrná rychlost*, který byl jako skalární veličina zaveden základní škole.

Průměrná rychlost v_p je skalární fyzikální veličina, která je dána podílem dráhy s a doby t, za kterou hmotný bod urazí tuto dráhu,

$$v_p = \frac{s}{t}.$$

Na příkladu rozjíždějícího se automobilu, který je doprovázen grafem závislosti dráhy na čase, autoři znovu dospívají k pojmu velikost okamžité rychlosti. Na tomto grafu lépe vidět, co si lze představit pod pojmem "velmi malý".

Velikost okamžité rychlosti v daném bodě trajektorie a v daném čase je definována jako průměrná rychlost ve velmi malém časovém intervalu na velmi malém úseku trajektorie.

Autoři zde opět používají stejné značení jako pro základní definice. Uvedení předchozí formulace jako definice velikosti okamžité rychlosti je problematické. Okamžitá rychlost již byla definována jako vektor, takže její velikost je již dřívější definicí jednoznačně dána. Formulace je tedy nikoli definicí, ale tvrzením. Vzhledem k nevhodné definici průměrné rychlosti je však uvádění takového tvrzení spíše škodlivé.

Podle toho, zda se během pohybu nemění nebo mění velikost okamžité rychlosti dělíme pohyby na rovnoměrné a nerovnoměrné.

Rovnoměrný pohyb

Pro tento speciální případ pohybu uvádí autoři vztah pro velikost okamžité rychlosti.

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s - s_0}{t - t_0}$$

V následujícím ukázkovém příkladu se autoři dopouštějí nepřesnosti.

Chlapec jde ze školy rychlostí 1 m·s^{-1}.

Ačkoli se autoři ve výkladu drží striktně správné fyzikální terminologie, dopustili se v tomto příkladu chyby, neboť se jedná o velikost rychlosti. (Viz též poznámka k terminologii "rychlost" versus "velikost rychlosti" v hodnocení učebnice [10].)

Zrychlení hmotného bodu

Okamžité zrychlení a hmotného bodu v čase t, kdy je hmotný bod v bodě A, je dáno podílem

$$\mathbf{a} = \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t},$$

přičemž doba Δt je velmi malá.

Velikost okamžitého zrychlení je dána podílem velikosti změny rychlosti a příslušné doby

$$|\mathbf{a}| = a = \frac{|\Delta \mathbf{v}|}{\Delta t},$$

přičemž doba Δt je velmi malá.

V tomto odstavci se autoři nedopustili žádných nových chyb. Je však nutné znovu konstatovat, že definice vektorové veličiny v sobě obsahuje i informaci o její velikosti. Definovat velikost znovu, jako to autoři činí u rychlosti i zrychlení, je tak nejen nadbytečné, ale především matoucí.

Rovnoměrně zrychlený přímočarý pohyb

V tomto odstavci se poprvé objevuje pojem průměrné zrychlení. Děje se tak v rozšiřující části učiva. Autoři k němu dospívají použitím vztahu pro velikost zrychlení v libovolném okamžiku. Tuto velikost nazvou zrychlením průměrným. Drží se tak své staré chyby, průměrné veličiny definují jako skaláry. Navíc je poněkud nesmyslné definovat průměrnou veličinu pro případ, kdy veličina sama je kostantní (zrychlení rovnoměrně zrychleného přímočarého pohybu je konstantní vektor).

V dalším textu autoři rozdělují pohyby na rovnoměrně zrychlené a rovnoměrně zpomalené. Pro tyto pohyby konkretizují vztahy pro velikost okamžité rychlosti. Podle mého názoru tím věc jen komplikují a stírají význam vektorového charakteru veličin.

Velikost okamžité rychlosti hmotného bodu je při nulové počáteční rychlosti přímo úměrná času, platí tedy vztah

$$v = at$$

Velikost rychlosti hmotného bodu, který koná rovnoměrně zrychlený pohyb s počáteční rychlostí v_0 a se zrychlením o velikosti a, závisí na čase vztahem

$$v = v_0 + at$$

Velikost rychlosti hmotného bodu, který koná rovnoměrně zpomalený pohyb s počáteční rychlostí v_0 a se zrychlením o velikosti a, závisí na čase vztahem

$$v = v_0 - at$$

Každý z těchto vztahů doprovází graf závislosti rychlosti na čase, který studentům usnadňuje jeho pochopení.

Rovnoměrný pohyb po kružnici

Autoři nejprve definují velikost úhlu.

Velikost úhlu je určena poměrem délky oblouku kružnice s a poloměru r téže kružnice,

$$\varphi = \frac{s}{r}$$

Dále zavádí úhlovou rychlost ω.

Úhlová rychlost je podíl velikosti úhlu $\Delta\varphi$, který opíše polohový vektor za dobu Δt, a této doby. Platí tedy vztah

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}.$$

Stejně jako v předchozí učebnici definují autoři úhlovou rychlost jako skalární veličinu. Děje se tak pomocí velikosti úhlu namísto úhlu orientovaného, jehož zavedení v učebnici chybí. Po definici následuje doplňující text psaný petitem, který studenty upozorňuje na vektorový charakter úhlové rychlosti.

Úhlová rychlost je vektorová fyzikální veličina. Vektor ω je kolmý k rovině kružnice, po níž se pohybuje hmotný bod, a umísťujeme jej do středu kružnice. Směr úhlové rychlosti určíme pomocí pravidla pravé ruky ... Při rovnoměrném pohybu po kružnici je úhlová rychlost konstatní, nemění se její směr ani velikost.

Je škoda, že autoři tento text považují za doplňující, což je zřejmé z použitého vyznačení. Text odstavce není navíc v souladu s předcházející definicí úhlové rychlosti.

Nakonec uvádějí autoři vztahy pro výpočet velikosti úhlové rychlosti pomocí frekvence f a periody (oběžné doby) T. Na konci výkladu je zde stejně jako v předchozím vydání uveden vztah mezi velikostí rychlost hmotného bodu a jeho úhlové rychlosti.

Zrychlení při pohybu po kružnici

Autoři využívají již dříve zavedeného rozkladu zrychlení na složky a charakterizují hodnoty těchto složek pro pohyb po kužnici.

> Z konstantní velikosti rychlosti vyplývá, že tečné zrychlení hmotného bodu je nulové, $a_t = 0$. Hmotný bod má však **normálové zrychlení** a_n, které vyjadřuje **změnu směru rychlosti**. Normálové zrychlení je vždy kolmé ke směru okamžité rychlosti. U pohybu po kružnici tedy stále směřuje do středu kružnice, po níž se hmotný bod pohybuje. Proto se nazývá také **dostředivé zrychlení** a označuje se a_d.

Dále pak korektně dospívají k vyjádření velikosti dostředivého zrychlení.

> **Pro velikost dostředivého zrychlení platí vztah**
>
> $$a_d = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r.$$

Vydání [12] z roku 2001

Podle [13] jsou učebnice této řady přepracovány na základě celorepublikové ankety, která proběhla v roce 1998. Podle hodnocení vydavatele jsou jednotlivé odstavce přepracovány tak, aby vyhovovaly připomínkám učitelů a zároveň odpovídaly změněným učebním osnovám z roku 1999. Jsou údajně aktualizovány z hlediska technického pokroku, berou v úvahu i zavádění norem EU.

Téma rychlosti a zrychlení je zařazeno do kapitoly *Kinematika hmotného bodu* v odstavcích

- Rychlost hmotného bodu
- Rovnoměrný pohyb
- Rovnoměrně zrychlený přímočarý pohyb
- Zrychlení při rovnoměrném pohybu po kružnici

V tomto vydání postupují autoři při zavádění nových fyzikálních veličin spíše induktivní metodou, což je změna oproti předcházejícím vydáním. Ve výkladu je pohyb nejprve rozdělen na přímočarý a křivočarý, ovšem křivočarému se už dále explicitně nevěnují. Průměrná rychlost je zde definována jako skalár oproti okamžité rychlosti, kterou definují jako vektor. Průměrné zrychlení definují jako skalár, ale okamžité zrychlení nezávádí vůbec. Komentáře k tomuto vydání jsou obdobné jako k vydáním předchozím.

Z typografického hlediska je toto vydání až na malé výjimky totožné se dvěma přechozími. Změny se týkají způsobu zvýraznění textu, kde je použita kromě tučného písma také kurzíva. Novinkou je použití druhé barvy, ke klasické černé barvě přistupuje modrá. Další změnou je opuštění zmenšeného písma pro rozšiřující výklad.

Rychlost hmotného bodu

Na příkladu z praxe přibližuje text pojem průměrná rychlost, který je poté zaveden následujícím způsobem.

Průměrná rychlost v_p je podíl dráhy s a času t, za který hmotný bod urazí tuto dráhu:

$$v_p = \frac{s}{t}$$

Autoři se zde dopouštějí chyby, když definují průměrnou rychlost jako skalár. V dalším textu se snaží pojem průměrné rychlosti "zpřesnit":

Průměrná rychlost na daném úseku trajektorie je dána vztahem

$$v_p = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Tento vztah je následován grafem, který zachycuje závislost dráhy na čase rozjíždějícího se automobilu. Na tomto grafu autoři přibližují, stejně jako v předchozích vydáních[7], studentům pojem velmi malá časová změna a docházejí tak k pojmu *velikost okamžité rychlosti*.

Velikost okamžité rychlosti v daném bodě trajektorie a v daném čase je definována jako průměrná rychlost ve velmi malém časovém intervalu na malém úseku trajektorie.

Definovat velikost okamžité rychlosti dříve než je zaveden samotný pojem okamžitá rychlost je z didaktického hlediska nevhodné. Totéž se týká i určování směru okamžité rychlosti.

Okamžitá rychlost má vždy směr tečny k trajektorii hmotného bodu v daném místě trajektorie.

Jestliže se při pohybu hmotného bodu **nemění velikost rychlosti**, je pohyb **rovnoměrný**, v ostatních případech je pohyb hmotného bodu **nerovnoměrný**.

[7] Jedná se o stejný graf.

U předchozích dvou formulací není zřejmé, zda je autoři mínili jako definice nebo tvrzení.

Stejně jako lze rozlišit pohyby podle změny či zachování velikosti rychlosti na rovnoměrné a nerovnoměrné, lze podle změny či zachování směru okamžité rychlosti rozlišit pohyby na přímočaré a křivočaré. Bylo by možná vhodné uvést i toto shrnutí klasifikace pohybů. Bez jakéhokoli upozornění uvádějí autoři definici okamžité rychlosti. Definice není ani nijak zvýrazněna ani oddělena od okolního textu.

Okamžitá rychlost **v** hmotného bodu v čase t, kdy je hmotný bod v bodě A, je dána podílem

$$\mathbf{v} = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}$$

přičemž předpokládáme, že doba Δt je velmi malá.

Rovnoměrný pohyb

Tuto část ponechali autoři oproti předchozímu vydání beze změny.

Rovnoměrný pohyb po kružnici

Autoři zavádějí pojem úhlové rychlosti pouze s nepatrnými rozdíly oproti přechozímu vydání. Proto se k této učebnici vztahují stejné postřehy a připomínky jako k učebnici předcházející. Nejdůležitějším rozdílem je absence petitem psaného doplňujícího textu, kde se autoři v předchozím vydání zmiňovali o vektorovém charakteru úhlové rychlosti.

Zrychlení při rovnoměrném pohybu po kružnici

V textu tohoto odstavce se autoři také příliš neodchýlili od přechozího vydání. Chybí však rozklad na tečné a normálové zrychlení, který byl přesunut do dalšího odstavce.

Zrychlení při nerovnoměrném křivočarém pohybu

Jedná se o nově přidaný odstavec, kde se autoři zabývají rozkladem na složky na tečné a normálové zrychlení.

Celkové zrychlení a hmotného bodu pak můžeme rozdělit na dvě navzájem kolmé složky: na **tečné zrychlení** a_t, které vyjadřuje **změnu velikosti rychlosti**, a **normálové zrychlení** a_n, které vyjadřuje **změnu směru rychlosti**.

Autoři diskutují jednotlivé složky pro nerovnoměrný pohyb.

1.3 Shrnutí výsledků rozboru

Tento odstavec představuje souhrn výsledků provedeného rozboru učebnic s poukazem na základní nedostatky, kterých se i tak zkušení učitelé fyziky, jakými autoři citovaných učebnic bezesporu byli či jsou, mohou dopustit při budování důležitých pojmů kinematiky. Již v úvodu tohoto shrnutí však lze uvést výrazný společný rys citovaných textů. Všechny bez výjimky totiž dokumentují, že definovat pojmy zdánlivě jednoduché a intuitivně známé, jakými jsou rychlost a zrychlení, je velmi obtížné. Žádnému z autorských kolektivů se to, podle mého názoru, nepodařilo tak, aby se tyto pojmy mohly stát pro studenty pochopitelnými a aby přitom byly definovány korektně. Pro přehlednější diskusi o chybách, kterých se autoři učebnic dopustili, uvádím v první části tohoto ostavce stručný přehled postupu, který pro definici pojmů *rychlost* a *zrychlení* považuji za vhodný. Přehled je podán na úrovni základního vysokoškolského kurzu obecné fyziky.

1.3.1 Vybudování pojmů rychlost a zrychlení

Obvyklý, a podle mého názoru i vhodný, postup při budování pojmů *rychlost* a *zrychlení* je následující:

polohový vektor hmotného bodu a *posunutí* v časovém intervalu $[t,\, t + \Delta t]$

$$\vec{r}(t), \quad \Delta\vec{r} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)$$

Vektorová funkce $t \longrightarrow \vec{r}(t)$ proměnné t definuje *parametrické vyjádření* křivky, po níž se hmotný bod pohybuje, tj. jeho *trajektorii*.

průměrná (střední) rychlost hmotného bodu v intervalu $[t,\, t + \Delta t]$

$$\langle\vec{v}\rangle_{[t,\, t+\Delta t]} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}$$

Je třeba zdůraznit, že průměrná rychlost se vztahuje k zadanému časovému intervalu a na příkladech (nejlépe s obrázky a experimenty) dokumentovat její závislost na volbě tohoto intervalu.

okamžitá rychlost hmotného bodu

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \langle\vec{v}\rangle_{[t,\, t+\Delta t]} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}(t)}{\mathrm{d}t}$$

Okamžitá rychlost je definována jako limita rychlosti průměrné pro $\Delta t \longrightarrow 0$, tedy derivace polohového vektoru.

průměrné (střední) zrychlení hmotného bodu v intervalu $[t,\, t + \Delta t]$

$$\langle\vec{a}\rangle_{[t,\, t+\Delta t]} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t}$$

Průměrné zrychlení se stejně jako průměrná rychlost vztahuje k zadanému časovému intervalu. Opět je vhodné uvést příklady. Pro názornost se často uvádí pojem *hodografu* pohybu (počáteční body vektorů okamžité rychlosti se ztotožní, aby bylo možno graficky konstruovat změny rychlosti).

okamžité zrychlení hmotného bodu

$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \langle \vec{a} \rangle_{[t,\, t+\Delta t]} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}(t)}{\mathrm{d}t}$$

Okamžité zrychlení je definováno jako limita zrychlení průměrného pro $\Delta t \to 0$, tedy derivace okamžité rychlosti a současně druhá derivace polohového vektoru.

Výše uvedené definice průměrné rychlosti a průměrného zrychlení jsou v souladu s matematickým pojmem ***střední hodnota*** funkce na intervalu. Nechť $\vec{v}(t)$ je spojitá vektorová funkce definovaná na intervalu $[t_1,\, t_2]$ obsahujícím interval $[t,\, t + \Delta t]$ jako derivace vektorové funkce $\vec{r}(t)$. Podle Lagrangeovy věty o střední hodnotě existuje v intervalu $[t,\, t + \Delta t]$ číslo t_0 takové, že platí

$$\vec{v}(t_0) = \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t} \int\limits_{t}^{t+\Delta t} \vec{v}(\tau)\, \mathrm{d}\tau.$$

Vektor $\vec{v}(t_0)$ nazýváme střední hodnotou vektorové funkce $\vec{v}(t)$ na intervalu $[t,\, t+\Delta t]$. Vidíme, že tento pojem splývá s "fyzikální" definicí průměrné (střední) rychlosti (poloha bodu t_0 není důležitá). Označíme-li velikost okamžité rychlosti $|\vec{v}(t)|$ jako $v(t)$, pomocí složek vektoru rychlosti je

$$v(t) = \sqrt{v_x(t)^2 + v_y(t)^2 + v_z(t)^2},$$

dostáváme průměrnou (střední) hodnotu velikosti rychlosti jako integrál

$$\langle v \rangle_{[t,t+\Delta t]} = \frac{1}{\Delta t} \int\limits_{t}^{t+\Delta t} v(\tau)\, \mathrm{d}\tau.$$

Je zřejmé, že průměrná hodnota velikosti rychlosti a velikost průměrné rychlosti jsou odlišné, neboť

$$\frac{1}{\Delta t} \left| \int\limits_{t}^{t+\Delta t} \vec{v}(\tau)\, \mathrm{d}\tau \right| \le \frac{1}{\Delta t} \int\limits_{t}^{t+\Delta t} |\vec{v}(\tau)|\, \mathrm{d}\tau.$$

(absolutní hodnota integrálu z vektorové funkce není obecně rovna integrálu z její absolutní hodnoty). Splynou teprve v limitě pro $\Delta t \to 0$. V případě zrychlení jsou úvahy o středních hodnotách zcela analogické. V následujícím odstavci se budeme na terminologii, rekapitulovanou v tomto odstavci, odvolávat.

1.3.2 Rychlost a zrychlení v učebnicích – souhrnné hodnocení

V žádné z hodnocených učebnic není pojem rychlosti zaveden uspokojivým způsobem. Nejčastěji se opakují tři "definice" okamžité rychlosti pro obecný pohyb:

1. Okamžitá rychlost jako skalár (učebnice [1] až [4]). Okamžitá rychlost je definována jako podíl dráhy Δs, kterou hmotný bod urazil za dobu Δt, jestliže volíme Δt "kratší a kratší" (viz [1]). Zatímco však autoři [1], autoři nezměněné verze [2] i autoři [4] doplňují text nezbytným kometářem, vystihujícím skutečnost, že pro "kratší a kratší" Δt spěje podíl $\Delta s/\Delta t$ k jisté limitní hodnotě, hovoří se v [3] nevhodně o "nekonečně krátkém intervalu časovém". Dodatečný komentář v těchto učebnicích konstatuje, že okamžitá rychlost "má směr, je tedy vektorem". Nedostatkem tohoto konstatování, nehledíme-li již k tomu, že o veličině, kterou jsme zavedli jako skalár, lze již těžko říci, že je to vektor, je skutečnost, že není řečeno, *o jaký* směr se jedná. V [1] je pouze uvedeno, a to ještě před definicí okamžité rychlosti, že "... směr křivočarého pohybu se mění a je v každém místě dráhy určen příslušnou tečnou".

2. Okamžitá rychlost jako rychlost rovnoměrného přímočarého pohybu (učebnice [7], [8], [10]). Nejprve je zaveden pojem rychlosti rovnoměrného přímočarého pohybu. Okamžitá rychlost obecného pohybu v daném okamžiku je poté definována jako rychlost rovnoměrného přímočarého pohybu, s jakou by se pohyboval hmotný bod, kdyby se od daného okamžiku pohyboval rovnoměrně přímočaře. Nevhodnost této "definice" založené na kondicionálu je zřejmá. Rychlost pohybu, kterou hmotný bod má v daném okamžiku, není vhodné definovat pomocí rychlosti, kterou by eventuelně měl v budoucnosti.

3. Okamžitá rychlost jako vektor pro "malé" Δt (učebnice [11], [12]). Okamžitá rychlost je definována od samého začátku jako vektor, který je podílem změny polohového vektoru v daném časovém intervalu a velikosti Δt tohoto intervalu, za předpokladu, "že Δt je velmi malé". Není však prezentován žádný příklad, který by osvětlil, co si mají studenti představovat pod pojmem "velmi malé". Definice je tak zcela bezobsažná a matoucí, neboť pro každou hodnotu Δt ve skutečnosti představuje průměrnou rychlost v intervalu $[t, \Delta t]$.

Průměrná rychlost je ve všech učebnicích ([1] až [12]), definována jako podíl dráhy s, kterou hmotný bod urazil za dobu t a této doby, tj. s/t, popřípadě $\Delta s/\Delta t$, tedy skalár. Zejména u učebnic [11] a [12] tak dochází k podstatně horšímu matení pojmů, než u učebnic starších. Rychlost s přívlastkem *okamžitá* je vektorem, rychlost s přívlastkem *průměrná* skalárem. Veličina, kterou autoři [11] a [12] nazývají *průměrnou rychlostí*, představuje ve skutečnosti *průměrnou (střední) hodnotu velikosti okamžité rychlosti v intervalu* $[t, \Delta t]$ (viz odstavec 1.3.1). Vzhledem k tomu, že uvedená chyba se opakuje ve všech posuzovaných učebnicích, domnívám se, že terminologie mohla vzniknout chybným překladem z angličtiny (average speed). Anglické *average speed* znamená *průměrnou velikost rychlosti* (speed=velikost rychlosti, skalár), zatímco jako *průměrná rychlost* by měl být přeložen termín *average velocity* (velocity=rychlost, vektor).

Problematika zrychlení se v učebnicích potýká se zcela obdobnými obtížemi. Vzhledem k tomu, že intuitivní představa o zrychlení je u studentů ještě horší než představa o rychlosti, je naděje, že studenti mohou pojem zrychlení z učebnic pochopit, velmi malá.

Závěrem si všimněme sledu "definic" uváděných při zavádění pojmu *rychlost* v nejnovější učebnici [12], která vlastní doložku MŠMT a má být považována, podle charakteristiky vydavatele, za "srovnatelnou s evropskými standardy".

- Průměrnou rychlostí v_p je podíl dráhy s a času t, za který hmotný bod urazí tuto dráhu: $v_p = s/t$.
- Průměrná rychlost na daném úseku trajektorie je dána vztahem $v_p = \Delta s/\Delta t$.
- Velikost okamžité rychlosti v daném bodě trajektorie je definována jako průměrná rychlost ve velmi malém časovém intervalu na malém úseku trajektorie.
- Okamžitá rychlost má vždy směr tečny k trajektorii hmotného bodu v daném místě trajektorie.
- Okamžitá rychlost $\vec{v}$ hmotného bodu v čase t, kdy je hmotný bod v bodě A, je dána podílem $\vec{v} = \Delta\vec{r}/\Delta t$.

Ponechme stranou diskusi o tom, co má být definicí (formulace "je definována" ??) a co tvrzením (formulace "je dána" ??) a vraťme se k první větě předmluvy: Lze se divit, že fyzika patří u studentů k méně oblíbeným předmětům?

Kapitola 2

Rychlost a zrychlení

Tato kapitola obsahuje návrh výkladu pojmů *rychlost* a *zrychlení*, který na jedné straně respektuje jejich obtížnost na gymnaziální úrovni, vyplývající z nedostatečného matematického zázemí studentů, na straně druhé odstraňuje nekorektnosti definic běžných v současné středoškolské učebnicové literatuře. Je založen především na motivačním rozboru příkladů a postupném vybudování pojmů.

2.1 Zásady zpracování návrhu

Středoškolská učebnice fyziky by měla být koncipována tak, aby mohla sloužit studentům jak k samostatnému studiu, tak jako doplněk učitelova výkladu. Učitelům pak jako osnova při přípravě výkladu a zdroj základních informací. (V žádném případě by však neměla být učebnice jediným zdrojem učitelovy přípravy na výuku.) Zvýšené nároky na odbornou a didaktickou úroveň učebnic fyziky klade kromě jiného i skutečnost, že se základní hodinová dotace výuky fyziky na středních školách snižuje. V současné době činí 2/2/2/0[1] při nesníženém objemu látky a neúměrných maturitních požadavcích (viz [14]). Za takové situace by měla učebnice nahradit i nedostatek času, který je možné věnovat přímé výuce, umožnit studentům prohloubit pochopení problematiky a zprostředkovat jim další informace. Základní požadavky na učebnici lze formulovat takto:

1. **Správnost fyzikálního výkladu.** Jakkoli se tento primární požadavek zdá samozřejmý, není vždy splněn. Za příklad dokumentující toto tvrzení lze považovat pasáže o rychlosti a zrychlení v dříve používaných i současných gymnaziálních učebnicích. Fyzikální nesprávnost a matematická nekorektnost textů elementární úrovně bývají často "zdůvodňovány", omlouvány či zastírány požadavkem "vhodného didaktického přístupu přiměřeného úrovni adresátů výkladu". Fyzikálně nesprávný výklad však nelze zdůvodnit, omluvit, ani zastřít. V učebnici fyziky jednoduše nemá místo.

2. **Srozumitelnost.** Látka má být v učebnici předkládána srozumitelně, jak z hlediska slovních formulací, tak z hlediska matematického aparátu, a způsobem odpovídajícím standardnímu výkladu učitele.

[1]počet hodin týdně v každém ročníku gymnázia

3. **Názornost.** Výklad má být provázen názornými obrázky, grafy a příklady, aby i méně fyzikálně nadaný student či student s nevyhraněným zájmem nebo dokonce i s nezájmem o fyziku mohl podstatné fyzikální zákonitosti a poznatky pochopit a použít při vysvětlení běžných fyzikálních jevů a řešení úloh.

4. **Nadstavba.** Učebnice by měla kromě standardního výkladu obsahovat také doplňky k probírané problematice, určené zejména nadanějším studentům a studentům s hlubším zájmem o fyziku.

5. **Úlohy k řešení.** Každá učebnice by měla obsahovat soubor příkladů k procvičení, včetně výsledků, sloužících studentům k ověření správnosti postupu.

6. **Přehlednost.** Učebnice by měla být graficky upravena tak, aby umožnila dobrou orientaci ve fyzikální problematice, odlišení základních fyzikálních principů a zákonů od jejich důsledků a doplňkových infromací.

Ve svém návrhu koncepce pasáží gymnaziální učebnice týkajících se zavádění pojmů *rychlost* a *zrychlení* se snažím těmto požadavkům dostát.

2.2 Problémy při zavádění rychlosti a zrychlení

Při zavádění rychlosti narážíme na dvě základní obtíže:

1. terminologie

2. nedostatečné matematické zázemí studentů

Rychlost je fyzikální veličinou s vektorovým charakterem. Proto by měl být pojem rychlosti, ať již opatřený jakýmkoli přívlastkem (průměrná, okamžitá, úhlová), zásadně jako vektorová veličina chápán a používán. Laikové, a dokonce i lidé fyzikálně alespoň do jisté míry vzdělaní, se však s pojmem rychlosti setkávají a užívají jej téměř výhradně ve smyslu velikosti. (Řidič automobilu měl nehodu při rychlosti 150 km.h^{-1}, gepard vyvine rychlost přes 100 km.h^{-1}, apod.) Lze tak nabýt dojmu, že rychlost je pouze číslo. V tomto omylu jsou často utvrzováni i studenti středních škol, a to bohužel jak učebnicemi, tak svými učiteli. Pokud nepokračují v dalším studiu fyziky na vysoké škole, v tomto omylu většinou setrvají.

Terminologický problém spočívá v tom, že čeština nemá pro velikost rychlosti jednoslovný výraz, na rozdíl od některých evropských jazyků. V angličtině je rychlost = velocity, velikost rychlosti = speed, ve francouzštině rychlost = la vélocité, velikost rychlosti = la vitesse. Jistě by se dalo uvažovat o zavedení nové české fyzikální terminologie: pojem *rychlor*[2] by nahradil výraz rychlost a slovo rychlost by se nadále používalo jen pro velikost rychlosti. Obojí by se snadno pamatovalo, rychlor - vektor, rychlost - velikost. Vzhledem k zažité konvenční terminologii však nepředpokládám, že by se tento návrh mohl setkat s úspěchem. Proto bude

[2]Tento výraz navrhl můj spolužák Jindřich Bílek.

při výkladu pojmu rychlost i nadále třeba klást důraz na terminologickou přesnost (rychlost versus velikost rychlosti).

Druhý problém je podstatně vážnější. Rychlost hmotného bodu je derivací jeho polohového vektoru podle času, tedy derivací parametrického vyjádření jeho trajektorie. Chudé matematické zázemí studentů v prvním ročníku gymnázia však nedovoluje korektní definici rychlosti formulovat. Současné učebnicové formulace využívající nepřesného popisu limitního přechodu nejsou názorné a neumožňují pojem rychlosti do hloubky pochopit. Stejný problém vyvstává při zavádění zrychlení. Nepochopení pojmů *rychlost* a *zrychlení* vede k nepochopení Newtonových zákonů a tím celé mechaniky. Proto je nutné hledat alternativní způsoby zavádění těchto veličin a veličin, které mají charakter derivací, obecně.

Výsledky rozboru gymnaziálních učebnic fyziky, předložených v předchozí kapitole, výčet požadavků na učebnice a konečně vymezení dvou základních překážek, které je třeba při tvorbě učebnice překonat či obejít, vedou k závěru, že základní kinematické pojmy *rychlost* a *zrychlení* (stejně tak jako další fyzikální veličiny, které jsou z matematického hlediska derivacemi) nelze *definovat* způsobem analogickým matematických definicím. Je třeba je postupně *vybudovat* především pomocí dostatečného počtu vhodných příkladů. Takový způsob je zvolen v následujícím návrhu textu. Návrh samotný nemá ještě přímo charakter učebnice, neboť neobsahuje doprovodné texty v takovém rozsahu, jak by pro učebnici bylo vhodné (zahrnutí těchto textových pasáží by neúměrně zvyšovalo rozsah diplomové práce). Je prezentován formou učitelovy přípravy na výuku problematiky rychlosti a zrychlení.

2.3 Rychlost hmotného bodu

Následující výklad je založen na těchto předpokládaných znalostech studentů:

- Žáci jsou před zahájením výkladu pojmu *rychlost* vybaveni znalostmi souvisejícími s problematikou určení polohy hmotného bodu: souřadnice x v závislosti na čase v případě pohybu po přímce (včetně diskuse o znaménku souřadnice, možnostech jejího růstu či poklesu s časem), polohový vektor $\vec{r}(t)$ a jeho složky $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ v závislosti na čase, tj. parametrické vyjádření trajektorie.

- Již dříve byla provedena klasifikace pohybů podle tvaru trajektorie na přímočaré a křivočaré.

- Žáci jsou obeznámeni s pojmem rychlosti pro případ pohybu rovnoměrného přímočarého (velikost i směr).

Před vlastním výkladem pojmu *rychlost* je třeba tyto předpoklady ověřit pomocí opakování. Pojem *rychlost* je pak vhodné postupně vybudovat na příkladech dvou situací:

1. **Pohyb přímočarý.** Zjednodušení spočívající v popisu pohybu po přímce umožní soustředit se při výkladu na samotný problém časové změny veličiny, v tomto případě souřadnice, oproštěný od komplikací spočívajících ve vektorovém charakteru veličiny.

2. **Obecný pohyb.** Zobecnění na případ pohybu v trojrozměrném prostoru, obecně křivočarého.

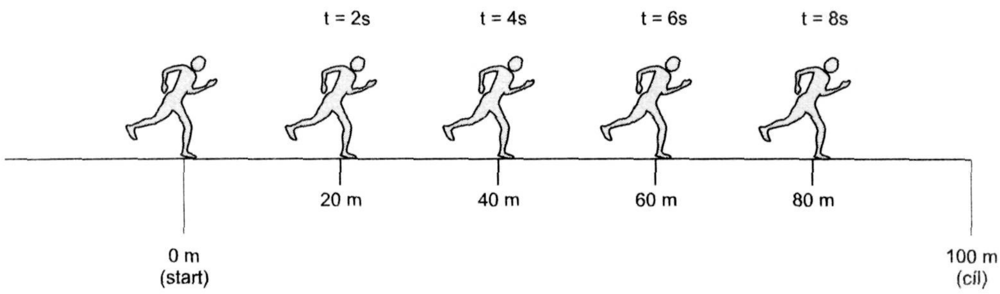
2.3.1 Průměrná a okamžitá rychlost přímočarého pohybu

■ **Příklad 1:**

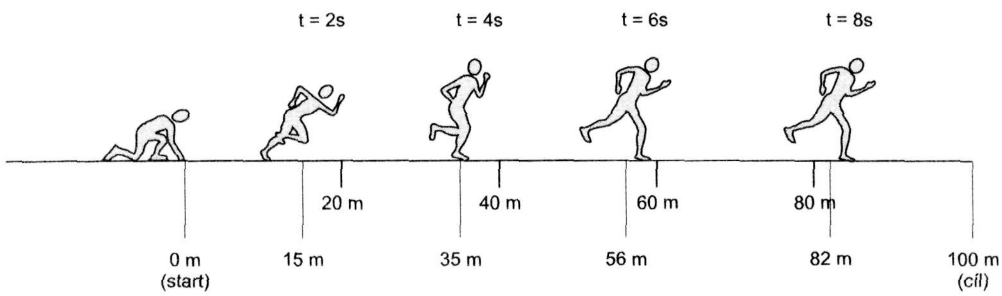
Závod s letmým startem. Jsme na běžném atletickém stadionu se závodním oválem délky 400 metrů. Na přímém úseku oválu je vymezena trať 100 metrů. Na trati jsou na značkách 0 metrů (letmý start) a 100 metrů (cíl) umístěny fotobuňky, které zaznamenávají čas v okamžiku, kdy závodník proběhne kolem nich. Závodník vyběhne z určeného místa před letmým startem. V okamžiku, kdy proběhne kolem značky 0 metrů, vynulují se hodiny u obou značek, startovní i cílové. V čase 9,73 sekundy proběhne závodník kolem cílové fotobuňky.

■ **Příklad 2:**

Závod s pevným startem. Závodník je opět na startu závodu na 100 metrů. Tentokrát se však jedná o závod s pevným startem, běžec se rozbíhá od značky 0 metrů po výstřelu ze startovní pistole. Pistole je elektronicky spjata s hodinami na obou značkách, které se v okamžiku výstřelu opět vynulují. Také tentokrát proběhne závodník kolem cílové značky v okamžiku 9,73 sekundy.



Obrázek 2.1: Závod s letmým startem – schematický nákres skutečné situace



Obrázek 2.2: Závod s pevným startem – schematický nákres skutečné situace

Můžeme se ptát "jak rychle" závodník běžel? Na takovou otázku by jistě dokázal odpovědět každý. Závodník se přece v obou případech přemístil o x=100 metrů za dobu t=9,73 sekundy.

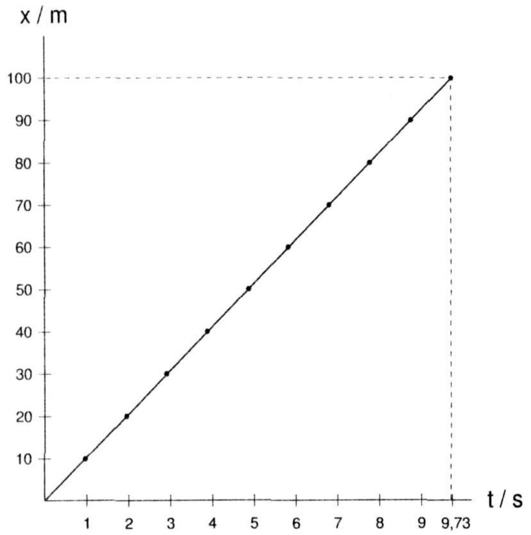
Běžel tedy v obou případech stejně rychle, rychlostí

$$v = \frac{x}{t}, \quad v = \frac{100}{9,73}\,\mathrm{m \cdot s^{-1}} = 10,3\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}.$$

Je však tato odpověď správná? Nepřekvapuje nás, že je pro obě situace stejná, i když tyto situace se poměrně významně liší? V případě letmého startu přece závodník kolem značky 0 metrů *proběhne*, zatímco v případě pevného startu se od ní teprve *rozbíhá*. Při rozběhu je zcela jistě "pomalejší" a nějaký zlomek sekundy ztratí, než zareaguje na výstřel. Má-li doběhnout k cílové značce za stejnou dobu jako při letmém startu, musí někde ve střední části trati zpoždění dohnat, musí tedy běžet "rychleji". (Slova "pomalejší" a "rychleji" zde používáme intuitivně.) Hodnota, jíž jsme odpověděli na otázku: "Jak rychle běžel atlet?" představuje *velikost* fyzikální veličiny zvané *průměrná rychlost v časovém intervalu*[3]. V našich příkladech se jednalo o průměrnou rychlost v časovém intervalu [0; 9,73] s.

Abychom tuto veličinu mohli korektně definovat a později této definice využít pro další zpřesnění odpovědi na otázku "jak rychle?", předpokládejme, že stadion bude vybaven větším technickým komfortem. Podél stometrové trati budou umístěny fotobuňky tak těsně za sebou, že bude možné zaznamenávat polohu běžce velmi často. Dejme tomu, že detektory budou od startu do cíle rozmístěny po deseti centimetrech. Pak budeme moci registrovat polohu závodníka zhruba každou setinu sekundy. (Měření časového údaje na zařízeních, která jsou při závodech běžná, s přesností lepší než jedna setina sekundy není tak jako tak možné, takže zvolená "hustota" rozmístění detektorů je dostatečná.) Poloha každého detektoru je odečítána na ose x, jejíž počátek ztotožníme se startovní značkou a její kladnou poloosu orientujeme směrem k cílové značce. Pro určitost si řekněmě, že vzhledem k pozorovateli, který závod sleduje, je osa namířena vpravo. Tuto volbu soustavy souřadnic budeme dodržovat. Následující obrázek představuje graf závislosti polohy závodníka na čase pro případ letmého i pevného startu. V grafech jsou jako body • vyznačena jen ta měření z celého souboru, jimž odpovídají celočíselné hodnoty polohové proměnné v metrech včetně posledního měření, zaznamenaného při průchodu cílem, tj. bod grafu [9,73 s; 100 m].

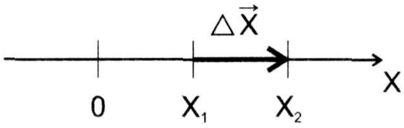
[3] V českém jazyce se pojem rychlost většinou vyskytuje ve spojení s přívlastky např. průměrná rychlost, úhlová rychlost, okamžitá rychlost ...



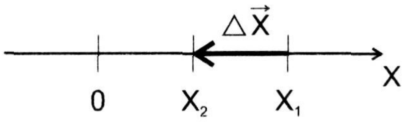
Obrázek 2.3: Graf závislosti polohy závodníka na čase při letmém startu (vlevo), resp. při pevném startu (vpravo)

Vraťme se k původnímu zadání úlohy: V případě letmého i pevného startu jsme měli k dispozici dva údaje o poloze závodníka a odpovídající údaje časové. Toto zadání odpovídalo znalosti počátečního a koncového bodu grafu, tj. $[t_1, x_1]$=[0 s; 0 m] a $[t_2, x_2]$=[9,73 s; 100 m]. Za dobu $\Delta t = t_2 - t_1$ se poloha závodníka změnila o $\Delta x = x_2 - x_1$. Veličinu Δx nazýváme *posunutím* hmotného bodu *v časovém intervalu* Δt. (Uvedení konkrétního časového intervalu, ve kterém se posunutí odehrálo, je podstatné. Situace by byla odlišná, kdyby například v jiném (jinak velkém) časovém intervalu došlo ke stejnému posunutí. Samotný údaj o posunutí je nepostačující.) Posunutí je vektorem, který má v případě pohybu hmotného bodu po ose x jedinou složku $(x_2 - x_1)$. Je-li tato složka kladná, tj. končí-li pohyb hmotného bodu na ose x vpravo od bodu počátečního, je vektor posunutí orientován souhlasně s osou x, v opačném případě (pohyb končí vlevo od počátečního bodu) jde o orientaci nesouhlasnou s osou x.

Nyní je vše připraveno pro definici průměrné rychlosti. Předpokládejme, že v okamžiku t_1 je hmotná částice na ose x v bodě X_1, v okamžiku t_2 je v bodě X_2. Vektor $\vec{x}_1 = \vec{OX_1}$ je počátečním polohovým vektorem částice, vektor $\vec{x}_2 = \vec{OX_2}$ bodem koncovým (viz obrázek). O je počátek osy x. Každý vektor $\vec{OX}$ určující polohu bodu na ose x má jedinou složku (x), jejíž hodnota je shodná se souřadnicí bodu X. *Vektorem posunutí*, zkráceně *posunutím*, částice v časovém intervalu $[t_1, t_2]$ rozumíme vektor $\Delta\vec{x} = \vec{x_2} - \vec{x}_1$. Jeho jediná složka je $\Delta x = (x_2 - x_1)$.



Obrázek 2.4: Posunutí v kladném směru osy x



Obrázek 2.5: Posunutí v záporném směru osy x

Průměrnou rychlost definujeme jako podíl posunutí $\Delta\vec{x}$ a délky časového intervalu Δt ve kterém k posunutí došlo.

$$\vec{v}_p = \frac{\Delta\vec{x}}{\Delta t} = \frac{\vec{x}_2 - \vec{x}_1}{t_2 - t_1}, \quad \text{složka} \quad v_p = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1},$$

kde x_1 (x_2) je počáteční (koncová) poloha a t_1 (t_2) je počáteční (koncový) čas.

Všimněme si, že pro průměrnou rychlost připadají v úvahu kladné i záporné hodnoty. Předpokládáme-li vždy $t_1 < t_2$, bude průměrná rychlost kladná pro $x_1 < x_2$ (pohyb hmotného bodu končí v na ose x vpravo od bodu počátečního) a záporná pro $x_1 > x_2$ (pohyb končí vlevo od počátečního bodu). Průměrná rychlost je vektorová fyzikální veličina. Má tedy velikost, směr a orientaci.[4] Její směr je totožný se směrem osy x, orientace je s osou x souhlasná, je-li průměrná rychlost kladná a nesouhlasná, je-li průměrná rychlost záporná. Vektor průměrné rychlosti má při pohybu po ose x jedinou složku. Jednotku průměrné rychlosti odvodíme z definičního vztahu:

$$v_p = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

$$[v_p] = \frac{[\Delta x]}{[\Delta t]} = \frac{m}{s} = \mathrm{m.s^{-1}}$$

Základní jednotkou průměrné rychlosti je $\mathrm{m.s^{-1}}$ (*metr za sekundu*) Používají se i další jednotky, zejména $\mathrm{km.h^{-1}}$ (*kilometr za hodinu*). Pro převedení průměrné rychlosti s jednotkou $\mathrm{km.h^{-1}}$ na průměrnou rychlost s jednotkou $\mathrm{m.s^{-1}}$ platí

$$1\mathrm{km.h^{-1}} = \frac{1000m}{3600s} = \frac{1}{3,6}\mathrm{m.s^{-1}}.$$

[4] Průměrná rychlost je definována jako podíl vektoru a skaláru, je tedy vektorem.

Vraťme se nyní k příkladům 1 a 2 a znovu si položme původní otázku: "Jak rychle tedy závodník běžel?" Víme již, že ze zadaných údajů dokážeme určit průměrnou rychlost.

Řešení:
Abychom mohli spočítat průměrnou rychlost, určíme posunutí závodníka Δx a dobu Δt, za kterou toto posunutí překonal. Pokud si trať představíme jako osu x[5] s počátkem v místě startu a jednotkou 1m, má start souřadnici $x_1 = 0$ a cíl má souřadnici $x_2 = 100$. Celkové posunutí $\Delta x = x_2 - x_1 = 100$m je kladné, odpovídající časový interval, ve kterém k tomuto posunutí došlo, je $\Delta t = 9{,}73$ s. Z těchto hodnot můžeme zjistit průměrnou rychlost v_p a její velikost $|v_p|$[6].

$$v_{p1} = v_{p2} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{100m}{9,73s} = 10,3 \text{ m.s}^{-1}, \quad |v_{p1}| = |v_{p2}| = 10,3 \text{ m.s}^{-1}.$$

Odpověď:
Závodník se při závodě na 100 metrů pohyboval průměrnou rychlostí 10,3 m.s^{-1}. Výsledek je stejný pro případ letmého i pevného startu. Velikost (vektoru) průměrné rychlosti je 10,3 m.s^{-1}, vektor má směr osy x a je s ní souhlasně orientován.

Průměrnou rychlost v intervalu $[t_1, t_2]$ lze snadno určit i z grafu závislosti polohy závodníka na čase jako směrnici spojnice bodů grafu $[t_1, x_1]$ a $[t_2, x_2]$.

Abychom si lépe osvojili pojem průměrná rychlost, procvičíme si jej na následujících příkladech.

■ **Příklad 3:**
Uvažme situaci, že závodník opět poběží závod na 100 metrů, ale tentokrát poběží zpět, od cíle ke startu. Volba osy x zůstává nezměněna. Stejně jako v předchozím případě překoná závodník celou trať za dobu $\Delta t = 9{,}73$ s. Změní se jeho průměrná rychlost oproti předchozímu případu? Očekáváme, že výsledek nebude shodný s předchozími dvěma příklady, i když i nyní uběhl atlet stejnou vzdálenost za stejnou dobu. Průměrná rychlost však je vektor a je zřejmé, že v tomto případě bude mít opačný směr než předtím.

Řešení:
Pro výpočet průměrné rychlosti použijeme definiční vztah $v_p = \frac{\Delta x}{\Delta t}$. Avšak pozor, rychlost je vektorová veličina! Počáteční poloha běžce (odpovídá okamžiku $t_1 = 0$ s) je nyní $x'_1 = x_2 = 100$ m, koncová poloha (odpovídá okamžiku $t_2 = 9,73$ s) je $x'_2 = x_1 = 0$ m. Vektor posunutí je $\Delta x' = x'_2 - x'_1 = x_1 - x_2$. Po dosazení do definičního vztahu pro průměrnou rychlost a její velikost dostáváme:

$$v_{p3} = \frac{(0 - 100)\text{m}}{9,73\text{s}} = -10,3 \text{ m.s}^{-1}, \quad |v_{p3}| = 10,3 \text{ m.s}^{-1}.$$

[5] V případě, že je trať přímá, lze tuto představu použít bez újmy na obecnosti.
[6] Pro přehlednost budeme průměrné rychlosti indexovat čísly příkladů.

Získané výsledky se liší pouze znaménkem, jejich absolutní hodnoty se rovnají. Pokud srovnáváme tuto situaci se situací v příkladech 1 a 2, vidíme, že velikost a směr průměrné rychlosti jsou stejné (směr je určen přímkou, na které leží start a cíl), změnila se však její orientace. V příkladech 1 a 2 totiž závodník běží od startovní značky k cílové, v příkladu 3 je směr jeho pohybu orientován opačně, od cíle ke startu.

Závěrem můžeme říct, že průměrné rychlosti v příkladech 1, 2 a 3 mají stejnou velikost, průměrná rychlost v příkladu 3 však má opačnou orientaci než v příkladech 1 a 2.

■ **Příklad 4:**
Jaká bude průměrná rychlost běžce, který v čase $t_1 = 0$ s vyběhne z místa $x_1 = 0$ m po uběhnutí 100 metrů se otočí a běží zpět do výchozího bodu x_1, kde se zastaví v čase $t_2 = 32,4$ s.

Řešení:
Vyjdeme z definičního vztahu $v_p = \frac{\Delta x}{\Delta t}$. V tomto případě je výchozí i koncový bod totožný, takže $\Delta x{=}0$. Po dosazení do definičního vztahu dostáváme průměrnou rychlost běžce rovnu $v_{p4} = 0$ m.s^{-1}, a tedy i $|v_{p4}| = 0$ m.s^{-1}.

Příklad 4 jasně ukazuje, jak významně je průměrná rychlost závislá na počátečním a koncovém bodě pohybu. Ukazuje však i jednu "nepříjemnost": Velikost průměrné rychlosti je nulová, jako kdyby atlet vůbec neběžel, jako kdyby neurazil žádnou dráhu. Je to dáno vektorovým charakterem průměrné rychlosti. Potřebujeme tedy ještě jinou veličinu, zřejmě skalární, která bude obsahovat informaci o celkové dráze připadající na jednotku času. Označme celkovou dráhu, kterou běžec urazil v intervalu Δt, jako Δs. Jak ji určíme, když se orientace pohybu běžce může měnit (běhá tam i zpět, jak tomu bylo v příkladu 4). Je třeba rozdělit interval Δt na jednotlivé úseky tak, aby v každém z nich byla orientace pohybu závodníka neměnná (v daném úseku běží stále vpravo nebo stále vlevo). Celková dráha pak bude dána součtem velikostí jednotlivých posunutí. Jestliže jsme například interval $[t,\, t+\Delta t]$ o velikosti Δt museli takto rozdělit na intervaly

$$[t,\, t+\Delta t] = [t_1,\, t_2] \cup [t_2,\, t_3] \cup [t_3,\, t_4] \qquad t = t_1,\;\; t+\Delta t = t_4,$$

je celková dráha

$$\Delta s = |x_2 - x_1| + |x_3 - x_2| + |x_4 - x_3|.$$

Ihned vidíme, že součet velikostí těchto "jednosměrných" posunutí není obecně roven velikosti výsledného posunutí v intervalu $[t,\, t+\Delta t]$, která činí $|\Delta x| = |x_4 - x_1|$. Informaci o tom, "jak rychle" v průměru závodník běhal, bez ohledu na to, že pobíhal po ose x sem a tam, udává skalární veličina *průměrná velikost rychlosti*[7].

[7]Tato definice koresponduje s pojmem ***střední hodnota velikosti rychlosti***, viz odst. 1.3.1.

Průměrnou velikost rychlosti definujeme jako podíl celkové dráhy Δs a délky časového intervalu Δt, za který hmotný bod tuto dráhu urazil.

$$\bar{v}_p = \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

V příkladech 1, 2, 3 je $|v_p| = \bar{v}_p$, zatímco v příkladu 4 je

$$|v_{p4}| = 0\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}, \quad \bar{v}_{p4} = \frac{|x_2 - x_1| + |x_1 - x_2|}{\Delta t} = \frac{100 + 100}{32,4} = 6,17\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}.$$

Položme si ještě otázku, jak závisí výpočet průměrné rychlosti na volbě soustavy souřadnic. Při budování pojmu průměrné rychlosti jsme totiž zvolili soustavu souřadnic pevně, i když jsme konstatovali, že i jiná volba by byla možná. Nyní si všimneme, zda a jak by taková jiná volba mohla ovlivnit naše výsledky. Z definice je zřejmé, že průměrná rychlost je nezávislá na volbě počátku osy x. Skutečně, kdybychom posunuli počátek osy x o x_0, změnily by se souřadnice všech poloh takto: $x' = x - x_0$. Posunutí by se však nezměnilo, neboť $x'_2 - x'_1 = (x_2 - x_0) - (x_1 - x_0) = x_2 - x_1$. Záměna orientace osy x by se však již při výpočtu složky průměrné rychlosti projevila: Při této záměně platí pro všechny polohy $x' = -x$, tj. $x'_2 - x'_1 = x_1 - x_2$. Na volbě soustavy souřadnic, konkrétně pouze na orientaci osy x, závisí *složka* vektoru průměrné rychlosti. Vektor sám je na této volbě nezávislý. Skutečně, předpokládejme, že závodník běží od startovní značky k cílové. Řekněme, že pozorovatel, který závod sleduje, je umístěn tak, že vzhledem k němu běží závodník vpravo. Je-li osa x orientována také od startu k cíli, tj. také vpravo, je vypočtená složka průměrné rychlosti kladná. V případě záměny orientace osy je vypočtená složka průměrné rychlosti záporná, i když závodník stále běží vpravo. Jeho průměrná rychlost je stále táž, pouze je v různých soustavách souřadnic reprezentována obecně různými čísly. Tato vlastnost vektorových veličin je obecná. V případě pohybu podél osy x s dvojí možnou orientací se projevuje velmi jednoduše: jedná se o čísla se stejnou absolutní hodnotou, ale opačným znaménkem.

■ **Příklad 5:**

Na mistrovství světa v lehké atletice v roce 1997 bylo pro měření rychlosti běžce použito zařízení popsané v příkladech 1 a 2. Závod na sto metrů se běžel po přímém úseku, na značkách 0, 20, 40, 60, 80, 100 metrů byly umístěny fotobuňky, které zaznamenávaly okamžik, v němž je závodník míjel. Hodiny na všech fotobuňkách se spustily v okamžiku výstřelu startovní pistole (tehdy má závodník startovat z bloků). U každé fotobuňky stál rozhodčí, který měl k dispozici její údaj. V případě běžce Maurice Greena byly zaznamenány tyto údaje:

Takto běžel Maurice Green na MS 1997 v Aténách

Značky	0m	20m	40m	60m	80m	100m
Časomíra [s]	0	2,75	4,55	6,27	7,98	9,73

Můžeme rozhodčím položit otázku, jak rychle se závodník pohyboval? Jak mohou odpovědět? Budou se jejich odpovědi lišit? Z toho, co jsme si už v souvislosti s otázkou "jak rychle?" vysvětlili, lze jistě očekávat, že se odpovědi rozhodčích lišit budou, neboť průměrná rychlost závodníka, kterou lze z údajů rozhodčích určit, se obecně mění. Na otázku "Jak rychle běží atlet?" může totiž rozhodčí odpovědět jedině tak, že určí průměrnou rychlost v úseku mezi startem a svou značkou. Pro určení průměrné rychlosti v jiných intervalech nemá údaje. Odpovědi jednolivých rozhodčích jsou v následující tabulce.

Rozhodčí u značky	0m	20m	40m	60m	80m	100m
Průměrná rychlost [m.s^{-1}]	0	7,3	8,8	9,6	10,0	10,3

Vidíme, že se závodník opravdu pohybuje proměnnou rychlostí. Můžeme také použít hodnoty dvou rozhodčích a z nich zjistit odpovídající průměrnou rychlost. Sledujme například údaje rozhodčích u značek 0 a 20 metrů. Průměrná rychlost mezi těmito značkami, tj. v časovém intervalu $[0; 2,75]$ s, je $v_p = 7,27$m.s^{-1} Průměrná rychlost mezi značkami 40 a 60 metrů, tj. v časovém intervalu $[4,55; 6,27]$, je $v_p = (60 - 40)/(6,27 - 4,55) = 11,63$m.s^{-1}.

Vraťme se ještě jednou k příkladům 1 a 2 a všimněme si podrobnějších měření polohy běžce v závislosti na čase pro případ letmého i pevného startu. Údaje z grafů na obr. 2.3 jsou zpracovány v následující tabulce. i-tý řádek tabulky obsahuje výsledek měření polohy x_i v okamžiku t_i a průměrnou rychlost v intervalu $[t_{i-1}, t_i]$.

	letmý start			**pevný start**		
i	t_i [s]	x_i [m]	v_p [m $\cdot$ s^{-1}]	t_i [s]	x_i [m]	v_p [m $\cdot$ s^{-1}]
1	0,00	0,00	-	0,00	0,00	-
2	1,00	10,3	10,3	1,00	4,6	4,6
3	2,00	20,6	10,3	2,00	12,8	8,2
4	3,00	30,8	10,3	3,00	22,8	10,0
5	4,00	41,1	10,3	4,00	34,0	11,2
6	5,00	51,2	10,3	5,00	45,4	11,5
7	6,00	61,7	10,3	6,00	56,9	11,5
8	7,00	71,9	10,3	7,00	68,6	11,7
9	8,00	82,2	10,3	8,00	80,2	11,6
10	9,00	92,5	10,3	9,00	91,7	11,5
11	9,73	100,0	10,3	9,73	100,0	11,4

Tabulka 1. Poloha běžce v závislosti na čase a průměrná rychlost

V případě letmého startu vidíme, že v každém ze sekundových intervalů je posunutí běžce v rámci přesnosti měření stejné, průměrná rychlost ve všech těchto intervalech je stejná,

$v_p = 10,3\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}$. Kdybychom využili možností technického zařízení popsaného příkladech a měřili polohu běžce mnohem častěji, zjistili bychom, že průměrná rychlost je zhruba stejná i v daleko kratších časových intervalech než jedna sekunda. Odpovídá to naší představě o tom, jak asi vypadá závod s letmým startem: Běžec se rozbíhá tak, aby již kolem startovní značky proběhl "co nejrychleji" tak, aby toto tempo udržel podél celé stometrové trati. K této situaci by se jistě hodila charakteristika *závodník běží rovnoměrně.* Skutečně, vzpomeňte si na definici rovnoměrného přímočarého pohybu: Hmotný bod urazí v libovolně zvolených, avšak stejně velkých, časových intervalech pokaždé stejnou dráhu. Kdyby byly časové intervaly mezi jednotlivými měřeními opravdu zkráceny na hranici možností měřicího zařízení, tj. na setinu sekundy, mohli bychom skoro říci, že atlet běží rychlostí[8]10,3 $\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}$ *stále*, tedy *v každém okamžiku*. Poněkud jiná situace je při pevném startu, kde běžec startuje z klidu tzn. "rozbíhá se". Z tabulky vidíme, že průměrná rychlost v počátečních intervalech je nižší, postupně se zvyšuje, nabývá maxima a pak mírně klesá, jak běžci dochází síly. Opět bychom mohli měření zjemňovat a na rozdíl od předchozího příkladu nakonec konstatovat, že rychlost běžce je *v každém okamžiku jiná.* Intervaly, ve kterých posuzujeme průměrnou rychlost, jsou již tak malé, že jejich další zmenšování by již nevedlo k měřitelným rozdílům v průměrné rychlosti. Ukážeme si to na číselných příkladech:

■ **Příklad 6:**

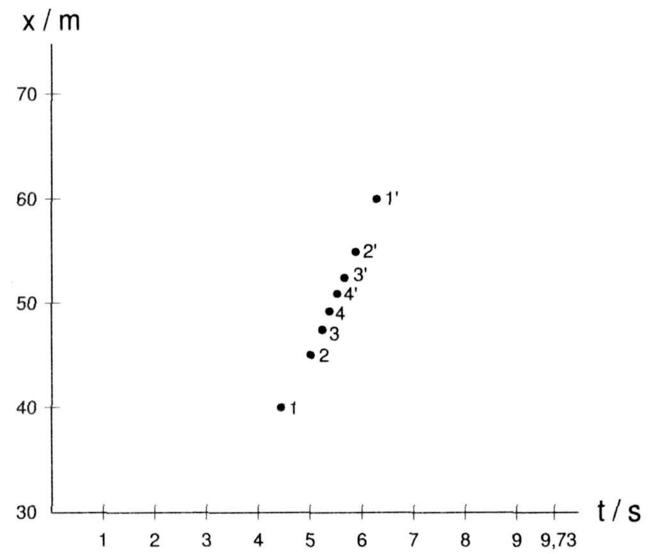
Z tabulky průměrných rychlostí můžeme usoudit, že se závodník v různých částech trati pohybuje "různě rychle". Lze si položit otázku: "Jak rychle se závodník pohyboval v okamžiku, kdy míjel značku 50 metrů?" Odpověď lze získat následujícím způsobem: Budeme přibližovat fotobuňky ze značek 40 a 60 metrů ke značce 50 metrů. Z jejich poloch při i-tém měření x_i, x_i' a odpovídajících časových údajů t_i, t_i' zaznamenaných při průchodu atleta budeme počítat průměrnou rychlost. Až budou značky u sebe tak blízko, že dalším přibližováním se údaj o rychlosti nebude v rámci přesnosti měření měnit[9], můžeme přibližování značek ukončit (viz obrázek 2.6). Hodnota průměrné rychlosti, u které naše procedura skončila, vystihuje odpověď na otázku jaká byla rychlost závodníka v okamžiku, kdy míjel značku 50 metrů. Situaci vystihují následující hypotetická tabulka a graf.

i	$[\mathrm{t_i}, \mathrm{x_i}]$	$[\mathrm{t_i'}, \mathrm{x_i'}]$	Δx_i [m]	Δt_i [s]	$v_{p,i}$ [$\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}$]
1	[4,55; 40,0]	[6,27; 60,0]	20,0	1,72	11,63
2	[5,00; 45,1]	[5,85; 55,0]	9,9	0,85	11,65
3	[5,22; 47,7]	[5,64; 52,6]	4,9	0,42	11,67
4	[5,34; 49,1]	[5,52; 51,2]	2,1	0,18	11,67

Tabulka 2. Průměrné rychlosti běžce v okolí značky 50 metrů

[8]Víme, že v tomto případě, kdy je pohyb přímočarý a orientace jediné souřadnicové osy je zvolena pevně, lze rychlost zadávat jediným číslem, představujícím složku vektoru rychlosti.

[9]Údaj se bude měnit vždy. Přesnost měření je však omezená vlastnostmi přístrojů, takže velmi malé změny nemohou být zjištěny. V našem případě budeme považovat výsledky za shodné v případě, že $v_{p1} - v_{p2} \leq 0,01\mathrm{m.s}^{-1}$



Obrázek 2.6: Graf závislosti polohy běžce na čase v okolí značky 50 metrů

V praktických situacích se údaj o tom, jak rychlo se objekt pohybuje v blízkosti daného bodu či v rozmezí velice krátkého časového intervalu takto nezjišťuje. Kam by přišla třeba policie, kdyby měla takto "měřit" rychlost neukázněných řidičů? K jejímu určení je využito radarové detekce a Dopplerova jevu. Takto také byly stanoveny následující hodnoty velikosti rychlosti závodníka M.Greena.

Údaje o velikosti rychlosti závodníka M.Greena při míjení značek, poskytnuté atletickou federací [15]

	10m	20m	30m	40m	50m
Rychlost v m.s^{-1}	8,71	10,47	11,14	11,50	11,67

	60m	70m	80m	90m	100m
Rychlost v m.s^{-1}	11,80	11,68	11,57	11,51	11,30

■ **Příklad 7:**
Předpokládejme, že poloha běžce při závodu s pevným startem je v závislosti na čase popsána ve fázi rozběhu (první tři sekundy) vztahem [10]

$$x(t) = \frac{1}{2}At^2, \quad A = 4,05 \quad \mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}, \Delta x = 2,025((t+\Delta t)^2 - t^2)\,.$$

Budeme počítat průměrnou rychlost běžce v intervalu $[t,\, t+\Delta t]$ pro $t = 2$ s a zmenšující se

[10] Tento popis neodpovídá přesně realitě, ale je velmi vhodný pro tento názorný příklad.

délku tohoto intervalu Δt. Interval budeme zmenšovat postupně. Výsledky shrnuje následující tabulka.

Δt [s]	Δx [m]	v_p [m $\cdot$ s^{-1}]	Δt [s]	Δx [m]	v_p [m $\cdot$ s^{-1}]
1,00	10,12	10,12	0,06	$0,49_3$	8,22
0,50	4,56	9,11	0,03	$0,24_5$	8,16
0,25	2,15	8,60	0,01	$0,08_1$	8,12
0,12	1,00	8,34	$0,00_5$	$0,04_0$	8,11
0,09	0,75	8,28	$0,00_3$	$0,02_4$	8,11

Tabulka 3. Určení okamžité rychlosti zkracování časového intervalu

Vidíme, že při zmenšující se hodnotě Δt se průměrná rychlost v intervalu $[2,\ 2+\Delta t]$ s ustaluje na hodnotě 8,11 [m $\cdot$ s^{-1}]. V rámci přesnosti měřicího zařízení můžeme tedy konstatovat, že rychlost běžce *v okamžiku* $t = 2$ s je 8,11 [m $\cdot$ s^{-1}]. Tímto způsobem dospíváme k pojmu *okamžitá rychlost*.

Průměrná rychlost hmotného bodu v intervalu $[t,\ t + \Delta t]$, určená jako podíl posunutí Δx a velikosti časového intervalu Δt, se při poklesu Δt k nule ustálí na limitní hodnotě $v(t)$, kterou nazýváme **okamžitá rychlost**.

2.3.2 Průměrná a okamžitá rychlost křivočarého pohybu

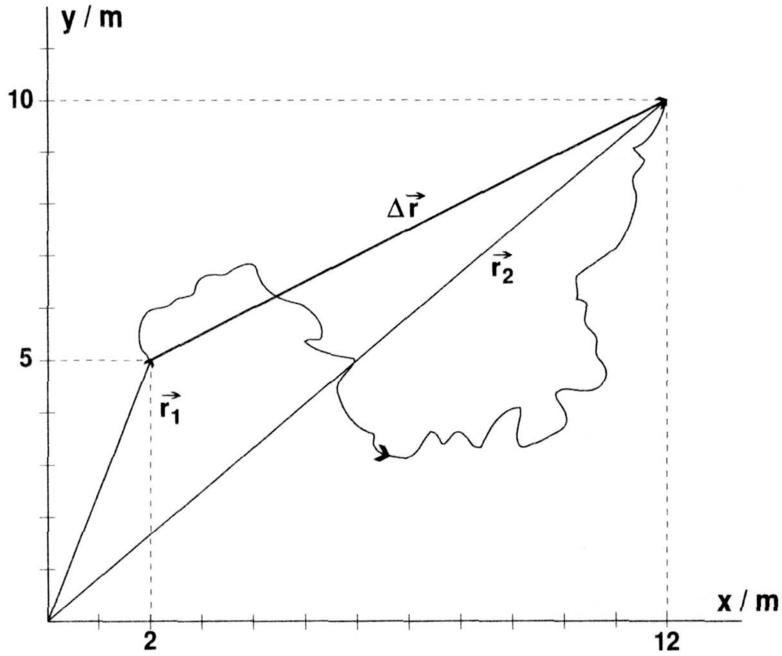
V tomto odstavci zobecníme naše úvahy na případ křivočarého pohybu. V takové situaci se hmotný bod nemusí pohybovat po přímce.

Vyjdete-li například ze školy domů, vaše cesta nejspíše nebude přímá, půjdete chvíli rovně, poté zahnete doleva atp. Předpokládejme, že z výchozího bodu ve škole, který je v dané soustavě souřadnic určen polohovým vektorem $\vec{r}_1$, jste vyšli v čase t_1 a do cílového místa ve vašem domě, daného polohovým vektorem $\vec{r}_2$, jste dorazili v čase t_2. *Posunutí* v časovém intervalu $[t_1,\ t_2]$ je vektor definovaný jako rozdíl $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$. Má tři složky

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = (x_2 - x_1,\ y_2 - y_1,\ z_2 - z_1).$$

Definici posunutí znázorňuje následující obrázek 2.7. V obrázku je vyznačena trajektorie bodu v časovém intervalu $[t_1,\ t_2]$, jejíž počáteční bod má polohu $\vec{r_1} = (2,\ 5)$, koncový $\vec{r_2} = (12,\ 10)$.

$$\Delta\vec{r} = (\Delta x,\ \Delta y) = (x_2 - x_1,\ y_2 - y_1) = (10,\ 5) \quad m.$$



Obrázek 2.7: Posunutí a skutečná trajektorie

Vidíme, že posunutí určené pro příliš velký časový interval $[t_1,\, t_2]$ nevystihuje dobře skutečný tvar trajektorie.

Průměrnou rychlost definujeme jako podíl posunutí $\Delta\vec{r}$ a délky časového intervalu Δt, ve kterém k posunutí došlo,

$$\vec{v}_p = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{t_2 - t_1},$$

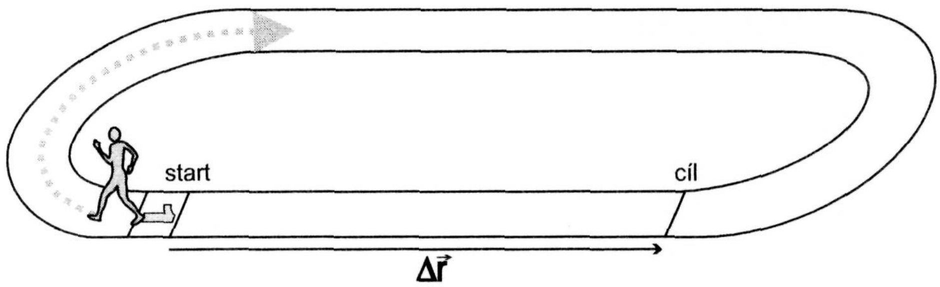
po složkách

$$\vec{v}_p = \left(\frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}, \frac{y_2 - y_1}{t_2 - t_1}, \frac{z_2 - z_1}{t_2 - t_1}\right).$$

Výpočet pro křivočarý pohyb si ukážeme na následujícím příkladě.

■ **Příklad 8:**

Závodník vybíhá v čase $t_1 = 0$ s z místa $x_1 = 0$ m po atletickém oválu v opačném směru než v příkladu 2, tzn. že uběhne 300 metrů, než se dostane do koncového bodu, který je totožný s cílem závodu z příkladu 2. Do koncového bodu x_2 doběhne v čase $t_2 = 34,9$ sekund. K lepší představě o situaci na atletické dráze poslouží následující obrázek 2.8.



Obrázek 2.8: Pohyb běžce po stadionu

Otázka:
Jaká je průměrná rychlost závodníka?

Řešení:
Pohyb závodníka je nyní křivočarý. Počáteční i koncový bod jeho pohybu jsou však shodné s příkladem 2. Bez ohledu na volbu soustavy souřadnic i bez ohledu na skutečnost, že pohyb mezi počátečním a koncovým bodem není přímočarý, je shodný i vektor posunutí. Zvolme soustavu souřadnic tak, že její počátek splývá s bodem startu, osa x spojuje start s cílem a je orientována od startu k cíli, osa y leží v rovině stadionu a je k ose x kolmá, osa z míří svisle vzhůru. Pro polohové vektory v počátečním a koncovém okamžiku pohyb běžce platí

$$\vec{r}_1 = (0;\ 0;\ 0)\,\mathrm{m}, \quad \vec{r}_2 = (100;\ 0;\ 0)\,\mathrm{m}.$$

Vyjdeme z definičního vztahu pro průměrnou rychlost:

$$\vec{v}_{p8} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \left(\frac{100-0}{34,9-0};\ 0;\ 0\right) = (2,98;\ 0;\ 0)\mathrm{m.s^{-1}}, \quad |\vec{v}_{p8}| = 2,98\mathrm{m.s^{-1}}.$$

Velikost průměrné rychlosti je výrazně menší než v příkladu 2. Není to nijak udivující. Závodník změnil svou polohu o stejný vektor posunutí jako v příkladu 2. Trvalo mu to však déle, neboť běžel oklikou, urazil tedy větší dráhu. Veličinou, která obsahuje informaci o celkové uražené dráze, byla v případě přímočarého pohybu průměrná velikost rychlosti. A tak je tomu i pro pohyb křivočarý. Zopakujme si definici.

Průměrnou velikost rychlosti definujeme jako podíl celkové dráhy Δs a délky časového intervalu Δt, za který hmotný bod tuto dráhu urazil.

$$\bar{v}_p = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Otázka:
Porovnejte průměrnou velikost rychlosti závodníka v příkladech 2 a 8?

Řešení:

a) Příklad 2:

Závodník urazil dráhu 100 metrů za čas 9,73 sekund. Po dosazení těchto údajů do definičního vztahu pro průměrnou velikost rychlosti dostaneme:

$\tilde{v}_{p2} = \frac{100}{9,73} \mathrm{m.s^{-1}} = 10,3 \mathrm{m.s^{-1}}$

b) Příklad 8:

Závodník urazil dráhu 300 metrů za čas 34,9 sekund. Po dosazení těchto údajů do definičního vztahu pro průměrnou velikost rychlosti dostaneme:

$\tilde{v}_{p8} = \frac{300}{34,9} \mathrm{m.s^{-1}} = 8,6 \mathrm{m.s^{-1}}$

Když srovnáme tyto výsledky, $\tilde{v}_{p2} = 10,3\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$, $\tilde{v}_{p8} = 8,6\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$ a hodnoty velikostí průměrných rychlostí závodníka, které jsme u příkladů 2 a 8 již dříve spočítali, $|\vec{v}_{p2}| = 10,3\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$, $|\vec{v}_{p8}| = 2,98\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$, vidíme, že v některých případech se velikost průměrné rychlosti může rovnat průměrné velikosti rychlosti, ale obecně tomu tak není. Proto je nutné tyto dvě veličiny důsledně rozlišovat. Můžeme říci, v kterých případech se budou hodnoty těchto dvou veličin skutečně shodné? Z příkladů je zřejmé, že tato rovnost nastane právě tehdy, když velikost posunutí v daném časovém intervalu a dráha, kterou hmotný bod v tomto intervalu urazil, budou shodné. Takové situaci odpovídá jedině přímočarý pohyb s neměnnou orientací.

Stejně jako v případě přímočarého pohybu je třeba řešit otázku okamžité rychlosti. Myšlenka jejího zavedení je stejná. Pro časový interval $[t,\ t+\Delta t]$ budeme při zmenšující se hodnotě Δt sledovat chod průměrné rychlosti k limitní situaci. Získáme tak nejen velikost, ale i směr tohoto "limitního"vektoru, který nazveme *okamžitou rychlostí*.

Jak určíme velikost a směr okamžité rychlosti při křivočarém pohybu? Ukážeme si to na příkladě.

■ Příklad 9:

Uvažujme o pohybu hmotného bodu po kružnici o poloměru $R = 30,0$ cm. Bod koná jeden oběh za dobu $T = 4,00$ sekundy. Předpokládejme, že se poloha hmotného bodu řídí časovou závislostí

$$\vec{r}(t) = (x(t),\, y(t),\, z(t)) = \left(R\cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right),\, R\sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right),\, 0\right).$$

Budeme určovat průměrnou rychlost v časovém intervalu $[t,\ t+\Delta t]$ pro $t = 0$ s a pro Δt klesající k nule. Pomocí složek průměrné rychlosti vypočteme její velikost podle vztahu

$$|\vec{v}_p| = \sqrt{v_{p,x}^2 + v_{p,y}^2 + v_{p,z}^2}.$$

Její směr budeme charakterizovat úhlem α, který svírá vektor průměrné rychlosti s osou x, tj.

$$\cos\alpha = \frac{v_{p,x}}{v_p}.$$

Polohový vektor částice v okamžiku t=0 je $\vec{r}(0) = (R,\ 0,\ 0)$. Platí

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(\Delta t) - \vec{r}(0) = \left(R\cos\left(\frac{2\pi\Delta t}{T}\right) - R,\ R\sin\left(\frac{2\pi\Delta t}{T}\right),\ 0\right) =$$

$$= 0,3\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\Delta t\right) - 1,\ \sin\left(\frac{\pi}{2}\Delta t\right),\ 0\right)[m],$$

je-li Δt v sekundách. Průměrná rychlost v intervalu $[0,\ \Delta t]$ je

$$\vec{v}_p = \frac{0,3}{\Delta t}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\Delta t\right) - 1,\ \sin\left(\frac{\pi}{2}\Delta t\right),\ 0\right)$$

a její velikost

$$v_p = \frac{0,3}{\Delta t}\sqrt{\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\Delta t\right) - 1\right)^2 + \sin^2\left(\frac{\pi}{2}\Delta t\right)} = \frac{0,3}{\Delta t}\sqrt{2\left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{2}\Delta t\right)\right)} = \frac{0,6}{\Delta t}\sin\left(\frac{\pi}{4}\Delta t\right)$$

Dále platí (užijeme součtových vzorců)

$$\cos\alpha = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\Delta t\right) - 1}{\sin\left(\frac{\pi}{4}\Delta t\right)} = -2\sin\left(\frac{\pi}{4}\Delta t\right).$$

Hodnota v_p a α pro zmenšující se Δt jsou shrnuty v následující tabulce.

Δt [s]	$v_{p,x}$ [m.s$^-$1]	$v_{p,y}$ [m.s$^-$1]	$\lvert\vec{v}_p\rvert$ [m $\cdot$ s^{-1}]	α °
1,00	-0,300	0,300	0,424	135
0,50	-0,176	0,424	0,459	113
0,25	-0,091	0,459	0,468	101
0,12	-0,044	0,468	0,471	95,4
0,09	-0,033	0,465	0,471	94,1
0,06	-0,022	0,470	0,471	92,7
0,03	-0,011	0,471	0,471	91,3
0,01	-0,004	0,471	0,471	90,5
0,005	0,000	0,471	0,471	90,0
0,003	0,000	0,471	0,471	90,0

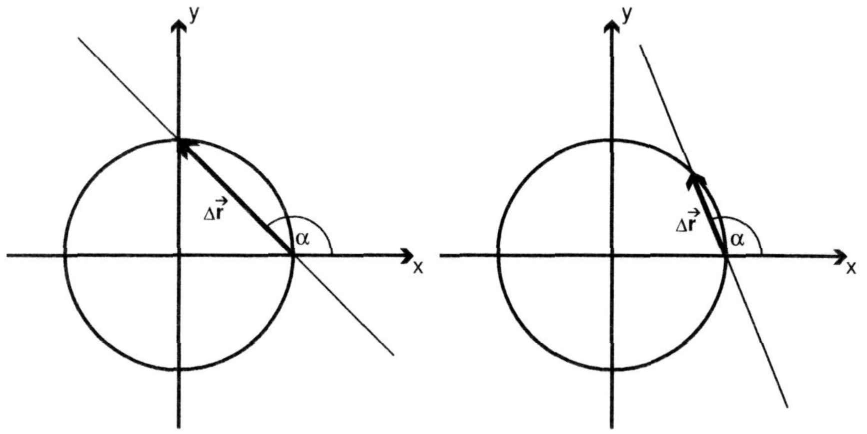
Tabulka 2: Okamžitá rychlost pohybu po kružnici

Vidíme, že velikost průměrné rychlosti se ustaluje na hodnotě 0,471 m.s$^-$1 a úhel α se blíží k 90°. Mohli jsme tento výsledek očekávat? Všimněme si ještě jednou vztahu pro v_p a $\cos\alpha$. Víme, že pro velmi malé hodnoty úhlu, například $\Delta\varphi$, je jeho sinus přibližně roven jeho hodnotě v obloukové míře, tj. $\sin \Delta\varphi \doteq \Delta\varphi$. Toto přiblížení je tím lepší, čím je hodnota $\Delta\varphi$ nule bližší. Pro v_p pak dostáváme tento odhad:

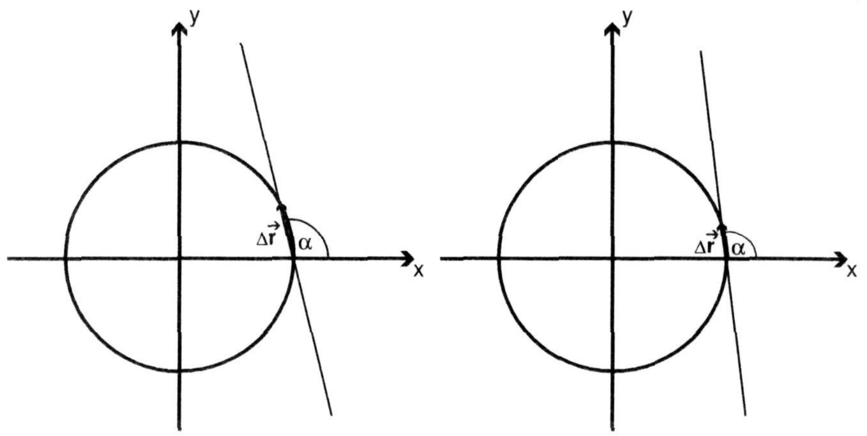
$$v_p = \frac{0,6}{\Delta t} \sin\left(\frac{\pi}{4}\Delta t\right) \doteq \frac{0,6}{\Delta t} \cdot \frac{\pi}{4}\Delta t = \frac{0,6\pi}{4} = 0,471 m.s^{-1}$$

Pro úhel α je situace zřejmá okamžitě. Pro $\Delta t = 0$ dostaneme $\cos\alpha = 0$. To odpovídá úhlu $\alpha = 90°\text{nebo}270°$. Naší situaci vyhovuje první z obou možností.

Následující obrázky znázorňují posunutí $\Delta\vec{r}$ pro t = 0 a různé hodnoty Δt. Směr průměrné rychlosti je shodný se směrem $\Delta\vec{r}$. Vidíme, že pro $\Delta t \to 0$ se blíží tečně k trajektorii v bodě, v němž se částice nachází v okamžiku t = 0.



Obrázek 2.9: Směr průměrné rychlosti v časech $\Delta t = 1$ s (vlevo) a $\Delta t = 0,5$ s (vpravo)



Obrázek 2.10: Směr průměrné rychlosti v časech $\Delta t = 0,25$ s (vlevo) a $\Delta t = 0,12$ s (vpravo)

Směr okamžité rychlosti je dán tečnou k trajektorii v daném bodě trajektorie.

Pro ty kteří rádi počítají:
Pokusme se určit, jaká bude okamžitá rychlost v libovolném okamžiku t. Zjistíme ji pomocí průměrné rychlosti v intervalu $[t,\ t+\Delta t]$, budeme-li Δt zmenšovat a sledovat chod průměrné rychlosti k limitnímu vektoru. Výpočty tentokrát nebudou jen číselné, pokusíme se o obecný postup.

Platí

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t) = \left(R\cos\frac{2\pi(t+\Delta t)}{T} - R\cos\frac{2\pi t}{T},\ R\sin\frac{2\pi(t+\Delta t)}{T} - R\sin\frac{2\pi t}{T},\ 0\right).$$

Použijeme součtových vzorců, které najdeme v matematických tabulkách.

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

Dostaneme

$$\Delta x = R\left(\cos\frac{2\pi(t+\Delta t)}{T} - \cos\frac{2\pi t}{T}\right) = -2R\sin\left(\frac{2\pi t}{T} + \frac{\pi\Delta t}{T}\right)\sin\frac{\pi\Delta t}{T}$$

$$\Delta y = R\left(\sin\frac{2\pi(t+\Delta t)}{T} - \sin\frac{2\pi t}{T}\right) = 2R\cos\left(\frac{2\pi t}{T} + \frac{\pi\Delta t}{T}\right)\sin\frac{\pi\Delta t}{T}$$

$$\Delta z = 0$$

Je-li Δt opět velmi malé, můžeme pracovat s následujícím přiblížením:

$$\sin\left(\frac{2\pi t}{T} + \frac{\pi\Delta t}{T}\right) \doteq \sin\frac{2\pi t}{T},\quad \cos\left(\frac{2\pi t}{T} + \frac{\pi\Delta t}{T}\right) \doteq \cos\frac{2\pi t}{T},\quad \sin\frac{\pi\Delta t}{T} \doteq \frac{\pi\Delta t}{T}$$

Pak

$$\Delta x \doteq -2R\sin\frac{2\pi t}{T}\cdot\frac{\pi\Delta t}{T},\quad \Delta y \doteq 2R\cos\frac{2\pi t}{T}\cdot\frac{\pi\Delta t}{T},\quad \Delta z = 0$$

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} \doteq -\frac{2\pi R}{T}\sin\frac{2\pi t}{T},\quad \frac{\Delta x}{\Delta t} \doteq \frac{2\pi R}{T}\cos\frac{2\pi t}{T},\quad \frac{\Delta z}{\Delta t} = 0$$

Tyto výsledky představují složky okamžité rychlosti

$$\vec{v}(t) = \left(-\frac{2\pi R}{T}\sin\frac{2\pi t}{T},\ \frac{2\pi R}{T}\cos\frac{2\pi t}{T},\ 0\right)$$

o velikosti

$$v(t) = \frac{2\pi R}{T}\sqrt{\sin^2\frac{2\pi t}{T} + \cos^2\frac{2\pi t}{T}} = \frac{2\pi R}{T} = \omega R$$

Rozdělení pohybů podle okamžité rychlosti
Pohyby rozdělujeme podle okamžité rychlosti ze dvou hledisek.

- podle velikosti okamžité rychlosti
- podle směru okamžité rychlosti

Podle velikosti okamžité rychlosti rozdělujeme pohyby na rovnoměrné a nerovnoměrné. Pokud je velikost okamžité rychlosti neměnná (konstantní), jedná se o pohyb rovnoměrný. V opačném případě, kdy se velikost okamžité rychlostí mění, se jedná o pohyb nerovnoměrný.

Podle směru okamžité rychlosti rozdělujeme pohyby na přímočaré a křivočaré. Při stále stejném směru okamžité rychlosti se jedná o pohyb přímočarý (těleso se pohybuje po přímce). V případě, že se směr okamžité rychlosti mění, se jedná o pohyb křivočarý.

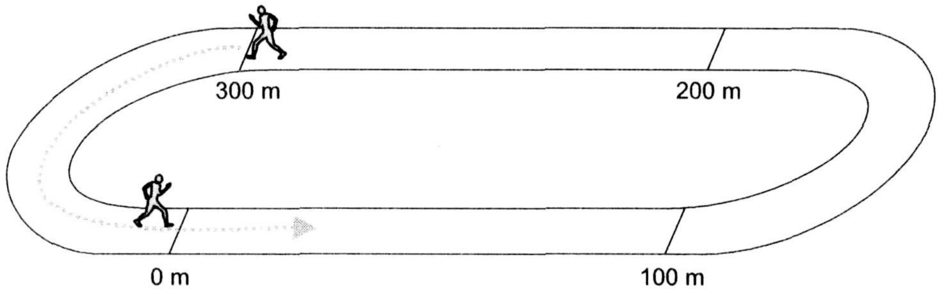
Většina pohybů v běžném životě je nerovnoměrných, resp. křivočarých, ať už půjdete pěšky, pojedete autem nebo jiným dopravním prostředkem. Rovnoměrně nebo přímočaře se budete pohybovat jen v některých úsecích cesty.

Doporučení:
Projděte si všechny předchozí příklady a určete, o jaké pohyby se v nich z hlediska okamžité rychlosti jedná.

2.4 Zrychlení hmotného bodu

2.4.1 Průměrné a okamžité zrychlení přímočarého pohybu

■ **Příklad 10:**
Představme si opět standardní atletický stadion s oválem délky 400 metrů a na něm 4 různé značky. Všechny jsou od sebe vzdálené 100 metrů a klasickým způsobem rozmístěny na začátku a na konci přímkových úseků. Uvažujme o hypotetické situaci, kdy se na trati zároveň utkají běžci Maurice Green a Michael Johnson. Maurice Green poběží stejný závod jako v příkladu 2, tedy na 100 metrů s pevným startem, a cílem proběhne za 9,73 s. Michael Johnson poběží závod na 200 metrů s letmým startem a odstartuje ze značky umístěné na 300 metrech. Ve stejném okamžiku, kdy bude míjet značku 0 metrů, zazní startovní výstřel pro Maurice Greena. Na konci stometrové rovinky proběhnou oba závodníci cílem ve stejném okamžiku. Pro lepší představu nám poslouží následující obrázek 2.11.



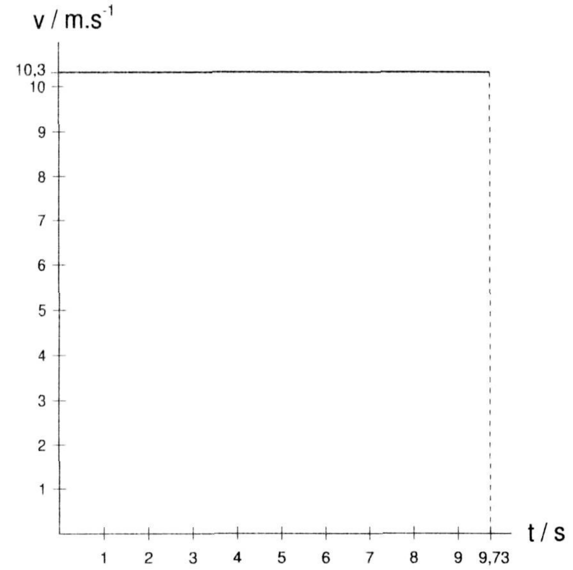
Obrázek 2.11: Rozmístění běžců na stadionu

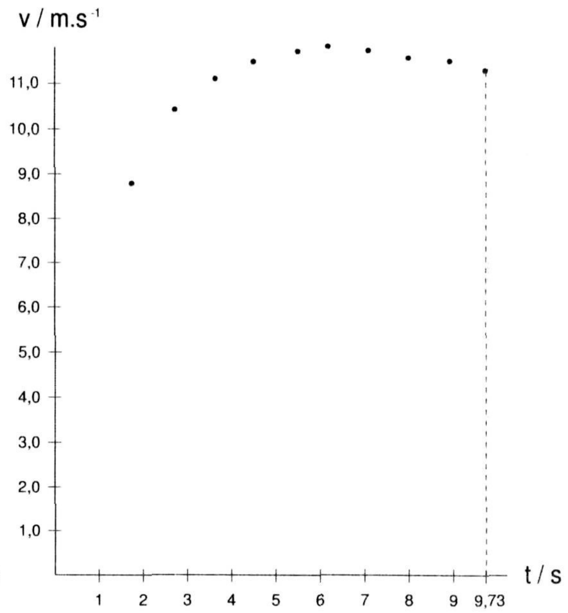
Jak jsme zjistili v předchozí kapitole, je průměrná rychlost obou závodníků na stometrové trati stejná, tj. $v_p = 10,3 \mathrm{m.s^{-1}}$. Ačkoli závodníci překonají stejné posunutí za tutéž dobu, je jejich pohyb, z hlediska okamžité rychlosti a její změny, velmi rozdílný. V případě M. Johnsona předpokládáme pohyb rovnoměrný, velikost okamžité rychlosti je v průběhu celého závodu konstantní, tj. $v = 10,3 \mathrm{m.s^{-1}}$. V případě M. Greena je v čase $t_1 = 0$s jeho okamžitá rychlost nulová, avšak s přibývajícím časem se zvyšuje a v okamžiku protnutí cílové pásky je $v = 11,3 \mathrm{m.s^{-1}}$. Závislosti velikosti okamžité rychlosti na čase jsou znázorněny v grafech 2.12. Druhý z grafů je sestrojen na základě údajů o závodě M.Greena zveřejněných atletickou federací a shrnutých v následující tabulce.

t [s]	x [m]	v [$\mathrm{m.s^{-1}}$]	t [s]	x [m]	v [$\mathrm{m.s^{-1}}$]
0,00	0,00	0,00	6,27	60,0	11,80
1,71	10,0	8,71	7,12	70,0	11,68
2,75	20,0	10,47	7,98	80,0	11,57
3,67	30,0	11,14	8,85	90,0	11,51
4,45	40,0	11,50	9,73	100,0	11,30
5,42	50,0	11,67	-	-	-

Tabulka 5. Údaje o běhu M.Greena na MS v Aténách 1997

Závislost velikosti okamžité rychlosti na čase v případě letmého startu (pomyslný běh Michaela Johnsona) a pevného startu (skutečné údaje ze závodu Maurice Greena) názorně ukazují následující grafy.





Obrázek 2.12: Grafy závislosti velikosti okamžité rychlosti na čase pro letmý a pevný start

Položme si otázku, jaká veličina by popsala změny okamžité rychlosti v případě M. Greena? Jak odlišit pohyby M. Greena a M. Johnsona v případě, že se jejich průměrné rychlosti, resp. posunutí i čas, rovnají.

Jednou z těchto veličin je *průměrné zrychlení*. Před jeho zavedením je nutné si ujasnit některé skutečnosti. V případě přímočarého pohybu, pro jednoduchost budeme předpokládat pohyb po ose x, má okamžitá rychlost stále stejný směr určený osou x. Okamžitá rychlost při tomto pohybu je určená pouze jedinou složkou v_x, zbývající složky jsou nulové. Předpokládejme, že v okamžiku t_1 má hmotná částice okamžitou rychlost $\vec{v_1} = (v_1)$ a v okamžiku t_2 okamžitou rychlost $\vec{v_2} = (v_2)$. Změna rychlosti $\Delta\vec{v} = \vec{v_2} - \vec{v_1}$ je tedy určena také jedinou složkou $\Delta\vec{v} = \vec{v_2} - \vec{v_1} = (v_2 - v_1)$.

Průměrné zrychlení při přímočarém pohybu definujeme jako podíl změny okamžité rychlosti $\Delta\vec{v}$ a délky časového intervalu Δt, ve kterém k této změně došlo.

$$\vec{a_p} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v_2} - \vec{v_1}}{t_2 - t_1}, \quad \text{složka} \quad a_p = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$$

kde $v_1(v_2)$ je počáteční (koncová) okamžitá rychlost a t_1 (t_2) je počáteční (koncový) okamžik.

Pro průměrné zrychlení připadají v úvahu kladné i záporné hodnoty. Předpokládáme-li $t_1 < t_2$, bude průměrné zrychlení kladné pro $v_2 > v_1$ (okamžitá rychlost se s časem zvyšuje) a záporné pro $v_2 > v_1$ (okamžitá rychlost s časem klesá). Průměrné zrychlení je vektorová fyzikální veličina. Má tedy velikost, směr a orientaci. Jeho směr je v případě jednorozměrného pohybu totožný se směrem osy x. Je-li jeho orientace souhlasná s osou x, je průměrné zrychlení kladné. Je-li nesouhlasná, je průměrné zrychlení záporné. Jednotku zrychlení odvodíme z definičního vztahu:

$$a_p = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

$$[a] = \frac{[\Delta v]}{[\Delta t]} = \frac{\mathrm{m.s^{-1}}}{\mathrm{s}} = \mathrm{m.s^{-2}}$$

Jednotka $m.s^{-2}$ je základní jednotkou zrychlení. Lze užívat i jiné jednotky, ale vždy budou ve tvaru délka.čas^{-2}.

Vraťme se k příkladu 10 a položme si otázku: jaké je průměrné zrychlení závodníků na společném stometrovém úseku trati?

Řešení:
Abychom mohli na tuto otázku odpovědět, musíme znát okamžité rychlosti závodníků na začátku a konci časového intervalu a velikost tohoto časového intervalu. Časový interval je u obou závodníků společný, jeho délka je 9,73 s. V případě Michaela Johnsona je okamžitá rychlost na počátku i na konci tohoto časového intervalu, tj. v okamžicích $t_1 = 0$s a $t_2 = 9,73$s, shodná, $v_1 = 10,3$ m.s^{-1}, $v_2 = 10,3$m.s^{-1}. Okamžitá rychlost Maurice Greena v čase $t_1 = 0$s je rovna $v_1 = 0$ m.s^{-1} a v čase $t_2 = 9,73$s činí $v_2 = 11,3$m.s^{-1}. Pohyb obou závodníků je na společném stometrovém úseku trati přímočarý [11], využíváme proto zjednodušení a rychlost zadáváme jedinou složkou. Rychlost má přitom směr daný osou x a je orientována v jejím kladném směru. Z daných hodnot tedy zjistíme průměrné zrychlení a_p obou závodníků.

M.Johnson:

$$a_{p1} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{(10,3 - 10,3)\mathrm{m.s^{-1}}}{(9,73 - 0)\mathrm{s}} = 0\mathrm{m.s^{-2}}$$

M.Green:

$$a_{p2} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{(11,3 - 0)\mathrm{m.s^{-1}}}{(9,73 - 0)\mathrm{s}} = 1,16\mathrm{m.s^{-2}}$$

Průměrné zrychlení M.Johnsona bylo na stometrové trati nulové, zatímco průměrné zrychlení M.Greena je $a_p = 1,16$m.s^{-2} ve směru souhlasném s osou x.

■ Příklad 11:
Představme si běžce, který se pohybuje po přímém úseku cesty, kterou ztotožníme s osou x. V okamžiku $t_1 = 0$ s se běžec pohybuje okamžitou rychlostí 20km.h^{-1} v kladném směru osy x. V okamžiku $t_2 = 30$ s se běžec obrátí a začne se pohybovat v opačném směru. V čase

[11] Osa x je orientovaná jako v příkladě 1, tj. od cíle ke startu.

$t_3 = 60$ s je jeho okamžitá rychlost -20km.h^{-1}.[12] Jaké je jeho průměrné zrychlení v časovém intervalu $[t_1, t_3]$?

Řešení:
Pro výpočet průměrného zrychlení použijeme definiční vztah

$$a_p = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}.$$

Před dosazením do definičního vztahu je nutno převést všechny zadané údaje na společné jednotky

$$v_1 = \frac{20}{3,6}\text{m.s}^{-1} = 5,56\text{m.s}^{-1}, v_2 = \frac{-20}{3,6}\text{m.s}^{-1} = -5,56\text{m.s}^{-1}$$

Pak

$$a_p = \frac{-5,56 - 5,56}{60 - 0}\text{m.s}^{-2} = \frac{-11,12}{60}\text{m.s}^{-2} = -0,19\text{m.s}^{-2}$$

Na tomto příkladu je dobře vidět vektorový charakter zrychlení, neboť zrychlení běžce je nenulové, i když velikosti okamžitých rychlostí v čase t_1 a t_3 jsou stejné. Někdy se pro záporné zrychlení používá termín zpomalení.

■ **Příklad 12:**
Automobil pohybující se po přímé trati[13] má konstantní rychlost 130km.h^{-1}. Začne brzdit a za 6 sekund již stojí na místě. Jaké je průměrné zrychlení automobilu v těchto 6 sekundách?

Řešení:
Pro výpočet průměrného zrychlení použijeme definiční vztah

$$a_p = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}.$$

Před dosazením do definičního vztahu je nutno převést všechny zadané údaje na společné jednotky

$$v_1 = \frac{130}{3,6}\text{m.s}^{-1} = 36,1\text{m.s}^{-1}$$

Dostáváme

$$a_p = \frac{0 - 36,1}{6 - 0}\text{m.s}^{-2} = \frac{-36,1}{6}\text{m.s}^{-2} = -6\text{m.s}^{-2}$$

Průměrné zrychlení automobilu je $a_p = -6\text{m.s}^{-2}$, má směr osy x a je orientováno v jejím záporném směru.

[12] Znaménko u rychlosti nám říká, že se běžec pohybuje v záporném směru osy x.
[13] Tuto trať si představme jako osu x, orientace je ve směru pohybu automobilu.

Vraťme se ještě naposledy k běhu Maurice Greena. Jak jsme spočetli v příkladu 10, je průměrné zrychlení celého závodu $1,16\text{m.s}^{-2}$. Je však průměrné zrychlení stejné ve všech úsecích závodu? Můžeme si to ověřit, neboť máme k dispozici údaje, které udávají okamžitou rychlost závodníka na značkách 10, 20, ..., 100 metrů. Také máme k dispozici čas, ve kterém závodník míjel jednotlivé značky. Následující tabulka shrnuje všechny potřebné údaje (viz též tabulka 5).

x [m]	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
t [s]	0	1,71	2,75	3,67	4,55	5,42	6,27	7,12	7,98	8,85	9,73
v [m.s^{-1}]	0	8,71	10,47	11,14	11,50	11,67	11,80	11,68	11,57	11,51	11,30

Z těchto údajů snadno spočteme průměrné zrychlení v libovolných úsecích. V následující tabulce jsou hodnoty průměrného zrychlení ve všech desetimetrových úsecích trati.

úsek [m]	0 - 10	10 - 20	20 - 30	30 - 40	40 - 50	50 - 60	60 - 70	70 - 80	80 - 90	90 - 100
a_p[m.s^{-2}]	5,09	2,38	0,73	0,41	0,20	0,15	-0,14	-0,13	-0,07	-0,24

Z tabulky vidíme, že průměrné zrychlení závodníka se v jednotlivých úsecích liší, v některých z nich je dokonce záporné. Tento výsledek jsme očekávali. Víme totiž, že pohyb závodníka na stometrové trati je nerovnoměrný, okamžitá rychlost se v průběhu závodu mění, nejprve roste, jak se závodník rozbíhá, nabývá maxima a pak klesá, jak závodníkovi docházejí síly. Průměrné zrychlení je na časových změnách okamžité rychlosti závislé, proto jsou jeho hodnoty v jednotlivých úsecích trati rozdílné. Položme si otázku: jaké je zrychlení závodníka při míjení značky 30 m? Po zkušenosti s okamžitou rychlostí asi víte, jaká bude odpověď. K tomu, abychom tento údaj mohli zjistit, potřebujeme znát okamžité rychlosti v blízkosti této značky a také časový interval, ve kterém tyto rychlosti měříme. Takové údaje bohužel nemáme k dispozici, proto využijeme jiného příkladu.

▪ Příklad 13:

Automobil se rozjíždí po přímé trati, jeho okamžitá rychlost je prvních pěti sekundách popsána vztahem

$$v(t) = \frac{1}{3}kt^2, \quad k = 3,25\text{m} \cdot \text{s}^{-3}, \quad \Delta v = \frac{1}{3}[(t + \Delta t)^2 - t^2]$$

Budeme počítat průměrné zrychlení v intervalu $[t, t + \Delta t]$ pro $t = 3$ s a zmenšující se časový interval Δt. Výsledky shrnuje následující tabulka (údaje jsou uvedeny na tři platná místa).

Δt [s]	Δv [m · s^{-1}]	a[m · s^{-2}]	Δt [s]	Δv [m · s^{-1}]	a[m · s^{-2}]
1,00	7,58	7,58	0,06	0,394	6,57
0,50	3,52	7,04	0,03	0,196	6,53
0,25	1,69	6,77	0,01	0,065	6,51
0,12	0,796	6,63	0,005	0,032	6,50
0,09	0,594	6,60	0,003	0,019	6,50

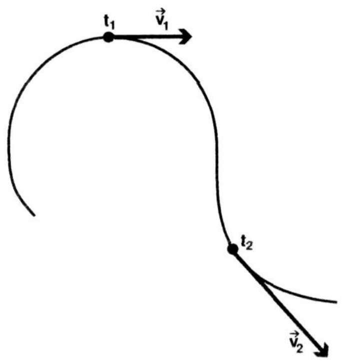
Tabulka 6. K pojmu okamžité zrychlení přímočarého pohybu

Vidíme, že při zmenšující se hodnotě Δt se průměrné zrychlení v intervalu $[3, 3+\Delta t]s$ ustaluje na hodnotě 6,5 [m.s^{-2}]. V rámci přesnosti měřícího zařízení můžeme tedy konstatovat, že zrychlení automobilu v okamžiku t=3 s je 6,5 [m.s^{-2}] Tímto působem dospíváme k pojmu *okamžité zrychlení.*

Průměrné zrychlení přímočarého pohybu hmotného bodu v intervalu $[t, t+\Delta t]$, určené jako podíl změny okamžité rychlosti Δv a časového intervalu Δt, se při poklesu Δt k nule ustálí na limitní hodnotě $a(t)$, kterou nazveme **okamžité zrychlení**

2.4.2 Průměrné a okamžité zrychlení křivočarého pohybu

Stejně jako u rychlosti zobecníme i naše úvahy o zrychlení na křivočarý pohyb. V tomto případě se částice nemusí pohybovat po přímce. Představme si pohyb hmotné částice po následující křivce:



Obrázek 2.13: Pohyb po křivce

V čase t_1 má částice rychlost $\vec{v}_1$, v čase t_2 má rychlost $\vec{v}_2$. Změna rychlosti v časovém intervalu $[t_1, t_2]$ je vektor definovaný jako rozdíl $\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$. Tento vektor má tři složky

$$\Delta\vec{v} = (v_{2,x} - v_{1,x}, v_{2,y} - v_{1,y}, v_{2,z} - v_{1,z})$$

Průměrné zrychlení definujeme jako podíl změny okamžité rychlosti $\Delta\vec{v}$ a délky časového intervalu Δt,ve kterém k této změně došlo.

$$\vec{a}_p = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1}$$

po složkách

$$a_p = \left(\frac{v_{2,x} - v_{1,x}}{t_2 - t_1}, \frac{v_{2,y} - v_{1,y}}{t_2 - t_1}, \frac{v_{2,z} - v_{1,z}}{t_2 - t_1}\right)$$

Stejně jako v případě přímočarého pohybu je třeba řešit otázku okamžitého zrychlení. Myšlenka jejího zavedení je stejná. Pro časový interval $[t, t+\Delta t]$ budeme při zmenšující se hodnotě Δt sledovat chod vektoru průměrného zrychlení k limitní situaci. Získáme tak nejen velikost, ale i směr tohoto "limitního" vektoru, který nazveme okamžitým zrychlením. Jak určíme velikost a směr okamžitého zrychlení při křivočarém pohybu? Ukážeme si to na následujícím příkladě.

Stejně jako při zjišťování směru okamžité rychlosti využijeme pro jednoduchost a názornost i nyní pohybu po kružnici.

■ **Příklad 14:**

Uvažujme o pohybu hmotného bodu po kružnici o poloměru R=30cm. Bod koná jeden oběh za T=4s (viz příklad 9). Pro okamžitou rychlost hmotného bodu platí tato časová závislost

$$\vec{v}(t) = (v_x(t), v_y(t), v_z(t)) = \left(-\frac{2\pi R}{T}\sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right), \frac{2\pi R}{T}\cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right), 0\right)$$

Budeme uvažovat průměrné zrychlení v časovém intervalu $[t, t + \Delta t]$ pro t=0s a pro Δt klesající k nule. Pomocí složek průměrného zrychlení vypočeme jeho velikost podle vztahu

$$|\vec{a}_p| = \sqrt{a_{p,x}^2 + a_{p,y}^2 + a_{p,z}^2}$$

Jeho směr budeme charakterizovat úhlem α, který svírá vektor průměrného zrychlení s osou x, tj.

$$\cos\alpha = \frac{a_{p,x}}{a_p}.$$

Platí

$$\Delta\vec{v} = \vec{v}(\Delta t) - \vec{v}(0) = \frac{2\pi R}{T}\left(-\sin\frac{2\pi\Delta t}{T}, \quad \cos\left(\frac{2\pi\Delta t}{T}\right) - 1, \quad 0\right)$$

Pro R=0,3 m, T=4 s pak

$$\vec{a_p} = \frac{0,15\pi}{\Delta t}\left(-\sin\frac{\pi}{2}\Delta t, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2}\Delta t\right) - 1, \quad 0\right)$$

$$|\vec{a_p}| = \frac{0,15\pi}{\Delta t}\sqrt{\sin^2\frac{\pi}{2}\Delta t + \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\Delta t\right) - 1\right)^2} = \frac{0,3\pi}{\Delta t}\sin\frac{\pi}{4}\Delta t$$

$$\cos\alpha = -\frac{0,15\pi\sin\frac{\pi}{2}\Delta t}{0,3\pi\sin\frac{\pi}{4}\Delta t} = -\frac{\sin\frac{\pi}{4}\Delta t\cos\frac{\pi}{4}\Delta t}{\sin\frac{\pi}{4}\Delta t} = -\cos\frac{\pi}{4}\Delta t$$

$$\alpha = \pi + \frac{\pi}{4}\Delta t$$

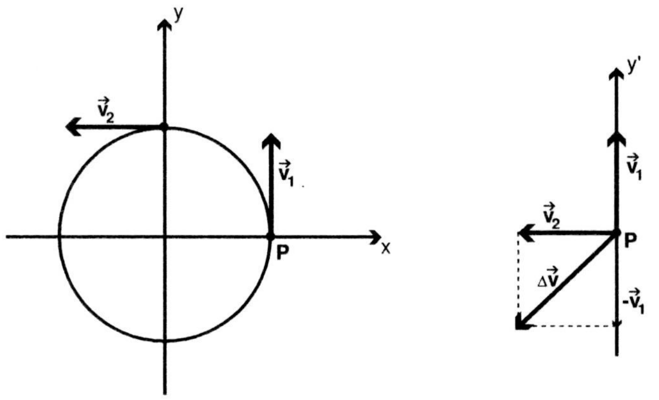
Chod velikosti průměrného zrychlení a úhlu α k limitním hodnotám pro t=0 a $\Delta t \to 0$ je vidět v následující tabulce.

Δt [s]	$a_{p,x}$ [m.s^-2]	$a_{p,y}$ [m.s^-2]	$\lvert\vec{a_p}\rvert$ $[\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-2}]$	α °
1,00	-0,471	-0,471	0,666	225
0,50	-0,666	-0,276	0,721	202,5
0,25	-0,721	-0,143	0,735	191,2
0,12	-0,735	-0,0695	0,739	185,4
0,09	-0,737	-0,0522	0,739	184,1
0,06	-0,739	-0,0348	0,740	182,7
0,03	-0,740	-0,0174	0,740	181,4
0,01	-0,740	-0,0058	0,740	180,5
0,005	-0,740	-0,0029	0,740	180,2
0,003	-0,740	-0,0017	0,740	180,1

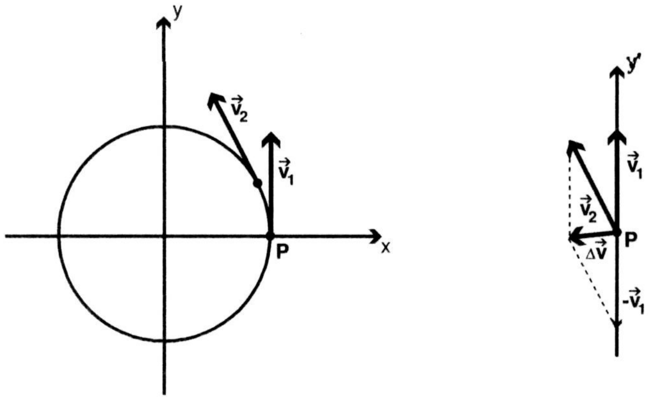
Tabulku 7. Okamžité zrychlení pohybu po kružnici

Z tabulky vidíme, že velikost průměrného zrychlení v $|\vec{a_p}|$ se pro $\Delta t \to 0$ ustaluje na hodnotě 0,470 m.s^{-2} a úhel α se blíží 180°. Zrychlení tedy míří stále přesněji do středu kružnice. Tento výsledek jsme mohli očekávat. Nahradíme-li totiž $\sin \frac{\pi}{4}\Delta t$ pro malé Δt hodnotou $\frac{\pi}{4}\Delta t$ (tak jsme to již provedli při výpočtu okamžité rychlosti pohybu po kružnici), dostaneme $|\vec{a_p}| \doteq \frac{0,3\pi^2}{4} = 0,740$. Úhel $\alpha = \pi + \frac{\pi}{4}\Delta t$ je pro $\Delta t = 0$ skutečně 180°.

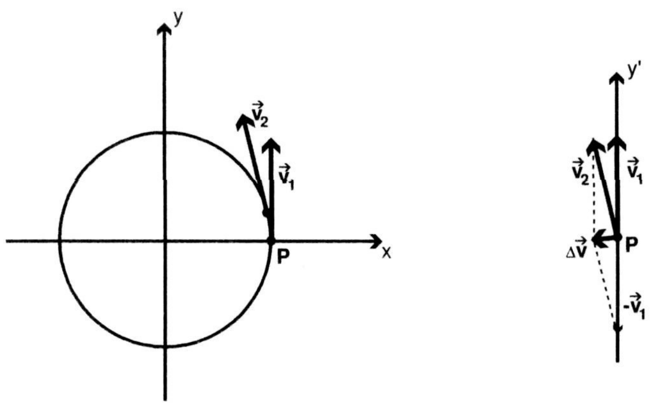
Tabulku doplníme názorným obrázkem pro vybrané hodnoty Δt. V obrázku jsou vyznačeny $\Delta\vec{v}$ pro různé hodnoty Δt. Směr průměrného zrychlení je shodný se směrem $\Delta\vec{v}$.



Obrázek 2.14: Směr průměrného zrychlení pro $\Delta t = 1$ s



Obrázek 2.15: Směr průměrného zrychlení pro $\Delta t = 0,25$ s



Obrázek 2.16: Směr průměrného zrychlení pro $\Delta t = 0,12$ s

Jak vidíme na obrázku, míří průměrné zrychlení při zmenšující se hodnotě Δt čím dál přesněji do středu kružnice.

2.5 Příklady k procvičení

■ **Příklad:**
Na dálnici Praha – Brno (délka trati je 199 km) jedou dva automobily. První z nich jede rychlostí o velikosti $130 km.h^{-1}$. Druhý automobil jede rychlostí o velikosti $105 km.h^{-1}$. O kolik minut dříve dorazí první automobil do Brna?

[23 minut]

■ **Příklad:**
Představme si chlapce, který se pohybuje po přímé cestě. Pět minut jde rychlostí $4 km.h^{-1}$, poté tři minuty běží rychlostí $12 km.h^{-1}$. Jaká je průměrná rychlost chlapce při tomto pohybu?

(Rychlost je zde reprezentována jednou složkou, pohyb si lze představit jako pohyb po ose x.)

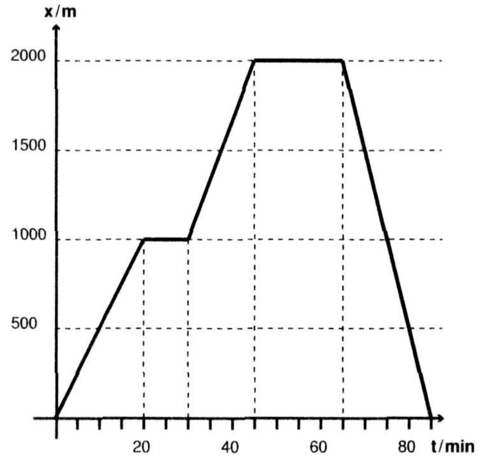
[1,94 m.s^{-1}]

■ **Příklad:**
Český hokejista Pavel Kubina dokáže vystřelit puk rychlostí o velikosti $162km.h^{-1}$. Za jak dlouho doletí puk k brankáři, pokud je vystřelen od modré čáry, která je ve vzdálenosti 17 metrů od brankové čáry?

[22 sekund]

■ **Příklad:**
Máme k dispozici graf závislosti polohy chodce na čase. Vypočtěte jeho průměrnou rychlost v těchto časových intervalech: a) $t_1 = 0min$, $t_2 = 30min$ b) $t_1 = 45min$, $t_2 = 65min$ c) $t_1 = 65min$, $t_2 = 85min$. Ve kterých úsecích se chodec pohybuje rovnoměrně? Jak se pohybuje v ostatních úsecích cesty?

[a) 0,56 m.s^{-1}; b) 0 m.s^{-1}; c) -1,67 m.s^{-1}]



Obrázek 2.17: Závislost polohy chodce na čase

■ **Příklad:**
Automobil se pohybuje po přímé cestě. Projíždí vesnicí dlouhou $1,4km$ rychlostí $50km.h^{-1}$, poté pokračuje $6km$ po silnici 3.třídy rychlostí $80km.h^{-1}$. Jaká je jeho průměrná rychlost? (Pohyb automobilu si představíme jako pohyb v kladném směru osy x.)

[71,82 km.h^{-1}]

■ **Příklad:**

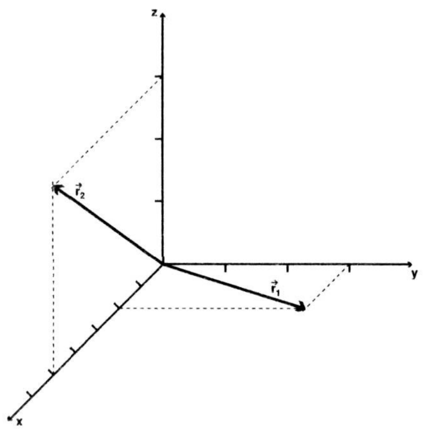
Automobil se pohybuje po přímé trati, jeho rychlost je $30 km.h^{-1}$. Za pět sekund se jeho rychlost zvětší na $70 km.h^{-1}$. Jaké je jeho průměrné zrychlení?

[2,22 $m.s^{-2}$]

■ **Příklad:**

Představme si pokoj, v jehož dolním rohu umístíme hypotetickou soustavu souřadnic. Na podlahu položíme hlemýždě, jehož poloha je určena polohovým vektorem $\vec{r_1} = (3, 2, 0)m$. Po pěti hodinách najdeme hlemýždě na boční stěně. Nová poloha je určena polohovým vektorem $\vec{r_2} = (5, 0, 3)m$. Určete průměrnou rychlost hlemýždě. Pozorováním hlemýždě jsme zjistili, že při svém pohybu urazil dráhu $20m$. Jaká je průměrná velikost rychlosti hlemýždě při tomto pohybu?

[$\vec{v_p} = \left(\frac{3}{5}, -\frac{3}{5}, \frac{3}{5}\right)$ m.h^{-1}; $\bar{v}_p = 4\,$m.h^{-1}]



Obrázek 2.18: Závislost polohy hlemýždě na čase

■ **Příklad:**

Představme si situaci, kdy osobní automobil sportovní úpravy dokáže z rychlosti o velikosti 100 km.h^{-1} zastavit za 2,5 sekundy. Spočítejte, jaké je jeho průměrné zrychlení a brzdná dráha. Při výpočtu brzdné dráhy předpokldejte, že automobil brzdí rovnoměrně. Použijte vzorec $s = v_0 t - \frac{1}{2}at^2$.

[$a_p = -11,11\,$m.s^{-2}; $s = 34,75\,$m]

■ **Příklad:**

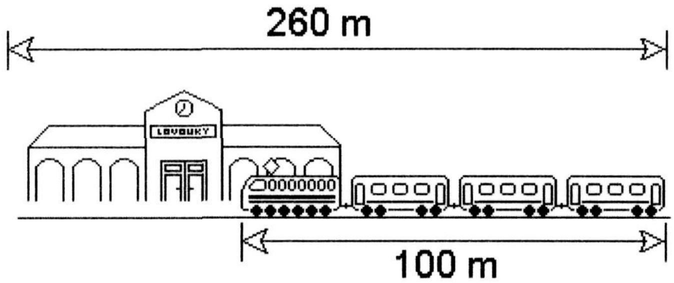
Na lince Praha - Brno se u Kolína střetávají dvě vlakové soupravy. Vlak EuroCity, o celkové délce 80 metrů, jedoucí rychlostí 140 km.h^{-1} a obyčejný rychlík, délky 95 metrů, jedoucí rychlostí 90 km.h^{-1}. Určete, za jakou dobu se oba dva vlaky minou.

[2,74 sekund]

■ **Příklad:**

Rychlík o celkové délce 100 metrů míjí železniční nádraží dlouhé 260 metrů. Zjistěte, za jak dlouho vlak projede nádražím (průjezd začíná v okamžiku vjezdu lokomotivy do nádraží a končí, když poslední vagón opustí nádraží). Rychlost vlaku je 80 $\mathrm{k.m^{-1}}$.

[16,2 sekund]



■ **Příklad:**

Většina dnešních osobních automobilů má havarijní zrychlení -7 $\mathrm{m.s^{-2}}$. Průměrná reakční doba[14] řidiče je 0,9 sekundy. Spočítejte bezpečné odstupy vozidel v rychlostech 50 $\mathrm{km.h^{-1}}$ (jízda v obci), 90 $\mathrm{km.h^{-1}}$ (jízda mimo obec) a 130 $\mathrm{km.h^{-1}}$ (jízda po dálnici). Pozn. Bezpečným odstupem rozumíme velikost brzdné dráhy tj. dráhy, kterou řidič potřebuje, aby uvedl své auto do klidu.

[$s_{50} = 26,2\,\mathrm{m}$; $s_{90} = 67,1\,\mathrm{m}$; $s_{130} = 125,7\,\mathrm{m}$]

[14] Doba za kterou řidič zareaguje na vzniklou situaci sešlápnutím brzdového pedálu

Literatura

[1] Mašek, B., Jeništa, J., Nachtikal, F.: Fyzika pro vyšší reálky, I. díl, Jednota českých matamatiků a fyziků, Praha, 1910

[2] Jeništa, J.: Fysika pro vyšší gymnazia, I. díl, Jednota českých matematiků, Praha, 1911

[3] Herold, E., Ryšavý, V.: Fysika pro vyšší třídy středních škol, I. díl, Československá grafická unie a.s., Praha,1934

[4] Mašek, B.: Fysika pro vyšší třídu středních škol, I. díl, Jednota českých matamatiků a fyziků, Praha,1936

[5] Bělař, A. a kol.: Fyzika pro třetí třídu středních škol, SPN, Praha, 1950

[6] Chytilová, M. a kol.: Fyzika pro třetí třídu gymnázií, SPN, Praha, 1951

[7] Kašpar, E. a kol.: Fyzika pro devátý postupný ročník, SPN, Praha, 1955

[8] Šoler, K., Dibelka, J., Kašpar, E.: Fyzika pro devátý ročník jedenáctiletých středních škol, SPN, 1961

[9] Marek, J. a kol.: Fyzika pro I. ročník střední všeobecně vzdělávací školy, SPN, Praha, 1968

[10] Vachek, J. a kol.: Fyzika pro I. ročník gymnázií, SPN, Praha, 1984

[11] Bednařík, M. a kol.: Fyzika pro Gymnázia, Mechanika, Prometheus, Praha, 1993

[12] Bednařík, M. a kol.: Fyzika pro Gymnázia, Mechanika, Prometheus, Praha, 2001

[13] Webové stránky nakladatelství Prometheus

[14] Katalog požadavků ke společné části maturitní zkoušky v roce 2004. Fyzika. MŠMT, 2002.

[15] Department of Computer Science, University of Southern California; http://desert.jsd.claremont.edu/ newt/track/splits/splits.html